Olympiades académiques de mathématiques

http://www.animath.fr/spip.php?article409

1. Exercices communs

1-a : Les nombres digisibles

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux. Par exemple,

24 est digisible car il est divisible par 2 et par 4.

324 est digisible car il est divisible par 3, par 2 et par 4.

32 n'est pas digisible car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre digisible à quatre chiffres.
3. Soit n un entier digisible s'écrivant avec un 5.
   a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit n un entier digisible quelconque.
   a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   b. Si « s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   c. Déterminer le plus grand entier digisible.

Correction

1. Essayer chiffre des dizaines, chiffre des unités : 12, 15 ou encore 24 ou bien 36 …

2. L'idée est d'utiliser le 1 comme chiffre des milliers. 1000 étant divisible par 2, 4, 8 … on cherche à partir des trois chiffres 2, 4, 8. 1248 est divisible par 8 (donc 4 ainsi que 2) convient.

3. a. Le nombre est divisible par 5, son chiffre des unités et 0 ou 5 ; seul 5 est possible.

b. Avec 5 comme chiffre des unités, le nombre est impair, il n'a donc que des diviseur impairs ; tels sont les chiffres de son écriture décimale.

c. Les cinq chiffres impairs peuvent-ils figurer dans l'écriture du nombre ? Si oui, celui-ci s'écrit $xyzt5$ (x, y, z, t étant des chiffres impairs). Cela fait vingt-quatre nombre éventuels ; la somme des chiffres valant 25, aucun n'est divisible par 3.

d. Le nombre s'écrit $xyz5$ (x, y, z étant des chiffres impairs). On cherche le plus grand possible … essayer $x = 9$, etc. Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9735 ne convient pas, 9715 non plus, 9375 pas davantage. 9315 est digisible, c'est le plus grand s'écrivant avec un 5.

4. La somme des neuf chiffres vaut 45.

a. S’il y a le 5, l’écriture du nombre ne comporte pas plus de quatre chiffres. S’il n’y a pas le 5, avec huit chiffres, la somme des chiffres vaut 40 ; il est impossible que le nombre soit divisible par 3.

b. Le nombre s’écrit avec sept chiffres, il n’y a donc pas le 5. Il y a le 9.

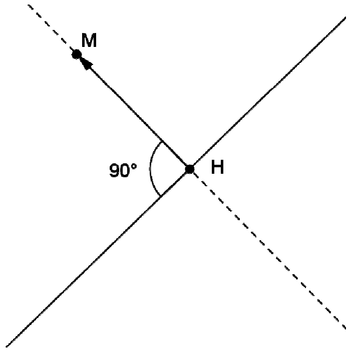
Les huit chiffres éventuels ont une somme valant 40. Quel chiffre ôter pour que cette somme soit un multiple de 9 ? Il s’agit du chiffre 4.

Un nombre digisible s’écrivant avec sept chiffres dont le 9, comporte exclusivement les chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.

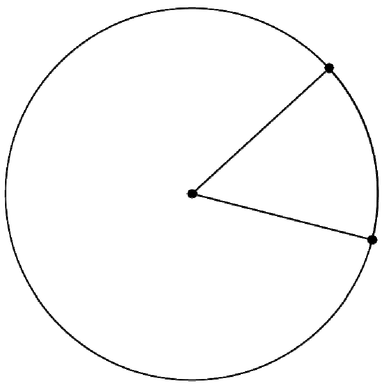
c. Pour la recherche du plus grand digisible, on tente avec le 9 … comme chiffre des centaines de mille …

Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9876321, n’est pas pair ; le plus grand, 9876312, n’est pas divisible par 7, 9867312 est divisible par 1, 2, 3, 7, 8, 9. C’est le plus grand nombre digisible.

1-b : Plus proche



On appelle **distance** entre un point M et une droite (D) la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.



Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (exprimée en degrés), alors l'aire de la portion de disque grisée vaut

$$\frac{\pi\alpha R^2}{360}.$$

Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à un segment [BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).

Partie I

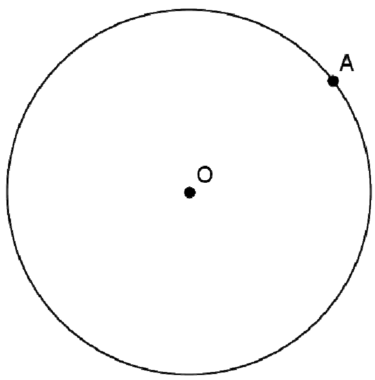
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.

1. Reproduire la figure et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

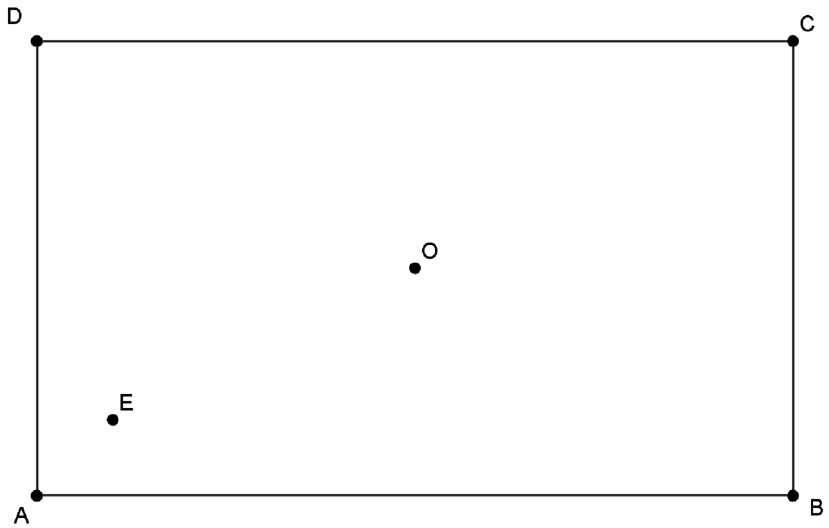


Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC =12 cm, de centre O.

Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).

Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

a. Reproduire le rectangle et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

2. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Correction

Partie I

1. et 2. On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].

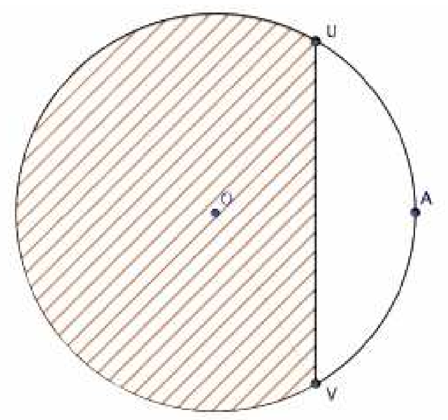
On hachure … noter que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.

3. Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque ?

L'aire du disque (de rayon R) : πR^2 (l'aire d'un secteur d'angle de mesure 360°).

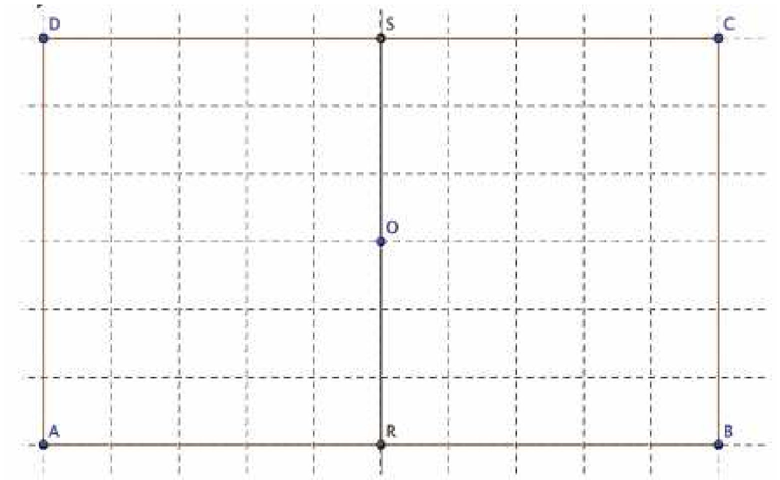
Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente.

L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV ; soit : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.



La probabilité : $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0,85$.

Partie II



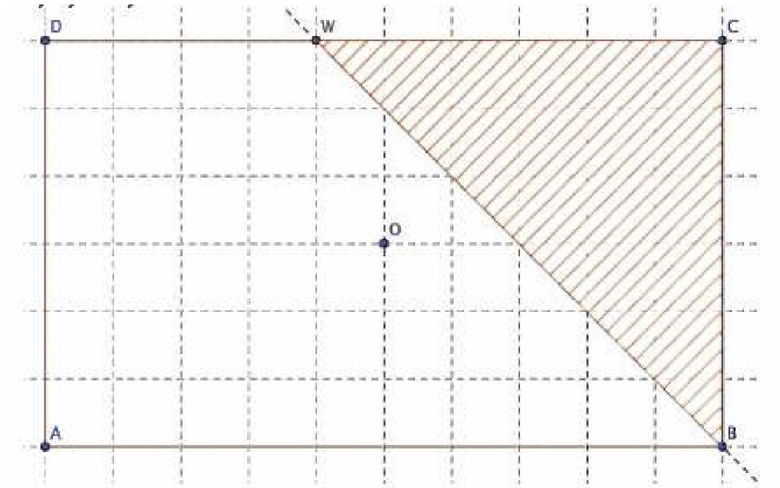
1. La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S.

Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AD].

Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD].

Son aire est la moitié de celle du rectangle.

Probabilité : $\frac{1}{2}$.

