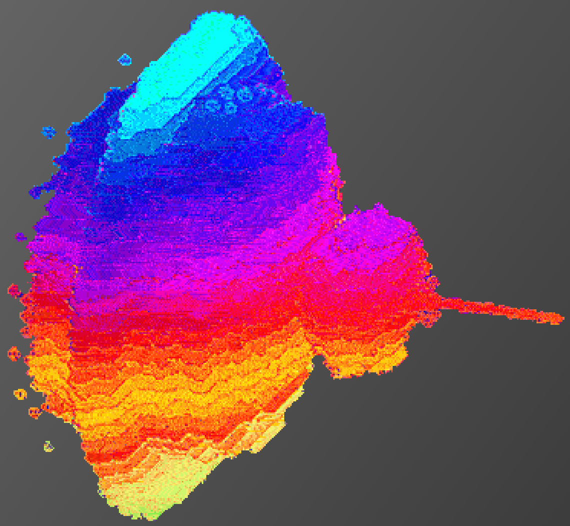


LES SUITES

Frédéric Laroche

2009

Les Entiers

Caractériser les nombres : peut-être avec des figures géométriques ¿

En triangle

```
   *
  * *
 * * *
* * * *
---------------
```

1
3
6
10

Une formule

$n(n+1)/2$

n = n° de ligne

En carré

```
  *
 * *
 * *
* * *
* * *
* * *
```

1
4
9
16

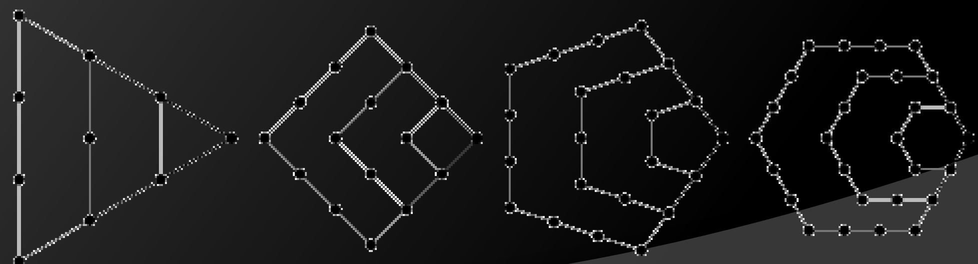
Une formule ?

En pentagone

```
   *
   *
 *   *
  * *
```

1
5
12
22

Une formule : $n(3n-1)/2$



Et la démonstration ?

- L'induction (ou raisonnement par récurrence) : si une propriété est vraie pour un nombre n et que nous montrons qu'elle reste vraie pour le nombre suivant, alors, à condition que la propriété soit vraie quelque part (n_0), elle est vraie pour toutes les valeurs de $n < n_0$.
- $1=1=1^2$, $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$,…
- la propriété à montrer est que $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$
- C'est vrai pour $n=1$, 2 et 3 ; supposons que $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ est vrai : il faut montrer que
  $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = 1+3+5+\ldots+(2n+1) =(n+1)^2$
- Or la somme des premiers termes vaut n^2, donc on doit montrer que $n^2+(2n+1) =(n+1)^2$, ce qui est évident.

rang	nombre sur la ligne	nombre
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64

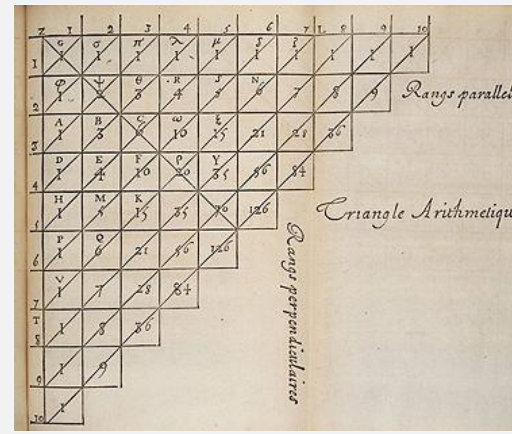
« Le maître d'école s'appelait Büttner et il aimait rosser ses élèves. Il feignait d'être sévère et ascétique, et, en quelques rares occasions, l'expression de son visage révélait le plaisir qu'il prenait à les rouer de coups. […] Cela se passait dans le quartier le plus pauvre de Brunswick, aucun de ces enfants n'irait jamais à l'école secondaire, personne ici ne travaillerait autrement qu'avec ses mains. Gauss avait beau se taire et s'évertuer à répondre aussi lentement que les autres, il percevait la méfiance du maître. Il sentait que ce dernier n'attendait qu'une occasion de le frapper un peu plus fort que le reste du groupe. Et un beau jour, il lui fournit cette occasion.
Büttner leur avait demandé d'additionner tous les nombres de un à cent. Cela prendrait des heures et, même avec la meilleure bonne volonté du monde, ce n'était pas possible sans faire à un moment ou à un autre une erreur de calcul pour laquelle on pouvait alors être puni. […] Gauss ne réussit pas à se contrôler ce jour là et au bout de trois minutes il s'était retrouvé devant le pupitre du maître avec son ardoise.
- Bon, dit Büttner, et il saisit le bâton. Qu'est-ce que c'est que ça ?
- Cinq mille cinquante.
- Quoi ?
- Gauss se racla la gorge : c'était pourtant bien cela qu'il fallait faire, dit-il, additionner tous les nombres de un à cent. Cent plus un faisaient cent-un. Quatre-ving-dix-neuf plus deux faisaient cent-un. Quatre-ving-dix-huit plus trois faisaient cent-un. Toujours cent-un. On pouvait répéter l'opération cinquante fois. Donc : cinquante fois cent-un. »