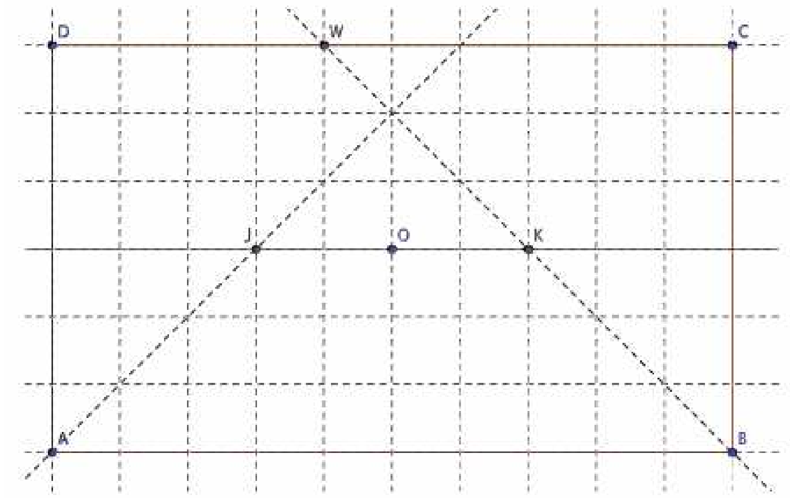


2. a. et b.

La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].

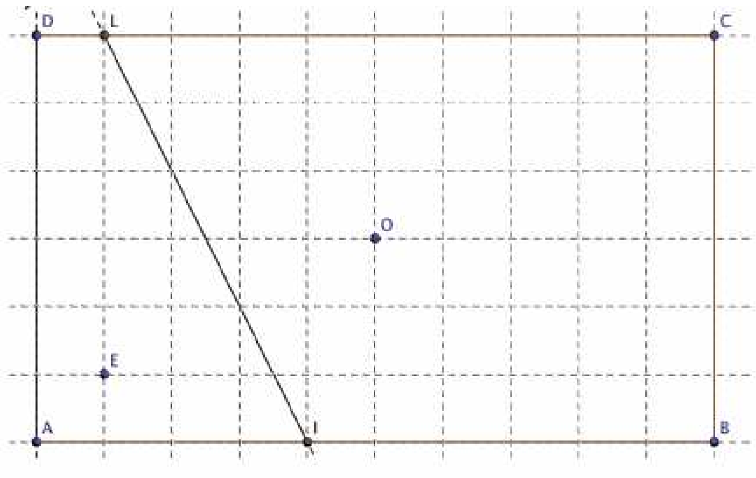
Le triangle BCW (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

Son aire : 72 cm^2. Le rapport de celle-ci à celle du rectangle : 3/10.



3. Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA].

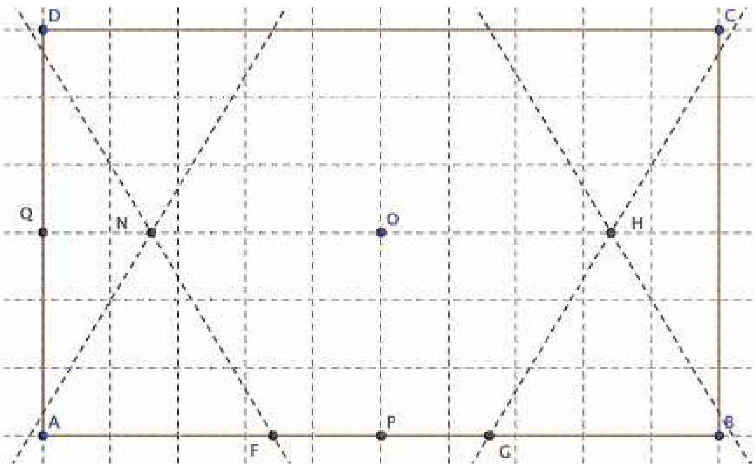
Son aire : 84 cm^2. Probabilité : 7/20.



4. La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD].

Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage sur l'hypoténuse EI ainsi que de même sur OI confirme que le point de [AB] à cette distance de A est équidistant de O et de E.

De même DL = 2. L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O (exception faite du segment [IL]) vaut : 60 cm^2. La probabilité : 3/4.



5. On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.

La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB]. Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N … situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices …).

Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange).

Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]).

Dans cette symétrie centrale : PFNO et NQAF se correspondent.

L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD.

Probabilité : 1/2. Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

2. Amiens+

http://pedagogie.ac-amiens.fr/maths/culture/olympiades/

2-a : Le magicien (non S, STI)

Un magicien présente un jeu non truqué de 21 cartes.

Un spectateur choisit une carte, qu'il mémorise mais ne révèle pas, et remet la carte choisie n'importe où dans le tas de cartes.

Le magicien procède alors à une opération simple, décrite dans l'algorithme suivant :

Il forme trois tas de cartes, dans lesquels sont distribuées les 21 cartes. Chaque tas reçoit donc une carte à tour de rôle, face visible.

Une fois que les trois tas ont été formés, le spectateur désigne le tas contenant sa carte.

Le magicien prend alors un des tas qui ne contiennent pas la carte du spectateur, met le tas désigné au dessus, suivi du troisième tas.

1. Après que cette opération a été effectuée, combien de cartes au minimum sont sous la carte choisie par le spectateur ? Combien au minimum sont au dessus ?

2. Le magicien répète l'opération une seconde fois. Combien de cartes au minimum sont sous la carte choisie par le spectateur ? Combien au minimum sont au dessus ?

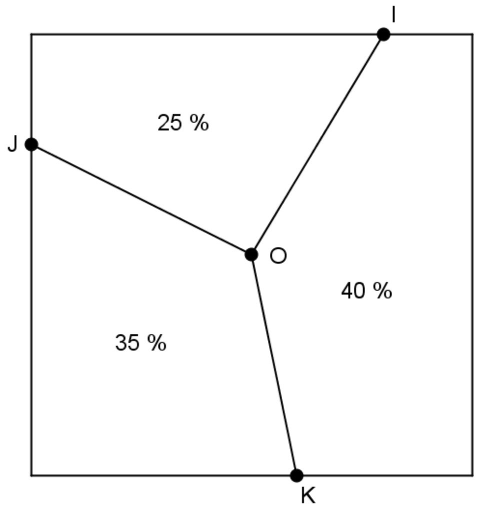
3. L'opération est répétée une troisième et dernière fois. Montrer que la carte choisie par le spectateur ne peut être que dans une seule position dans le tas de cartes, et préciser cette position.

2-b : Un histogramme au carré (non S, STI)

Dans un carré de 10 cm de côté, on veut réaliser un graphique statistique dans lequel les aires des 3 parties doivent être proportionnelles aux fréquences qu'elles représentent (O est le centre du carré).

Le point I est à 2 cm du sommet le plus proche.

Calculer les distances de J et K aux sommets du carré les plus proches.



2-c : Les octogones (S)

On considère des octogones réguliers, de même centre O.

Aux sommes de l'octogone central, on note les huit premiers entiers non nuls.

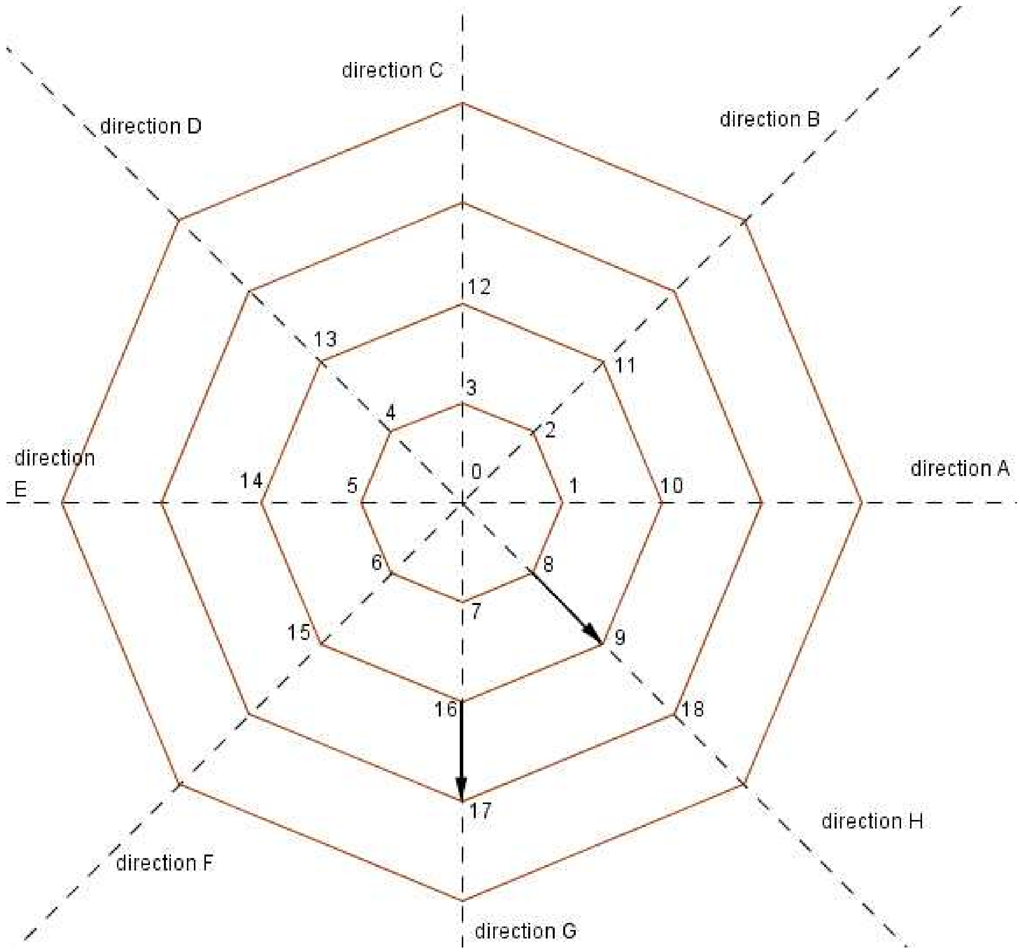
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés ($\frac{\pi}{4}$ radians) autour du point O.