Daniel Kehlmann, *Les arpenteurs du monde*, Actes Sud, 2006

Esprit de géométrie

- Un exemple historique avec le « triangle de Pascal » (1654) :
- chaque terme est la somme de deux termes de la ligne précédente celui au-dessus et celui juste à gauche.
- Si on numérote par n la ligne, p la colonne et qu'on note $\binom{p}{n}$ le terme correspondant, alors on a

$$\binom{p-1}{n-1}+\binom{p}{n-1}=\binom{p}{n}$$



- Par un autre biais on trouve que

$$\binom{p}{n}=\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)\ldots1}$$

- par exemple $n=8$, $p=4$

$$\binom{4}{8}=\frac{8.7.6.5}{4.3.2.1}=70$$

- Y'a plus qu'à le prouver…

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

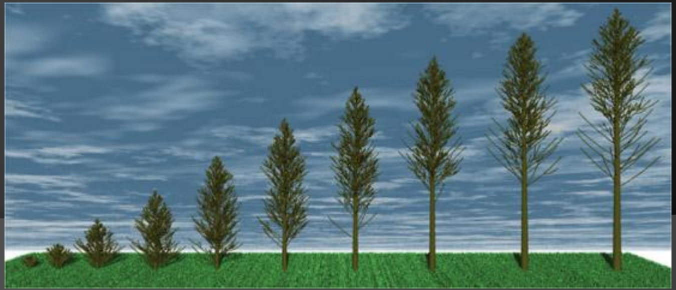
Somme = suite arithmétique

En vue d'une exploitation médicale, des chercheurs étudient la croissance de 2 plantes, le Linéa et l'Exposa.

	A	B	C
1		Linéa	Exposa
2	Hauteur initiale	20	20
3	Semaine 1	25	23
4	Semaine 2	30	26,5
5	Semaine 3	35	30,4
6	Semaine 4	40	35
7	Semaine 5	¿	¿

- Les chercheurs se proposent de prévoir les hauteurs des 2 plantes pour les semaines suivantes, à partir des relevé des premières semaines.
- Ils décident d'appeler u_n la hauteur de Linéa au bout de n semaines et v_n celle d'Exposa au bout de n semaines (u_0=v_0= 20 est la hauteur initiale des 2 plantes).

- Pour Linéa l'augmentation est constante : 5 ;
- on a $u_0=20$, $u_1=20+5$, $u_2=20+2.5$, $u_3=20+3.5$, …, $u_n=20+n.5$;
- dans un an Linéa mesurera $u_{52}=20+52.5 =280$.



le site

- Ca veut dire quoi taux d'accroissement moyen ¿
- Pour Linéa l'augmentation est constante : 5 chaque semaine, le taux moyen est de 5.
- Pour Exposa l'augmentation est proportionnelle : il faut multiplier par 1,15 (soit +15%) chaque semaine. La moyenne arithmétique n'a plus de sens alors.

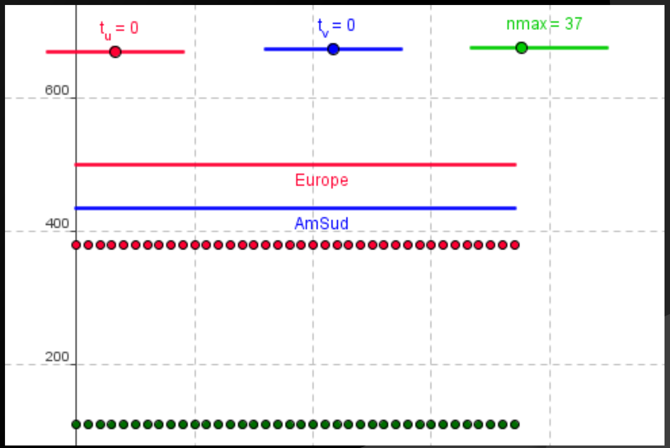
Produit = suite géométrique

En Europe la population était de 380 millions en 1939 et de 500 millions en 1989. Dans le même temps la population est passée en Amérique du Sud de 110 millions à 435 millions d'habitants. Calculer le taux d'accroissement annuel moyen sur cette période dans les deux cas.

- Ça veut dire quoi taux d'accroissement moyen ?
- Ça veut dire que si la population augmente de t % par an, on doit retrouver les populations finales à partir de la population initiale.
- La population P_n passe alors à P_{n+1} en calculant

  $$P_{n+1}=P_n+t.P_n=(1+t)P_n=qP_n\ ;$$

  en partant de P_0, on a les résultats facilement.
- On a la formule $P_n=q^nP_0=\ (1+t)^nP_0$.



html/suites_geom1.html

- Ici, $P_{50}=500=(1+T)\ P_0\ =\ (1+t)^{50}P_0$, soit $T\approx 0{,}316$.
- Taux moyen : il faut trouver T tel que

  $(1+t)^{50}\ =(1+T)=1{,}316$

  $1+t=(1+T)^{1/50}$

  donc $t=(1+T)^{1/50}\ -1\approx 0{,}0055$.

Kid Paddle vs Zénon d'Elée

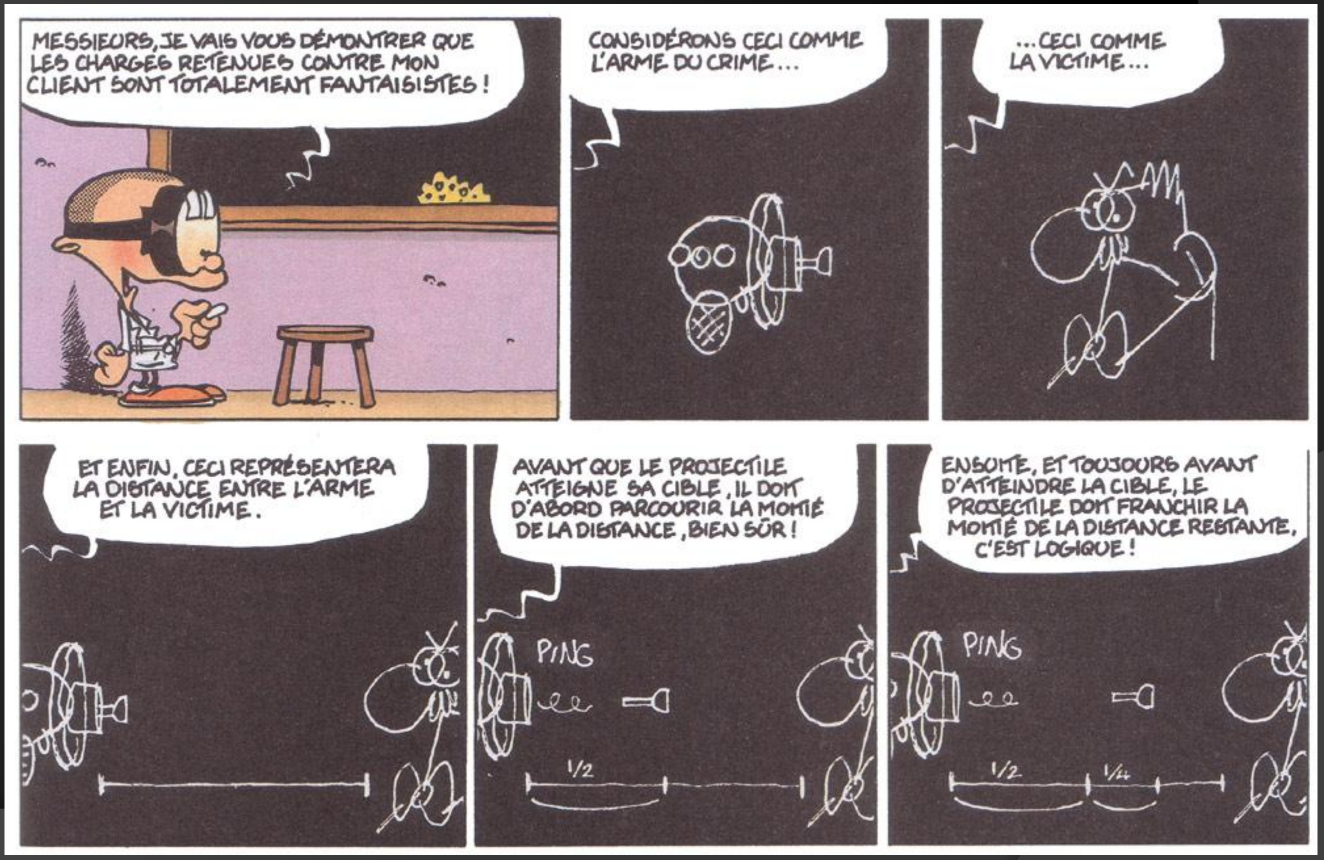
Vers 500 avant J-C, Zénon, dialecticien et philosophe, cherche à contredire la vision pythagoricienne du monde par une série de raisonnements par l'absurde. Pythagore le premier a donné le nom de **cosmos** [κοσμός, c'est-à-dire beauté, ordre] à l'enveloppe de l'univers, en raison de l'organisation qui s'y voit. À quoi Zénon réplique : « si le lieu est quelque chose, il doit être dans quelque chose », ce qui d'une chose à une autre aboutit à l'« illimité ».