Et ainsi de suite …

On dit que chaque nombre entier a une **direction** (A, B, C, D, E, F, G ou H par rapport à l'origine O).

Par exemple, 1 a pour direction A, 2 a pour direction B …

Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :



1. Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone ? Préciser sa direction.

2. Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone ? Préciser sa direction.

3. On considère le n-ième octogone.

a. Exprimer en fonction de n le premier nombre inscrit sur le $n$ième octogone.

b. On suppose dans cette question que $n = 8k$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \neq 0$.

Quelle est la direction du premier nombre inscrit sur le $n$ième octogone ?

4. Placer sur un octogone, les nombres associés aux sommets du 2012ème octogone (la figure ne sera évidemment plus à l'échelle).

5. Sur quel octogone et dans quelle direction se placera le nombre 806002 ?

2-d : Angle et carré (S)

A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 5 tels que AB = 6 .

Le carré PQRS est inscrit dans le secteur angulaire OAB de sorte que P est sur le rayon [OA], S est sur le rayon [OB], Q et R sont deux points de l'arc de cercle reliant A et B.

1. Faire une figure correspondant à la situation proposée.

2. Calculer l'aire du carré PQRS.

2-e : Moyennes (STI)

a et b sont deux réels non nuls et de même signe.

On définit :

- le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$, qui est la **moyenne arithmétique** de a et b ;
- le nombre $n = \sqrt{ab}$, qui est leur **moyenne géométrique** ;

• le nombre p tel que $\frac{2}{p}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, qui est leur **moyenne harmonique**.

1. On prend $a = 2$ et $b = 8$. Calculer m, n et p puis comparer ces trois moyennes.

2. Même question pour $a = -12$ et $b = -3$.

3. Montrer que $p=\frac{2ab}{a+b}$ puis calculer $m-p$ en fonction de a et b.

4. Montrer que si a et b sont des réels strictement négatifs, alors $m \le p < n$.

5. a. Calculer m^2-n^2 et n^2-p^2 en fonction de a et b.

b. En déduire que si a et b sont des réels strictement positifs, alors $p \le n \le m$.

2-f : Une somme (STI)

Calculer la somme suivante sans utiliser la calculatrice :

$$\left(1^2-2^2-3^2+4^2\right)+\left(5^2-6^2-7^2+8^2\right)+\left(9^2-10^2-11^2+12^2\right)+\ldots+\left(2009^2-2010^2-2011^2+2012^2\right).$$

3. Besançon

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

3-a : Algorithmes

I – Un algorithme de décomposition

Voici un algorithme, applicable à des nombres de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

Étape 1 : Inverser l'ordre des chiffres (par exemple : 275 devient 572).

Étape 2 : Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres.

Étape 3 : Réitérer l'étape 1 sur le nombre obtenu.

Étape 4 : Additionner ces deux derniers nombres.

1. a. Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.

b. Que peut-on conjecturer ?

2. Pour implémenter cet algorithme, l'étape 1, « évidente » lorsqu'on effectue les calculs « à la main », nécessite de dissocier l'entier saisi afin d'en isoler le chiffre des unités, celui des dizaines puis celui des centaines.

Compléter l'algorithme suivant dont le rôle est d'effectuer cette dissociation. Dans cet algorithme a est le chiffre de centaines, b celui des dizaines et c celui des unités du nombre n que l'on souhaite décomposer.

Entrée	n est un entier naturel
Initialisation	Donner à a la valeur 0
	Donner à b la valeur 0
	Donner à c la valeur 0
Traitement	Tant que $n \ge 100$
	Affecter à a la valeur $a + 1$
	Affecter à n la valeur $n - 100$
	Fin Tant que
	Tant que n ………………………
	Affecter à b la valeur ………..
	Affecter à …. la valeur ……….
	Fin Tant que
	Affecter à c la valeur ……………

Sortie | Afficher a
Afficher b
Afficher c

3. On se propose maintenant de démontrer la conjecture établie en 1. b.

Pour cela, on choisit un nombre de trois chiffres que l'on écrit abc où a, b et c sont donc des entiers compris entre 0 et 9 et représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de n.

On peut, sans perdre de généralité, supposer $a < c$.

a. Décomposer abc selon les puissances de 10.

b. Donner le nombre obtenu après l'étape 1 sous sa forme décomposée.

c. Montrer que le nombre obtenu après l'étape 2 peut s'écrire : $(c-a-1)100+910+10-a-c$.

d. Appliquer les étapes 3 et 4 et conclure.

II – L'algorithme de Kaprekar

En mathématiques, l'algorithme de Kaprekar est un algorithme découvert en 1949 par le mathématicien indien D.R. Kaprekar pour les nombres entiers de quatre chiffres, mais qui peut être généralisé à tous les nombres entiers.

Nous l'étudierons ici pour des nombres entiers de trois chiffres, tous ces chiffres étant distincts.

L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à un nombre entier quelconque n un autre nombre $K(n)$ généré de la façon suivante :

Étape 1 : À partir des chiffres qui composent n, former le plus grand nombre possible. On le note G.

Étape 2 : À partir des chiffres qui composent n, former le plus petit nombre possible. On le note P.

Étape 3 : $K(n)$ est alors égal à la différence $G - P$.

Par exemple, partant de 539, on a $G = 953$ et $P = 359$ donc $K(539) = 953 - 359 = 594$.

1. a. Calculer $K(198)$, $K(357)$ et $K(495)$.

b. Écrire un algorithme dont l'entrée est un nombre n à trois chiffres tous distincts et dont la sortie est $K(n)$.

Pour la séparation des chiffres des unités, des dizaines et des centaines, on pourra reprendre l'algorithme de la partie I.

2. Appliquer l'algorithme de Kaprekar en partant du nombre 198 et en itérant autant de fois que nécessaire. Recommencer avec d'autres nombres à trois chiffres tous distincts. Que peut-on conjecturer ¿

3. On se propose de démontrer la conjecture émise à la question 2.

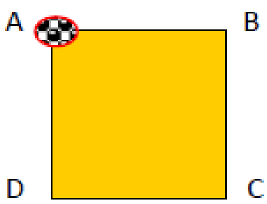
Pour cela, on choisit un entier n composé de trois chiffres et que l'on écrit abc où a, b et c sont donc des entiers tous distincts compris entre 0 et 9 qui représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de n.

a. Expliquer pourquoi on peut, sans perdre de généralité, supposer que $a < b < c$.

b. Montrer que $K(n) = 99(c - a)$.

c. Démontrer la conjecture et préciser le nombre maximum d'itérations nécessaires.

3-b : The walk of the bête à bon dieu



Une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré ABCD en partant du point A.

Elle peut marcher à rebours si elle le souhaite. On appelle déplacement tout trajet de la coccinelle le long d'un côté du carré. Une marche est constituée de déplacements, ainsi, $A \to B \to A \to D \to C$ est une marche de quatre déplacements dont l'arrivée est le point C.

Partie A

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés d'un carré ABCD et l'on considère que tous ses déplacements sont équiprobables.

1. a. La coccinelle peut-elle atteindre le point B en trois déplacements ?

b. Quelles sont les arrivées possibles pour une marche de trois déplacements ?

c. Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre pair de déplacements ?

d. Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre impair de déplacements ?

2. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements.

Éventuellement à l'aide d'un arbre, calculer la probabilité de l'événement A_2 : « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».

3. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de déplacements de la marche	1	2	3	4	5
Probabilité que la coccinelle arrive en A					

Partie B

Dans cette partie, la coccinelle se déplace toujours sur les côtés du carré ABCD en partant du point A mais elle a deux fois plus de chance de se déplacer verticalement qu'horizontalement. Elle peut toujours marcher à rebours si elle le souhaite.

En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en A.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue exactement deux déplacements.

a. Calculer la probabilité de l'événement A_2 : « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».

b. Calculer la probabilité de l'événement C_2 : « la coccinelle arrive en C en effectuant deux déplacements ».

2. a. Calculer la probabilité de l'événement A_4 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement quatre déplacements ».

b. Calculer la probabilité de l'événement A_6 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement six déplacements ».

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

a. On note A_{2n} l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement $2n$ déplacements » et $\mathbb{P}(A_{2n})$ la probabilité de cet événement. Exprimer $\mathbb{P}(A_{2n})$ en fonction de n.

Soit q un nombre réel différent de 1 et n un nombre entier naturel non nul.

On rappelle que : $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

b. On note G_{2n} l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant au maximum $2n$ déplacements ».

Exprimer en fonction de n la probabilité de G_{2n} notée $\mathbb{P}(G_{2n})$.

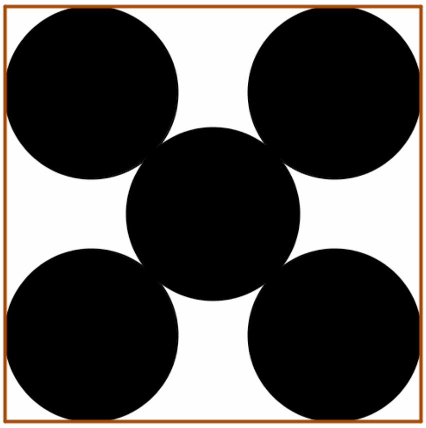
c. Quel est le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(G_{2n}) \geq 0,9999$?

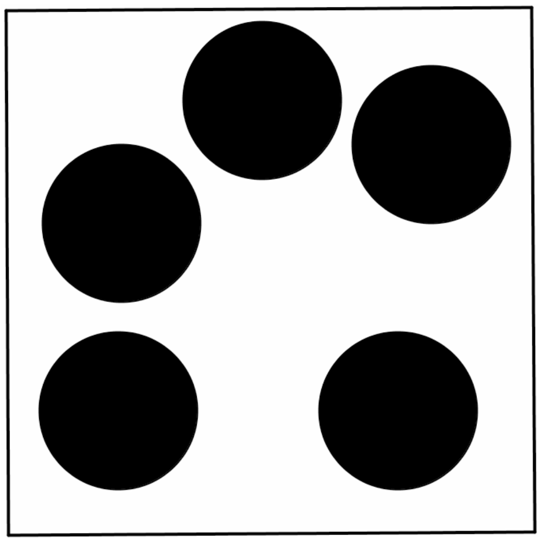
4. Bordeaux+

http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/elv/jeux/olymp/olymp.html

4-a : Cercles tangents

1. Cinq cercles de rayon 1 cm ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin. Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré. Déterminer la longueur d'un côté du carré.





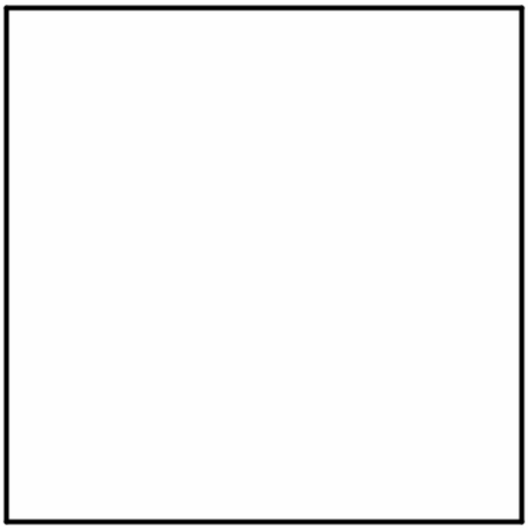


Figure 1

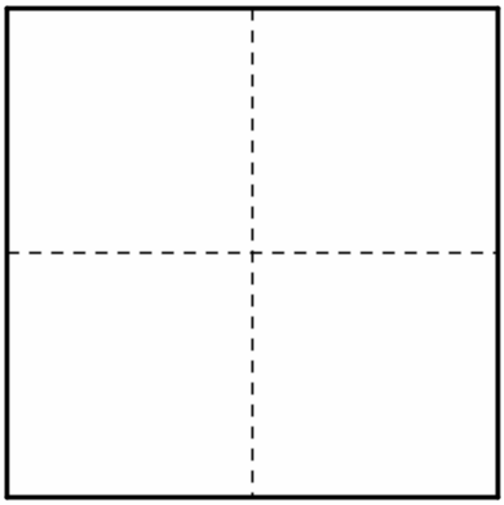
2. On se propose de déterminer la longueur du côté du plus petit carré contenant cinq cercles de rayon 1 cm disjoints ou tangents extérieurement.

a. Déterminer et représenter sur la figure 1 l'ensemble D des points qui peuvent être le centre d'un cercle de rayon 1 cm, ce cercle étant intérieur au carré.

b. Quel est le côté du plus petit carré contenant deux points distants de 2 cm ? Justifier la réponse.

c. Quel est le côté du plus petit carré contenant cinq points distants, deux à deux, d'au moins 2 cm. Justifier la réponse. On pourra s'aider de la figure 2.

d. Conclure



4-b : Pavé droit

1. L, S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets (a, b, c) solutions du système

$$\begin{cases} a+b+c=L \\ ab+ac+bc=S \\ abc=V \end{cases}$$

sont tels que a, b et c sont les solutions de l'équation $X^3 - LX^2 + SX - V = 0$.

2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arêtes est de 20 cm, la somme des aires des six faces est de 14 cm^2 et dont le volume est de 3 cm^3.

3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arêtes est de 20cm, la somme des aires des six faces est de 14 cm^2.

5. Caen+

http://maths.discip.ac-caen.fr/spip.php?rubrique24

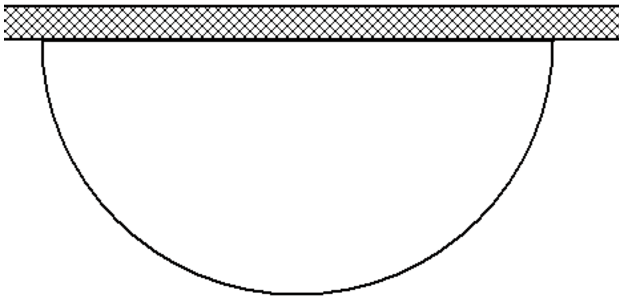
5-a : Le terrain (tous)

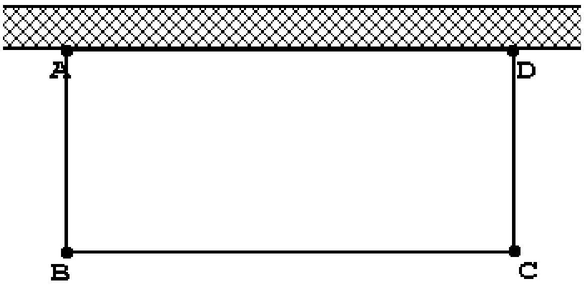
Un fermier dispose d'un grand terrain le long d'un mur et d'un grillage. Le long de ce même mur, il veut réaliser un poulailler sous forme semi-circulaire ou polygonale. Le grillage ne sera pas posé contre le mur.

Partie A. Forme semi-circulaire.

Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous forme de demi-cercle.

Quelle est la longueur minimale du grillage si on veut clôturer une surface de 127 m^2 ? Donner une valeur approchée à 0,1 m près.





Partie B. Forme rectangulaire.

Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous forme rectangulaire.

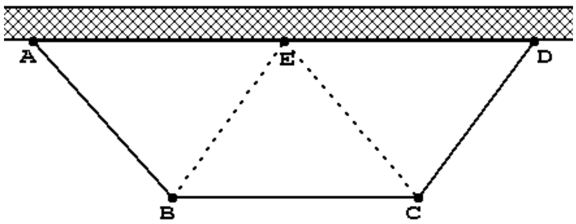
1. Le grillage est long de 108 m. Comment disposer ce grillage pour que l'aire du poulailler soit la plus grande possible ?

2. Le fermier veut clôturer une surface de 288 m^2. Quelle est la longueur minimale du grillage pour réaliser ce poulailler ?

Partie C. Forme de trapèze.

Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous la forme d'un trapèze composé de trois triangles équilatéraux.

Quelle est l'aire du poulailler sachant que le grillage a une longueur de 120 m (arrondir le résultat final au m^2) ?

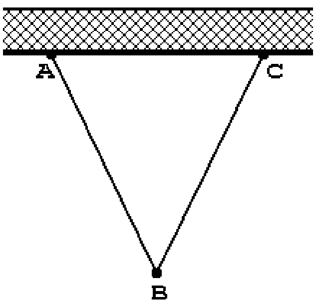


Partie D. Forme de triangle isocèle.

Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous la forme d'un triangle isocèle de sommet B.

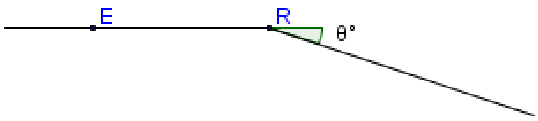
Quelle est l'aire maximale du poulailler sachant que le grillage a une longueur de 88 m ?

(On pourra utiliser l'angle au sommet et le fait que $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$)



5-b : Père et Fille (S)

Pierre et sa fille Éloïse se promènent sur une route horizontale. En un point R, cette route descend



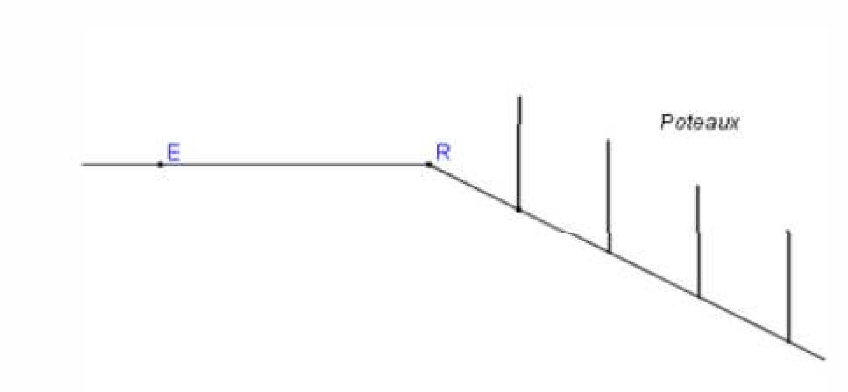
faisant un angle θ de 5° avec l'horizontale (voir figure).

Éloïse, dont les yeux sont à 1,6 mètre du sol, s'arrête en un point E, à 24 mètres du point R.

Son père continuant à marcher, passe devant le point R puis s'engage dans la partie en pente de la route.

1. Quand il se trouve à 86 mètres de R, il disparaît des yeux de sa fille. Déterminer la hauteur de Pierre.

2. Dans la partie en pente de la route, des poteaux d'une hauteur de 6,5 mètres sont plantés verticalement tous les 28 mètres, comme sur le schéma ci-dessous.