- Appelons d la distance entre le pistolaser et le nez du maître.
- La flêche parcourt $d/2$ puis $d/4$ puis $d/8$, etc. $d_n = d/2^n$.
- La distance parcourue est

$$S_n = d/2 + d/4 + d/8 + \ldots + d/2^n$$

- Il lui reste à parcourir

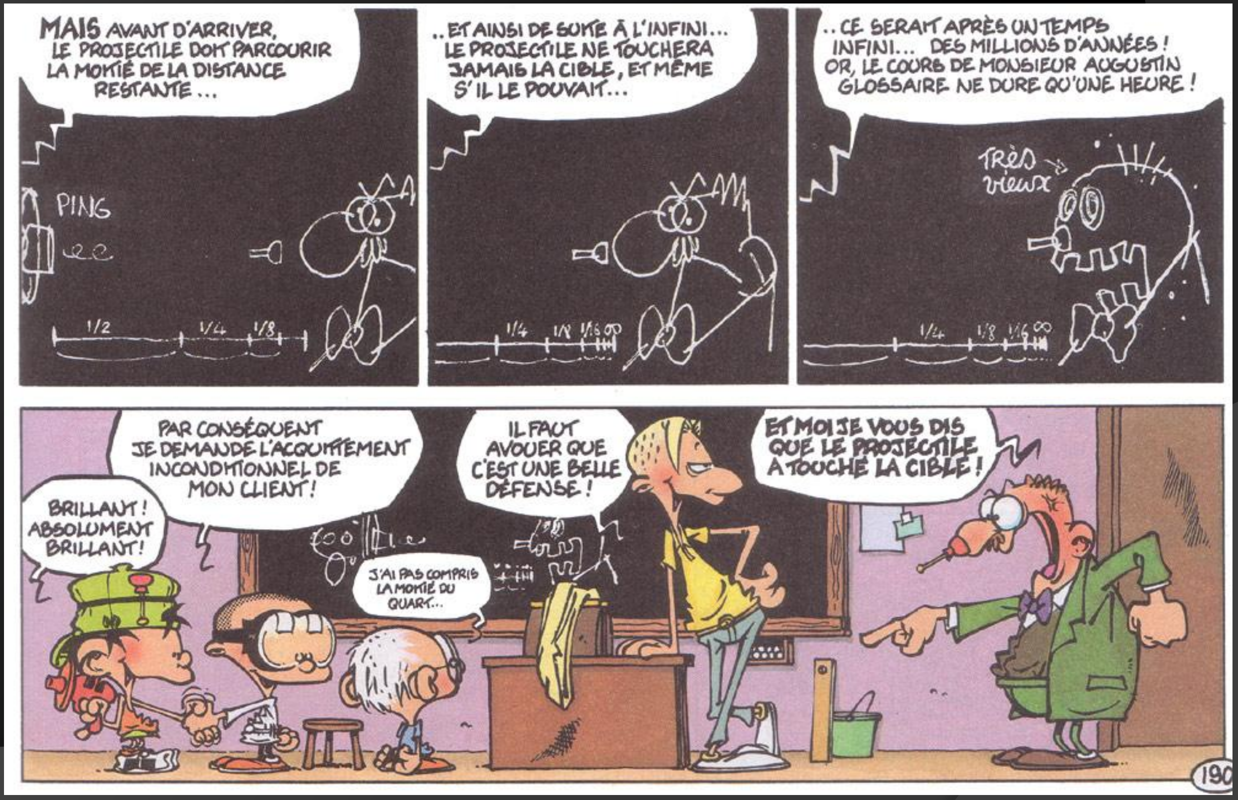
$$d - S_n$$



Kid Paddle vs Zénon d'Elée

- Que vaut la somme 1/2+1/4+1/8+… ¿ Nous allons voir plus loin la formule $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- ce qui permet de calculer $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\Rightarrow S_n=d\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

- Le terme $1/2^n$ devient aussi petit que l'on veut, il devient même nul quand n devient infini.
- Il suffit de considérer que la flèche a atteint le nez lorsque la distance $d-S_n$ devient inférieure à la distance entre deux atomes.
- Soit en prenant d = 1 m, $d-S_n<10^{-9}$, ce qui s'obtient pour $n=30$.