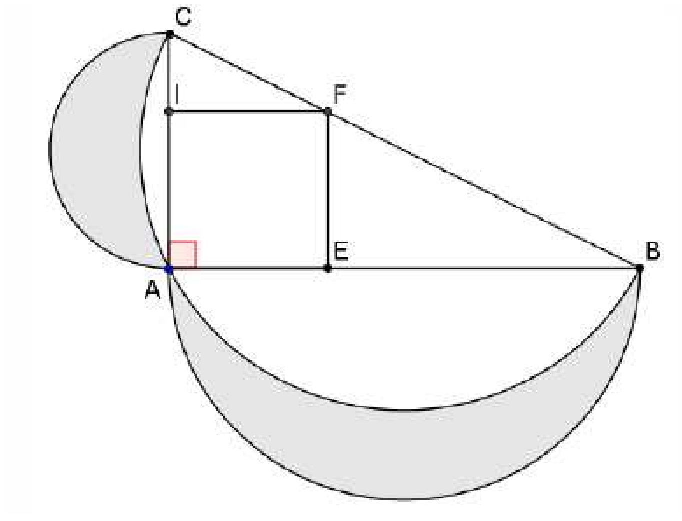


Le 1er poteau se situe à 28 mètres du point R. On admet que les poteaux ne peuvent se masquer les uns des autres. Combien Éloïse peut-elle voir de poteaux de l'endroit où elle se trouve ?

3. Quelle est, en réalité, la mesure de l'angle θ, sachant qu'Éloïse ne voit que 5 poteaux ?

On pourra utiliser la formule $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$. On donnera une valeur approchée de θ à 10^{-2} près.

5-c : Le logo (autres que S)



Une association souhaite créer un logo.

Ce logo a été conçu à partir de la construction ci-contre :

- ABC est un triangle rectangle en A,
- on pose AC = x, AB = y et BC = z,
- on a tracé les demi-cercles de diamètres [AB], [AC], [BC] et le carré AEFI tel que E appartient à [AB), F appartient à [BC) et I appartient à [AC).

Les 3 questions sont indépendantes.

1. a. Calculer la longueur du côté du carré AEFI en fonction de x et y.

b. Que peut-on dire du point I si le triangle ABC est isocèle ? (justifier)

c. On suppose $y = 4$. L'aire du carré AEFI peut-elle être égale à 9 ? (justifier)

2. Soit K le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On pose AK = h.

a. Justifier que $(x + y)^2 = z^2 + 2zh$.

b. Exprimer de même $(x - y)^2$ en fonction de z et de h. Montrer que h est inférieur à la moitié de z.

c. Est-il possible que $z = 10$ et $h = 4,8$? Si oui, déterminer les valeurs de x et de y.

3. Comparer l'aire du triangle ABC à l'aire de la surface grisée.

6. Clermont Ferrand+

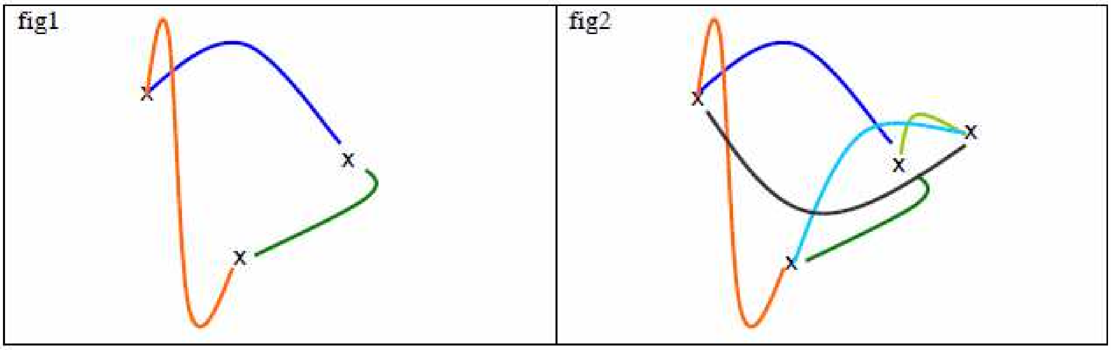
http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/sampleolymp1.php

6-a : De toutes les couleurs (tous)

Sur une toile blanche, un peintre place n points deux à deux distincts. (On suppose que $n \neq 2$). Elle relie alors les deux points de toute paire de points distincts par une ligne de couleur.

Toutes les couleurs utilisées doivent être deux à deux différentes.

Ainsi pour une œuvre réalisée en partant de trois points, trois couleurs sont nécessaires (fig. 1), tandis que pour une œuvre réalisée en partant de quatre points, six couleurs sont nécessaires (fig. 2).



1. a. Dessiner une œuvre possible en partant de cinq points.

b. Combien de couleurs sont nécessaires à sa réalisation ?

c. Combien de couleurs sont nécessaires à la réalisation d'une œuvre en partant de huit points ?

2. Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

Proposition n°1 : Il existe au moins un entier n supérieur ou égal à 2 pour lequel le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre soit égal au double du nombre initial n de points.

Proposition n°2 : Quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre est un multiple du nombre initial n de points.

Proposition n°3 : Il existe au moins un entier n supérieur ou égal à 2 pour lequel le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre soit égal au triple du nombre initial n de points.

3. a. Conjecturer une formule donnant le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre en fonction du nombre initial de points. La démontrer.

b. On considère l'algorithme ci-dessous :

k est un entier naturel non nul
Affecter à n la valeur 2
Affecter à c la valeur 1
Tant que $c < k \times n$
Affecter à n la valeur $n+1$
Affecter à c la valeur $\dfrac{n(n-1)}{2}$
Afficher n et c

Faire fonctionner l'algorithme pour $k = 3$. Interpréter le résultat obtenu.

Est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

c. Déterminer pour quelles valeurs du nombre initial de points, le nombre de couleurs nécessaires est un multiple de celui-ci.

4. « Le chiffre des unités du nombre de couleurs utilisées pour une œuvre ne peut être que 0, 1, 3, 5, 6 ou 8 ». Que penser de cette affirmation ?

5. Pour peindre un triptyque, c'est à dire trois tableaux successifs, sans jamais utiliser deux fois la même couleur, le peintre a eu besoin d'une palette de 184 couleurs. Sans tenir compte de l'ordre des tableaux, combien de points figuraient sur chacun ?

6-b : Naissance de triplets (arithmétiques), (S)

Trois entiers naturels distincts a, b, c **rangés par ordre strictement croissant**, $a < b < c$, sont en **progression arithmétique** si $c - b = b - a$.

On dit alors que (a, b, c) est un **triplet arithmétique.**

1. Compléter les triplets arithmétiques suivants :

a. (57, 101, . . .) ;

b. (57, . . . , 101) ;

c. (. . . , 57, 101).

2. a. Peut-on trouver un triplet arithmétique (a, b, c) dont la somme vaut 2012 ?

b. Combien y-a-t-il de triplets arithmétiques (a, b, c) de somme 2013 ?

3. On prend au hasard trois nombres a, b, c dans $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ avec $a < b < c$. Quelle est la probabilité que (a, b, c) soit un triplet arithmétique ?

4. On rappelle qu'un entier naturel p est **premier** si $p > 0$ et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

a. Quels sont les cinq plus petits nombres premiers ?

b. Donner un triplet arithmétique (a, b, c) constitué uniquement de nombres premiers. Ce triplet est-il celui pour lequel la somme $a + b + c$ est minimale ? On demande de justifier la réponse.

Sinon, trouver les trois nombres premiers $a < b < c$ en progression arithmétique et de somme minimale.

c. Peut-on trouver un triplet arithmétique (a, b, c) constitué uniquement de nombres premiers et dont la somme $a + b + c$ vaut 366 ?

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On se donne une liste $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, d'entiers naturels **rangés par ordre strictement croissant**. On veut savoir si trois de ses termes **consécutifs** forment un triplet arithmétique.

a. Dans cette question uniquement, la liste est $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 27, 32, 39, 45\}$. Contient-elle un triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs ?

b. On revient au cas général d'une liste $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, d'entiers rangés par ordre strictement croissant. Écrire un algorithme qui affiche, s'il existe, le premier triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs.

c. Avec la calculatrice, programmer puis tester cet algorithme sur la liste $\{a_1, a_2, \ldots, a_{20}\}$ où, pour $1 \leq k \leq 20$,

$$a_k = -k^3 + 36k^2 + 9k .$$

On ne demande pas de vérifier que cette liste est formée d'entiers naturels rangés par ordre strictement croissant.

6-c : Sudomaths ! (autres que S)

Voici une grille composée de 9×9 cases : certaines comportent déjà un chiffre compris entre 1 à 9.

3	8			9	7		b	e
7			5			d		
9				3	4			
				4	2	f	a	
	7						c	
	9	2	7	8				
			1	5				6
		9			8			5
5	4		3	2			7	9

1. Six cases comportent des lettres notées a, b, c, d, e et f. Ces lettres représentent six chiffres inconnus, deux à deux distincts, compris entre 1 et 9.

Déterminer a, b, c, d, e et f à partir des définitions ci-dessous :

* a est le nombre de sommets d'un cube ;

* b est le plus grand diviseur commun à 2012 et 201 ;

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

> Lire un nombre entier strictement positif N
> Si N < 5 alors A prend la valeur $3 \times N$ Sinon A prend la valeur $3 \times N - 12$
> Afficher A

* c est le nombre affiché lorsque le nombre entré est 2 ;

* d est le nombre affiché lorsque le nombre entré est 5 ;

* e est l'un des nombres qu'il faut entrer pour obtenir 12 ;

* f est le nombre qu'il faut entrer pour obtenir 15.

2. Recopier la grille en remplaçant les six lettres par les valeurs trouvées à la question 1.

3. Il s'agit maintenant de compléter toutes les cases de la grille à l'aide de chiffres compris entre 1 et 9 en utilisant la règle suivante :

Chaque chiffre de 1 à 9 doit figurer une et une seule fois sur chaque ligne, chaque colonne et chaque région : les régions sont les 9 carrés de 3×3 cases délimités par des traits gras.

7. Corse +

http://www.ac-corse.fr/math/Olympiades-2010_a83.html

7-a : Les nombres « Corses »

On appelle « grille » du plan l'ensemble des points, sommets des carrés d'un quadrillage de 1 cm de côté.

La figure 1 représente de façon simplifiée la forme du tour de la Corse, à l'aide de trois segments dont les extrémités sont des points de la grille.

La même « forme » c'est à dire avec des segments parallèles à ceux ci , peut être obtenue avec davantage de points de la grille comme le montre la figure 2.

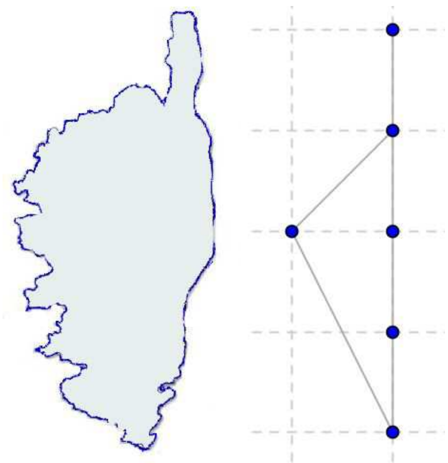


figure 1

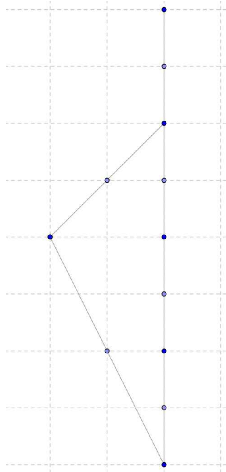
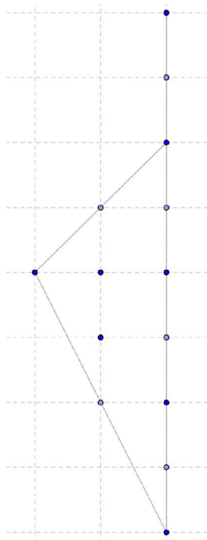


figure 2



1. Le nombre de points de la grille situés sur ces segment est un nombre entier naturel appelé nombre « *tour de Corse* » . On note T_1, T_2, …, T_n, … les nombres « *tour de Corse* » ordonnés en ordre croissant. Ainsi $T_1=6$ et $T_2= 12$.

a. Déterminer T_3 et T_4.

b. Calculer T_{100} et déterminer la longueur en centimètres de la ligne brisée représentant la Corse en passant par ces points.

2. Le nombre de points de la grille situés sur le bord ou à l'intérieur de la représentation de la Corse est appelé nombre « *Corse* ». On note C_1, C_2, …, C_n, … les nombres « *Corses* » ordonnés en ordre croissant.

Ainsi $C_1 = 6$ et $C_2 = 14$.

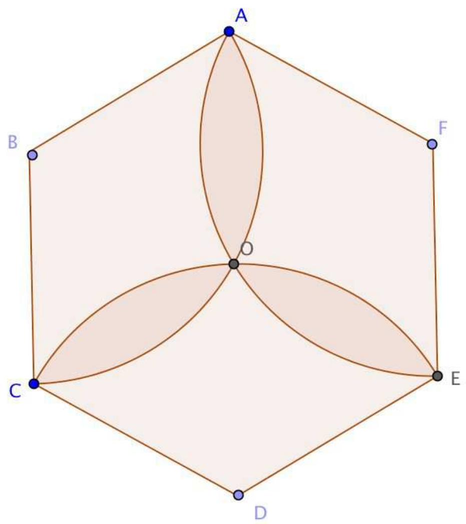
a. Déterminer C_3 et C_4.

b. Déterminer le nombre « *Corse* » le plus proche de 2012.

7-b : Modélisation d'une hélice d'avion à trois pales.

Le but de cet exercice est de modéliser et calculer l'aire des pales d'une hélice dont un exemple est représenté ci contre.

Pour simplifier on ne considèrera que des surfaces planes.



1. Pour cela on considère un hexagone régulier, c'est à dire un polygone ayant six côtés, ayant tous la même longueur et dont les sommets sont sur un même cercle de centre O.

ABCDEF est un hexagone régulier de côté R cm.

On considère les cercles (C) de centre *B*, (C') de centre *D*, (C'') de centre *F*, de rayons R cm.

a. Démontrer que les trois cercles passent par le point O.

b. Déterminer en fonction de R, l'aire de la portion de plan limitée par les arcs de ces

cercles d'extrémités *A* et *O*, représentant une pale de l'hélice.

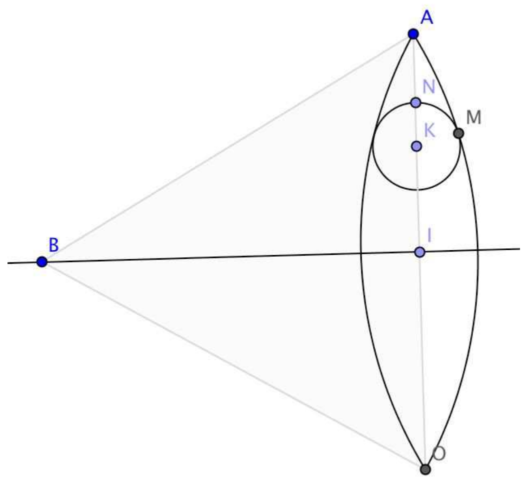
2. On veut améliorer le modèle de la forme de chaque pale, en « arrondissant » l'extrémité .

On considère donc un cercle (Γ) dont le centre *K* est situé sur le segment $[OA]$, à une distance AK=R/10 de *A*, et tangent en un point *M* au cercle (C) de centre *B* et de rayon R.

a. Déterminer en fonction de R, le rayon *r* du cercle (Γ).

b. Sachant que la longueur *ON* de la pale obtenue est 1 mètre, déterminer sa largeur calculée au niveau du point I, milieu du segment $[OA]$.

c. Déterminer dans ce cas une valeur approchée de l'aire de la pale à 1 cm^2 près par défaut.



8. Créteil+

http://maths.ac-creteil.fr/spip/spip.php?article463

8-a : Taylor (S)

On considère le programme suivant, nommé TAYLOR (version 2.012) :

Début TAYLOR
Variables du type nombre : a, b, c, d, t, x
Variables du type fonction : f, f_1, f_2, p
Saisir a , b , c , d , t
$f_1 :=$ Dérivée de f

$f_2 :=$ Dérivée de f_1

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(x) := f(t) + (x-t)f_1(t) + \frac{1}{2}(x-t)^2 f_2(t)$

Afficher $f_2(t)$

Afficher $p(x)$

Fin TAYLOR

1. On exécute TAYLOR pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 0,0, 0)$. Qu'obtient-on en sortie ?

Même question avec $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 1,0, 1)$.

Lorsque $f_2(t) \neq 0$, nous dirons que la représentation graphique de la fonction p est la « parabole de Taylor » de f au point d'abscisse t ; on la notera (P_t).

2. On exécute TAYLOR pour $(a, b, c, d, t) = (1, 1, 1,1, 0)$.

Sur la figure 1, ci-dessous, on a tracé la courbe (C) représentant la fonction f.

a. Vérifier que l'on obtient $f_2(0) = 2$ et $p(x) = x^2 + x + 1$.

b. Tracer (P_0) la « parabole de Taylor » de f au point d'abscisse 0.

Quelle conjecture peut-on faire sur la position relative de (C) et (P_0) ?

c. Étudier la position relative de (C) et (P_0).

3. On exécute TAYLOR pour (a, b, c, d, t). On obtient : $f_2(t) = 6at + 2b$ et

$$p(x) = at^3 + bt^2 + ct + d + \left(3at^2 + 2bt + c\right)(x-t) + \frac{(6at + 2b)}{2}(x-t)^2 .$$

Un logiciel de calcul formel nous donne alors l'écran ci-dessous :

1	f(x) := a*x^3+b*x^2+c*x +d
	$x \rightarrow a*x^3 + b*x^2 + c*x + d$
2	p(x) := a*t^3+b*t^2+c*t +d+(3*a*t^2+2*b*t+c)*(x-t)+(6*a*t+2*b)/2*(x-t)^2
	$x \rightarrow a*t^3 + b*t^2 + c*t + d + ((3*a)*.t^2 + (2*b)*t + c)*(x-t) + \left(\frac{(6*a)*t+2*b}{2}\right)*(x-t)^2$
3	factor(f(x) – p(x))
	$(x-t)^3*a$

a. Tester le résultat affiché par le logiciel pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 1,0, 1)$.

b. Pour t quelconque, étudier la position relative de (C) et (P_t).

c. Sur la figure 2, on a tracé la courbe (C) représentative d'une fonction f et trois paraboles (Γ_0), (Γ_1), (Γ_2) tangentes a (C) aux points d'abscisses respectives 0, 1 et 2.

Quelles peuvent être parmi ces trois courbes, les « paraboles de Taylor » associées a f ? Justifier.