Quelle longueur ?

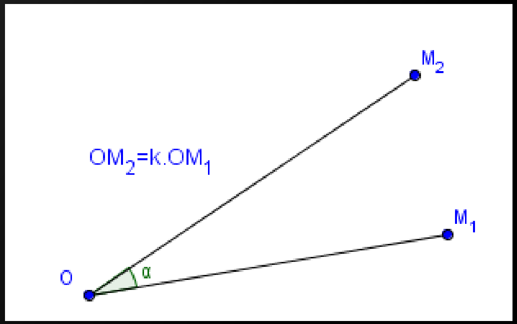
Une spirale logarithmique est définie par la donnée d'un rapport k et d'un angle α.
On part d'un point M_0 puis à chaque étape on tourne autour de O de l'angle α, la distance OM_n étant multipliée par k. Quelle est la longueur de la spirale au bout de 100 étapes ? de N étapes ?

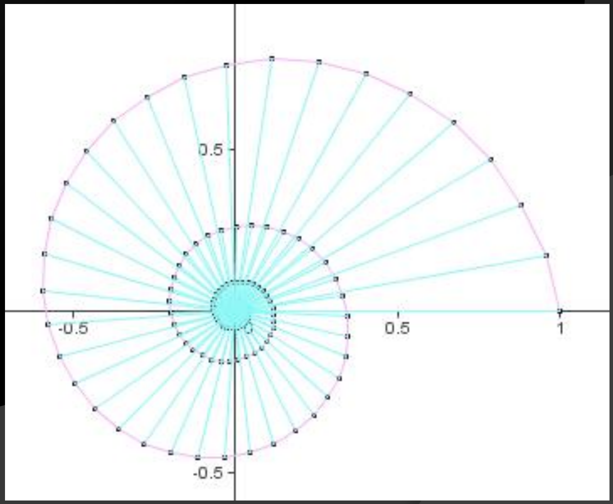
- Les triangles OM_nM_{n+1} sont tous semblables : deux consécutifs ont pour rapport de similitude k.
- La longueur $L_n=M_nM_{n+1}$ est calculée par $L_{n+1}=kL_n$ avec $L_0=M_0M_1$.
- On a donc $L_n=L_0\,k^n$.
- La longueur de la spirale entre M_0 et M_{N+1} est alors la somme $S_N=L_0+L_1+L_2+\ldots+L_{N-1}+L_N$.

- $S_N=L_0+kL_0+k^2L_0+\ldots+k^{N-1}L_0+k^NL_0$
- $S_N=L_0(1+k+k^2+\ldots+k^{N-1}+k^N)$
- $S_N(1-k)=L_0(1+k+k^2+\ldots+k^{N-1}+k^N)-L_0(k+k^2+\ldots+k^{N-1}+k^N+k^{N+1})$
- $S_N(1-k)=L_0(1-k^{N+1})$

$$\boxed{S_N=L_0\frac{1-k^{N+1}}{1-k}}$$

- Lorsque $-1<k<1$, S_N tend vers $L_0/(1-k)$.



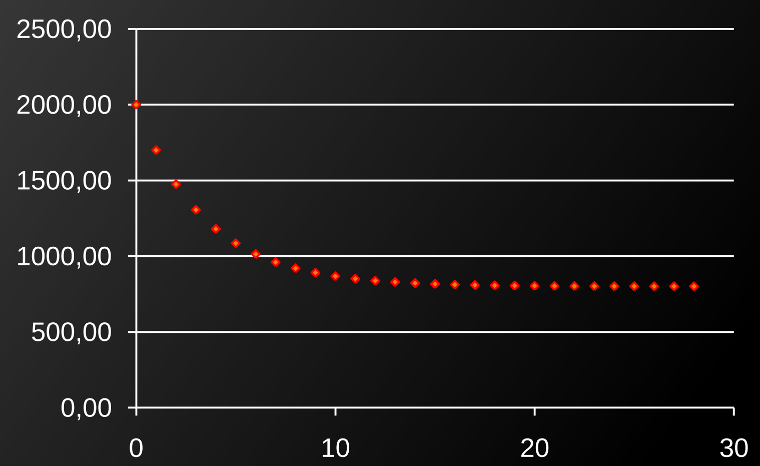


html/spirale_log.html

Suites récurrentes

Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin .»
« Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… »
Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

Numéro	Nombre lettres	
0	2000,00	proportion traitée
1	1700,00	0,25
2	1475,00	nombre en plus par jour
3	1306,25	200
4	1179,69	
5	1084,77	
6	1013,57	
7	960,18	
8	920,14	
9	890,10	
10	867,58	
11	850,68	



excel/gaston.xlsx

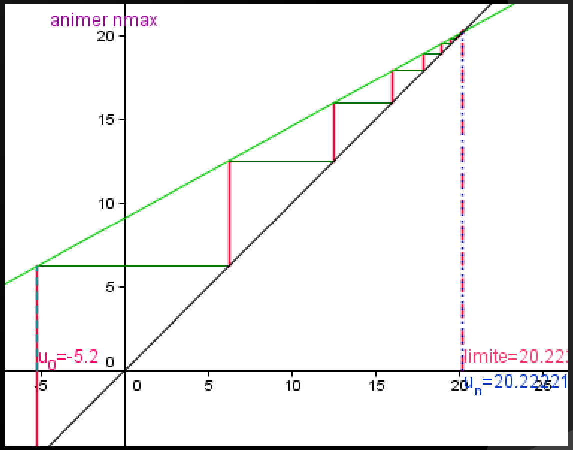
Une solution

- Les suites récurrentes de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$ se visualisent très bien : on trace la courbe de f ainsi que la droite ($y=x$).
- On place le point $(u_0, 0)$ puis son « image » $(u_0, u_1=f(u_0))$ ainsi que le point (u_1, u_1). Il reste à faire l'image de u_1 par f et recommencer.

- Pour les suites de la forme $u_{n+1}=au_n+b$ (u_0 est donné) on a une méthode de résolution assez simple :
- on cherche le point L tel que $L=aL+b$, puis on soustrait les deux lignes, ce qui donne

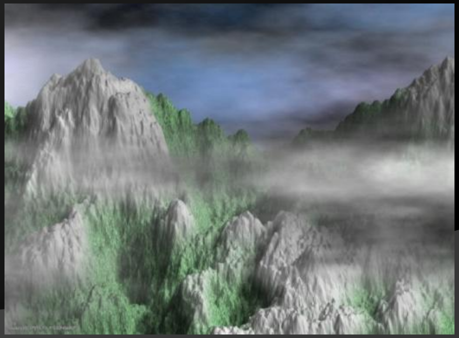
$$u_{n+1}-L=a(u_n-L)$$

- la suite $v_n=u_n-L$ est géométrique de raison a donc $v_n=v_0a^n$, soit $u_n=L+(u_0-L)a^n$.
- Si $-1<a<1$, alors u_n converge vers L.



html/recurrente.html

excel/IFS.xlsx



excel/Fractale_geometrique.xls

Retrouvez le résultat numérique de Gaston !

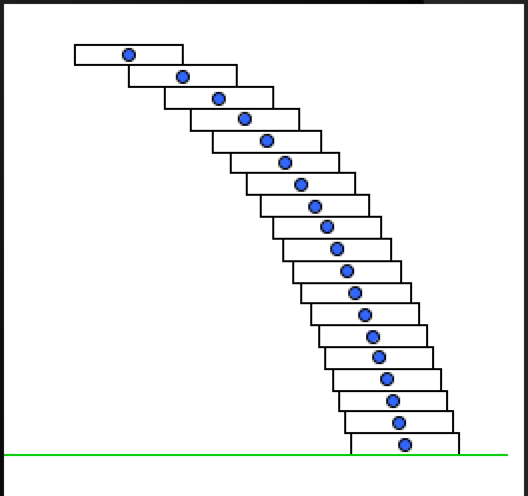
Une seule solution

Eh oui, Gaston a trouvé LA solution !!!

Limites et convergence

- Dans l'exemple précédent on voit les points de la spirale se rapprocher de O : la suite des distances OM_n tend vers 0 quand n devient grand (n tend vers $+\infty$).
- Pour les suites géométriques c'est toujours le cas lorsque $-1<q<1$. Par contre les suites arithmétiques tendent vers $\pm\infty$ suivant le signe de r.