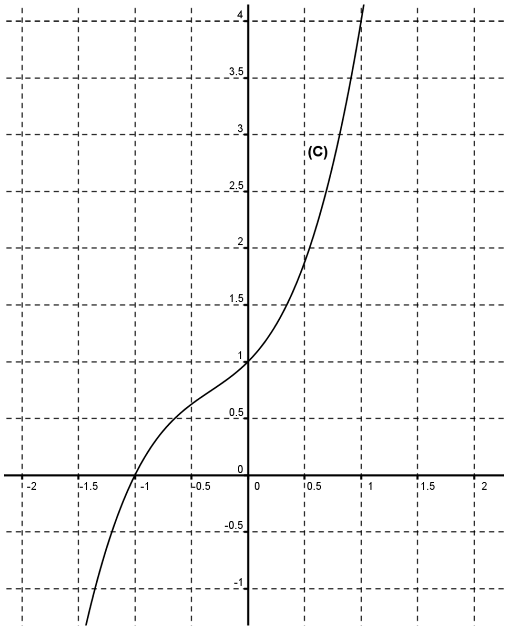


figure 1

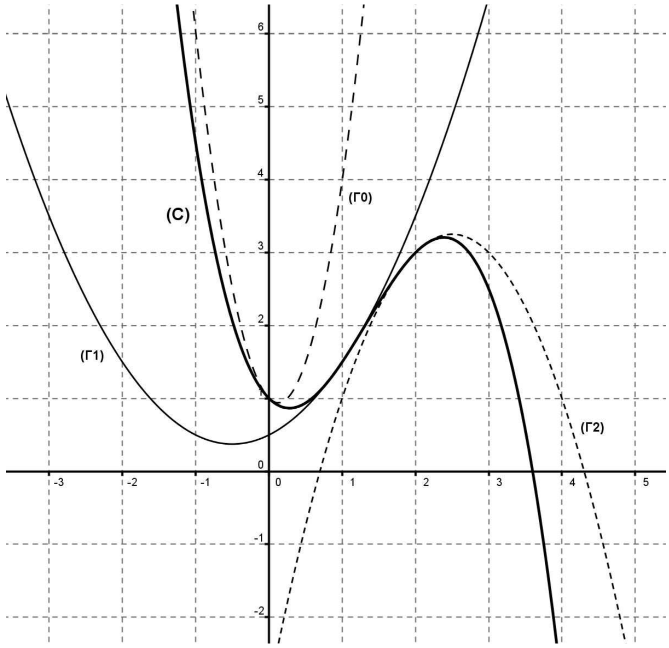


figure 2

8-b : Le peintre (tous)

L'artiste Nombredor de Clichy-sous-Bois souhaite peindre un tableau représentant une parabole et un triangle rectangle isocèle « porté » par cette parabole.

Pour cela, il envisage l'étude suivante : il munit le plan d'un repère orthonormé puis il considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$ et le point A de coordonnées (0 ; 1).

Nous vous proposons de l'aider a déterminer toutes les positions des deux points M et M' sur la parabole tels que le triangle AMM' soit rectangle et isocèle en A.

(Les questions S s'arrêtent ici…)

1. On note a et b les abscisses respectives de M et M' ; expliquer pourquoi on a : $M\left(a\,;a^2\right)$ et $M'\left(b\,;b^2\right)$.

2. a. Montrer en utilisant le théorème de Pythagore, que la phrase : « AMM' *est rectangle en* A » peut se traduire par l'égalité : $ab+\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)=0$.

b. Traduire par une égalité la phrase : « AMM' *est isocèle en* A ».

3. À l'aide des réponses apportées aux questions précédentes, déterminer toutes les positions des deux points M et M' sur la parabole telles que le triangle AMM' soit rectangle et isocèle en A.

8-c : Parabole et tangente (non S)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}x^2-2x+5$. On note (C) sa représentation graphique.

1. a. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. Soit a un réel non nul, on appelle $\left(T_a\right)$ la tangente à (C) au point d'abscisse a.

Montrer que $\left(T_a\right)$ et (T) se coupent en un point I dont on déterminera l'abscisse en fonction de a.

c. Déduire de la question b. un procédé simple de construction de la tangente $\left(T_a\right)$ lorsque a est donné.

d. Sur la figure 1 on a tracé (C) et (T). Construire sans utiliser le calcul de la dérivée, et avec précision, les tangentes aux points d'abscisses respectives 4, 6 et 7.

2. On définit la « parabole dérivée » (P) de la parabole (C) comme l'ensemble des points de cordonnées $\left(f'(x);f(x)\right)$ où x décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

a. Calculer $f'(x)$, puis montrer que $x = 2f'(x)+4$.

b. Montrer que la « parabole dérivée » (P) de (C) a pour équation : $y = x^2 + 1$.

c. Sur la figure 2 on a tracé (C) et (P). Construire sans utiliser le calcul de la dérivée, et avec précision, les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives 2, 4 et 6.

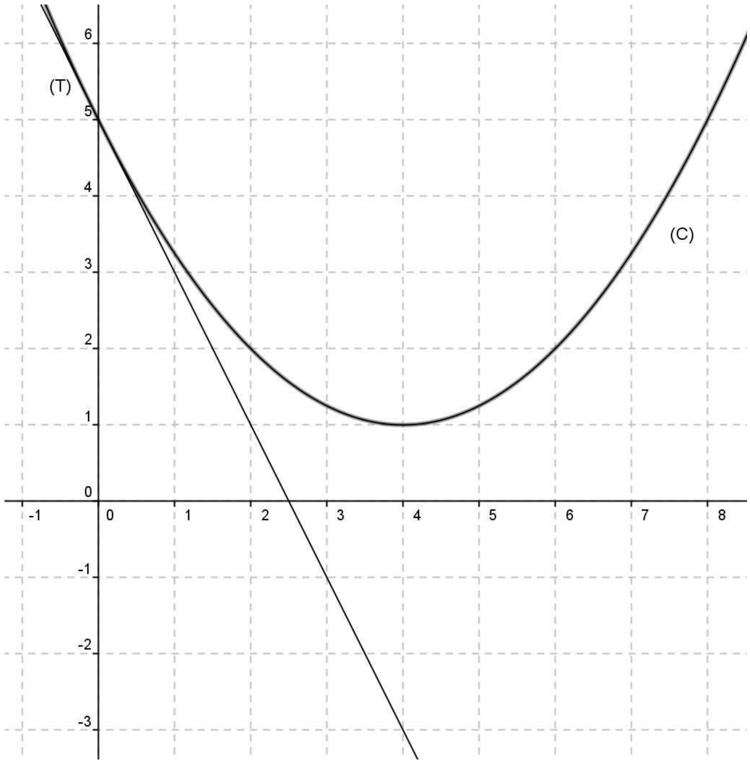


figure 1

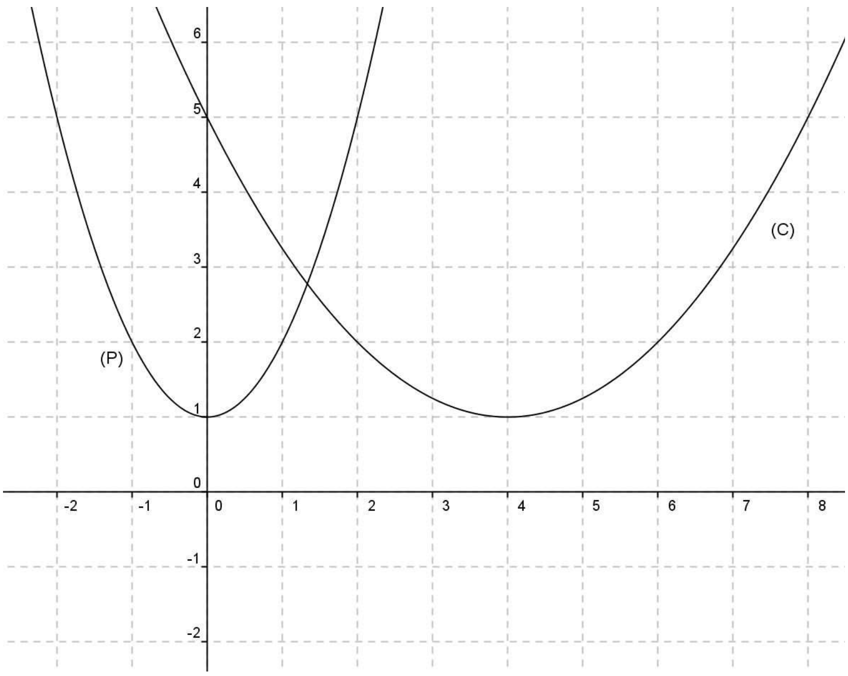


figure 2

9. Dijon+

http://mathematiques.ac-dijon.fr/

9-a : Le tour de magie (tous)

On se propose d'étudier le tour d'illusionniste suivant.

Le magicien demande à un spectateur de choisir un nombre d'au moins trois chiffres et de lui donner le reste de la division euclidienne par 9 de ce nombre. Il lui demande ensuite d'éliminer secrètement un des chiffres (non nul) du nombre choisi, de diviser le nombre obtenu par 9 et de lui communiquer le reste.

Le magicien annonce alors le chiffre qui a été supprimé.

Le magicien utilise l'algorithme suivant :

- si les deux restes sont égaux, le chiffre supprimé est le 9 ;
- si le second reste est inférieur au premier, le chiffre supprimé est la différence des deux restes ;
- sinon, le chiffre supprimé est la somme du premier reste et de 9, à laquelle on retranche le second reste.

1. Émile choisit le nombre 2012. Il décide de supprimer le 1.

Décrire le déroulement du tour de magie dans ce cas en détaillant les calculs.

2. Émile choisit un nombre à quatre chiffres dont le reste de sa division par 9 est 6 :

   - lorsqu'il supprime le chiffre des milliers, il obtient 4 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des centaines, il obtient 1 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des dizaines, il obtient 6 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des unités, il obtient 7 comme second reste.

Quel est le nombre choisi par Émile ?

3. Pourquoi le magicien demande-t-il au spectateur de ne pas supprimer un zéro dans le nombre qu'il a choisi ? On pourra illustrer la réponse à l'aide d'un exemple.

4. Démontrer, pour un nombre à trois chiffres, l'affirmation suivante : « Lorsque l'on divise un nombre par 9, le reste obtenu est le même que lorsque l'on divise la somme des chiffres de ce nombre par 9. »

On admet désormais que ce résultat reste valable pour tout nombre entier.