On construit une « tour de briques » de la manière suivante : on colle chaque brique un peu en avant de la précédente mais dépassant simplement de $1/(N-n)$ où N est un entier aussi grand que l'on veut et n est le numéro de l'étage de la brique. Quand est-ce que la « tour » va basculer ?



html/tour_infernale.html

- Prenons l'origine 0 au bord gauche de la brique du bas et 2 sa longueur.
- Le point bleu de la figure est alors à $1, 1-\frac{1}{N-1}, 1-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N-2}, ..., 1-\left[\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+...+\frac{1}{2}\right]$
- Par contre le centre de gravité est à

$$x_1=1, x_2=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{1}{N-1}\right)=1-\frac{1}{2(N-1)}, x_3=\frac{1}{3}\left(2\left[1-\frac{1}{2(N-1)}\right]+1-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N-2}\right)=1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right),$$

$$x_4=\frac{1}{4}\left(3\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{N-1}+\frac{1}{N-2}\right)\right]+1-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N-3}\right)=1-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{N-1}+\frac{2}{N-2}+\frac{1}{N-3}\right),..., x_N=1-\frac{1}{N}\left(\frac{N}{N-1}+\frac{N-1}{N-2}+\frac{N-2}{N-3}+...\frac{3}{2}+\frac{2}{1}\right)$$

- On a alors $\frac{1}{N}\left(\frac{N}{N-1}+\frac{N-1}{N-2}+\frac{N-2}{N-3}+...\frac{3}{2}+\frac{2}{1}\right)=\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N-1}+1+\frac{1}{N-2}+...+1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}+1+1\right)=1+\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-2}+...+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}1$
- Le centre de gravité ne dépassera jamais le bord du socle (l'architecte qui osera ça n'est probablement pas encore né…).

La Série harmonique

- On vient de rencontrer la série (nom donné à la somme des termes d'une suite) harmonique

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

- Pourquoi ce nom ¿ Parce que quand on ajoute 2 termes, on en obtient un troisième en faisant la moyenne harmonique : m est moy. harmonique de p et q si : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{m}$. Par exemple la moy. harmonique de 3 et 5 est 15/4.
- Quelle est sa limite ¿ Avec un ordinateur on calcule et on voit que ça n'évolue pas vite ! Alors convergente ou divergente ¿

n	S_n
1	1
10	2,92
100	5,18
1000	7,48
10000	9,79

- Une solution trouvée par Nicole d'Oresme vers 1350 (mais longtemps oubliée) : on regroupe les termes par paquets de sorte que chaque paquet soit supérieur à 1/2.
  Comme il y a une infinité de paquets, la somme diverge vers $+\infty$.
- On prend comme paquets : 1, 1/2, 1/3+1/4>1/2, 1/5+1/6+1/7+1/8>1/2,… en doublant à chaque fois le nombre de termes.

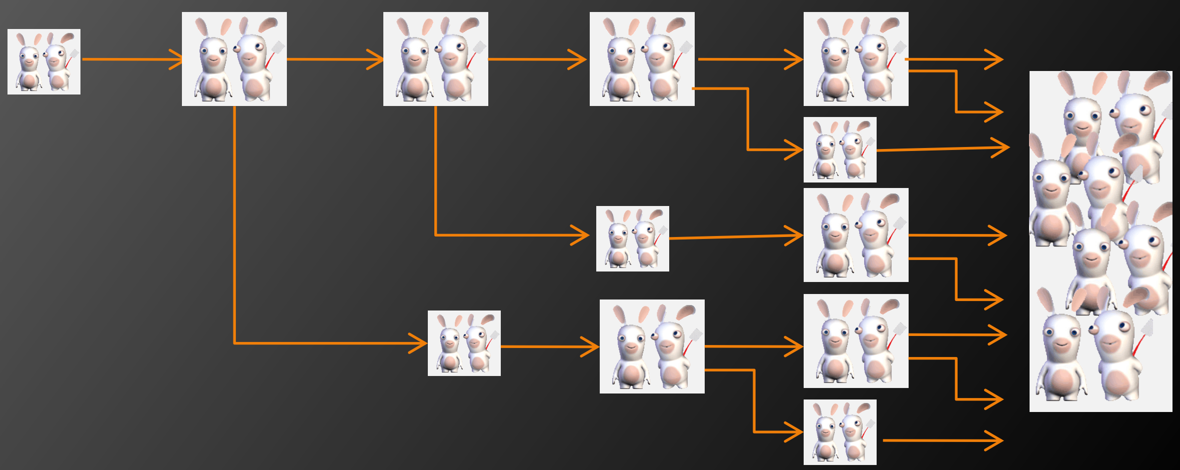
html/gamma.html

- Pour montrer que $\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \ldots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)$ tend vers 0, on peut utiliser la fonction ln : l'aire entre la courbe de $1/x$, la droite $x=1$, la droite $x=N$ et l'axe Ox est $\ln N$ et est encadrée par S_N-1 et S_N+1/N, d'où la conclusion.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{N} \leq \int_1^N \frac{1}{x}dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{N-1} \Rightarrow S_N - 1 \leq \ln N \leq \frac{1}{N} + S_N \Rightarrow \left(\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} S_N\right) - \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \leq \underbrace{\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \ln N}_{0} \leq \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^2} + \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} S_N$$

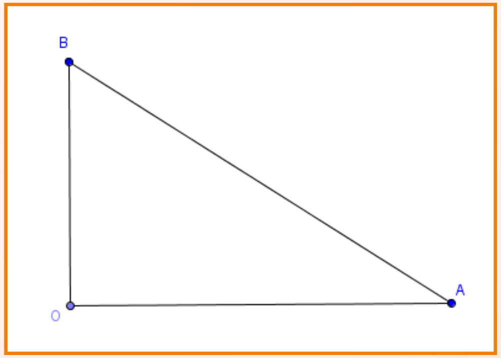
Fibonacci

Leonardo Fibonacci propose en 1202 dans le Liber Abaci le problème des lapins : j'ai un couple de lapins qui se reproduit au bout d'un mois, donnant naissance à un nouveau couple qui se reproduit au bout d'un mois, etc. Quel est le nombre de couples au bout de *n* mois ?

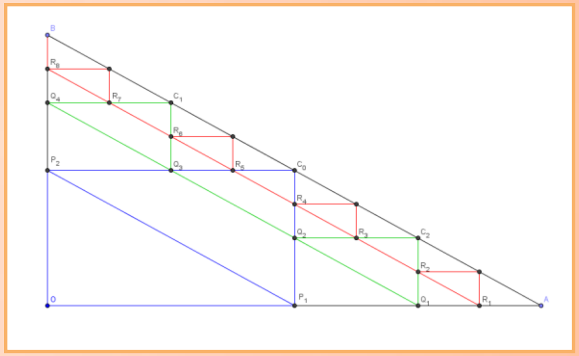


- La suite commence par 1, 1, 2, 3, 5, 8, …
- Il est immédiat que si on appelle F_n le nombre de couples le $n^{\text{ième}}$ mois, on a $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.
- On peut obtenir les valeurs exactes de F_n : voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Fibonacci
- En fait le quotient de deux nombres de Fibonacci tend vers $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Pythagore es-tu là ?

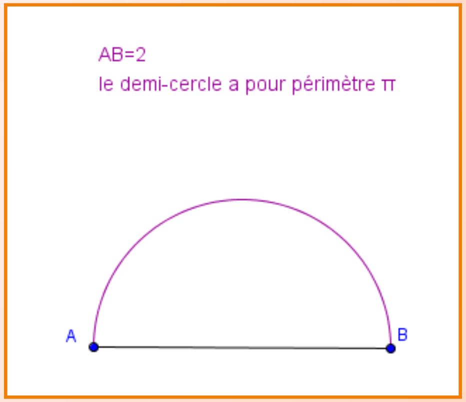


$$OA + OB = AB$$



html/pythagore_faux.html

$$\pi = 2$$



html/pi_egal_2.html

Ce qu'il faut savoir

Tout ce qui suit est valable en 1S ou en TS.

Suites arithmétiques	1er terme u_0, raison a	$u_{n+1}=u_n+a \Rightarrow u_n=u_0+na$ ou $u_n=u_p+(n-p)a$
Divergent toujours	Somme des termes	$S_n=\dfrac{(\text{nbre de termes})(1^\circ\text{terme}+\text{dernier terme})}{2}$
Suites géométriques	1er terme u_0, raison q	$u_{n+1}=qu_n \Rightarrow u_n=u_0q^n$ ou $u_n=u_pq^{n-p}$
Convergent vers 0 pour $-1<q<1$	Somme des termes	$S_n=u_0(1+q+q^2+\ldots+q^n)=u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Sens de variation	(u_n) est strictement croissante (décroissante : <) si	$u_{n+1}>u_n \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ si $u_n>0$
Majorant/Minorant	(u_n) est **majorée** s'il existe M réel tel que $u_n<M$ pour tout n, **minorée** s'il existe m réel tel que que $u_n>m$ pour tout n.	
Convergence	(u_n) converge vers une limite l si on peut trouver une suite v_n dont on est sûr qu'elle converge vers 0 (suites géométriques ou fonctions de n tendant vers 0 à l'infini) et une constante k positive telles que $\lvert u_n-l\rvert\leq k\lvert v_n\rvert$ pour n suffisamment grand (en fait il se peut que la relation ne soit pas vérifiée jusqu'à $n=100$ par exemple, mais si elle l'est après c'est bon).	
	Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge. Si la suite est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et que la fonction f est continue, la limite dans ces cas là est toujours solution de l'équation $f(x)=x$.	
Suites adjacentes	Deux suites u_n et v_n sont adjacentes si elles vérifient les conditions : $\begin{cases} u_n\leq v_n \\ u_n \text{ croissante, } v_n \text{ décroissante} \\ \lim\limits_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0 \end{cases}$ Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.	