5. Démontrer que pour un nombre de trois chiffres, l'algorithme du magicien renvoie toujours le bon résultat.

9-b : Drôle de distance (S)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on trace toutes les droites d'équation $x = m$ et $y = n$ pour tous les entiers relatifs m et n, et on considère le réseau formé de tous leurs points d'intersection. Ce réseau est donc constitué de tous les points du plan ayant des coordonnées entières.

On définit la distance entre deux points A et B du réseau comme la plus courte distance reliant ces deux points, si l'on suit les lignes tracées. On la note $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

On considère les points O(0, 0), A(8, 0), B(3, 3), C(2, –4).

1. Quelques généralités

a. Vérifier que $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 8$ puis calculer les autres distances mutuelles entre les points O, A, B, C.

b. Si $\mathrm{M}(x, y)$ et $\mathrm{N}(x', y')$ sont deux points du réseau, exprimer $d(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ en fonction de x, x', y, y'.

En déduire que la distance entre deux points du réseau est un nombre entier.

c. Soit M, N et P trois points du réseau. Montrer que parmi les trois nombres $d(\mathrm{M}, \mathrm{P})$, $d(\mathrm{P}, \mathrm{N})$ et $d(\mathrm{M}, \mathrm{N})$,

   - soit il y a trois nombres pairs ;
   - soit il y a un nombre pair et deux nombres impairs.

2. Cercle

Si I est un point du réseau et r un entier strictement positif, le cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M du réseau tels que $d(\mathrm{I}, \mathrm{M}) = r$. On le note $\mathrm{c}(\mathrm{I}, r)$.

a. Montrer que les points B et C appartiennent à c(O, 6), puis représenter ce cercle.

b. Combien de points y a-t-il sur un cercle de rayon r ?

3. Médiatrice d'un segment

Soient I et J deux points du réseau. La médiatrice du segment [IJ] est l'ensemble des points M du réseau tels que $d(\mathrm{M}, \mathrm{I}) = d(\mathrm{M}, \mathrm{J})$.

a. Dessiner les points de la médiatrice du segment [OA] dont l'ordonnée est comprise entre –6 et 6.

b. Dessiner les points de la médiatrice du segment [AC] dont l'ordonnée est comprise entre –8 et 4.

c. Dessiner les points de la médiatrice du segment [OB] dont l'abscisse et l'ordonnée sont comprises entre -3 et 6.

d. Que peut-on dire de la médiatrice du segment [IJ] si $d(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ est impair ?

9-c : Pavage bicolore (non S)

Pour paver une surface, on dispose de carreaux de faïence carrés, tous identiques : chaque carreau est séparé par une diagonale en deux moitiés, l'une est noire, l'autre blanche (figure ci-contre).

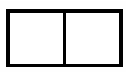
Sur un emplacement parallèle aux bords de la feuille, il y a donc quatre façons de disposer un carreau :

disposition 1 disposition 2 disposition 3 disposition 4

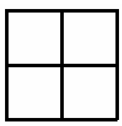
Pour les assembler, le carreleur a pour consigne de ne jamais mettre l'un contre l'autre un côté noir d'un carreau et un côté blanc d'un autre carreau.

Cette consigne doit être respectée dans les questions suivantes.

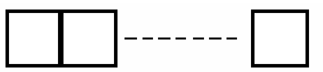
1. Représenter sur un dessin toutes les façons qu'a le carreleur de disposer les deux carreaux sur la surface suivante (1 ligne, 2 colonnes) : (*)



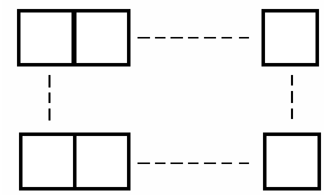
2. De combien de façons le carreleur peut-il placer 4 carreaux sur la surface suivante (2 lignes, 2 colonnes) ? (*)



3. De combien de façons le carreleur peut-il placer les carreaux pour une frise de 2012 carreaux sur la surface suivante (1 ligne, 2012 colonnes) ? (*) Vérifier que le résultat peut s'écrire sous forme d'une puissance de 2.

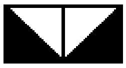
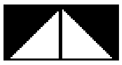


4. Le carreleur doit placer 320 carreaux sur la surface rectangulaire suivante, comprenant 16 lignes et 20 colonnes.



a. De combien de façons peu-il carreler cette surface ? (*)

b. Si l'on impose la contrainte supplémentaire que le bord de la surface soit entièrement blanc, de combien de façons peut-il carreler la surface ? (*)

(*) Dans chaque question, on considère que la surface est fixe, orientée comme sur la feuille, et ne peut pas subir une rotation. Ainsi par exemple, les deux dispositions suivantes sur une surface à 1 ligne et 2 colonnes sont considérées distinctes :  et .

10. Grenoble+

http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/maths/articles.php?lng=fr&pg=148

10-a : Des polygones manichéens (tous)

On dit qu'un polygone du plan est convexe si chacun de ses angles aux sommets mesure strictement moins de 180°. On note P_n un polygone convexe a n ($n \geq 3$) sommets.

Par ailleurs, deux triangles sont d'intérieurs disjoints s'ils n'ont pas de point commun ou si leurs points communs appartiennent a un de leurs côtés.

1. Montrer que tout polygone P_n est la réunion de $n - 2$ triangles dont les intérieurs sont deux a deux disjoints.

On dira qu'une telle réunion de $n - 2$ triangles dont les intérieurs sont deux a deux disjoints est une triangulation de P_n, et l'on admettra dans la suite que toute triangulation de P_n contient exactement $n - 2$ triangles.

2. a. Représenter toutes les triangulations comportant 2 triangles de P_4.

b. Représenter toutes les triangulations comportant 3 triangles de P_5.

c. Montrer que P_6 admet une triangulation dont au moins l'un des triangles n'a aucun côté au bord de P_6.

3. Montrer que l'on peut toujours colorier les triangles d'une triangulation de P_n en noir et en blanc de telle sorte que deux triangles qui ont une arête commune ont des couleurs différentes.

On supposera dorénavant que les triangles d'une triangulation ont été coloriés en noir ou en blanc de façon à ce que deux triangles qui ont une arête commune soient toujours de couleurs différentes. Une telle triangulation sera dite *admissible* si tous les triangles ayant au moins une arête au bord de P_n ont la même couleur (par exemple noir).

4. Trouver, lorsqu'elles existent, toutes les triangulations admissibles de P_3, P_4, P_5 et P_6.

5. Montrer que pour tout entier $k > 0$, P_{3k} a au moins une triangulation admissible.

6. Montrer que toute triangulation admissible de P_{3k} a exactement $2k - 1$ triangles d'une couleur et $k - 1$ triangles de l'autre couleur.

7. Montrer que pour tout entier $k > 0$, P_{3k+1} et P_{3k+2} n'ont aucune triangulation admissible.

10-b : Des territoires aléatoires (autres que S et STI)

On cherche à modéliser la répartition des habitants et la surface occupée par chacun d'eux dans deux villes particulières de N habitants (où N est un nombre entier). Pour cela on étudie deux modèles.

A - Modèle 1

On considère que la ville est une bande de terre le long de la mer. On modélise le territoire de cette ville par une suite de carrés alignes (voir la figure 1). Notons A le nombre de carrés qui composent la ville.

1	2	3	4	…	A–1	A

figure 1

La répartition des habitants suit le modèle suivant : on construit aléatoirement une liste de N nombres entiers distincts choisis entre 1 et A (correspondant à chacun des habitants), et on place chacun des N habitants au centre du carré correspondant à son numéro. On répartit alors la surface de la ville entre ses habitants en attribuant chaque point de la surface des carrés qui la composent à la personne la plus proche de ce point.

1. Dans cette question on prend $N = 3$ et $A = 9$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

figure 2

On a construit de manière aléatoire la liste des 3 valeurs suivantes correspondant à chacun des 3 habitants : 2 ; 8 ; 9.

Recopier le tableau, placer ces 3 habitants et représenter par trois couleurs différentes la surface occupée par chacun d'eux. Donner alors l'aire de chacune de ces surfaces (l'unité d'aire est l'aire d'un des carrés qui composent la ville).

2. Dans cette question N et A sont deux entiers quelconques (avec $N \leq A$) et chaque carré a toujours une surface d'une unité.

a. Quelle est l'aire de la plus petite surface possible pour un habitant ? (justifier)

b. Quelle est l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant ? (justifier)

B – Modèle 2

On considère que la ville peut être modélisée par un territoire carré.

On choisit un nombre entier A supérieur ou égal a N tel que A soit le carré d'un entier.

On divise ce « carré-ville » en A petits carrés de même taille que l'on numérote de 1 à A.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

On construit aléatoirement une liste de N nombres entiers distincts choisis entre 1 et A, et on place chacun des N habitants au centre du carré correspondant à son numéro.

On répartit alors la surface de la ville en attribuant chaque point de la surface des carrés qui la composent à la personne la plus proche de ce point.

1. Dans cette question on prend $N = 3$ et $A = 9$.

On conserve la liste des 3 valeurs précédentes : 2 ; 8 ; 9.

Recopier le tableau, placer les 3 habitants, et représenter en couleur la surface occupée par chacun de ces habitants. Donner alors l'aire de cette surface en supposant toujours que la surface de chaque petit carré a une aire égale a une unité.

2. En général, en posant la surface de chaque petit carré égale à 1, dans un modèle a N habitants et A petits carrés (avec $N \leq A$).

a. Quelle est l'aire de la surface moyenne par habitant ?

b. Quelle est l'aire de la plus petite surface possible pour un habitant ?

c. Montrer que l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant n'a pas la même valeur que celle obtenue dans le modèle précédent, ou la ville est située en bord de mer.

10-c : Droite et naissance de l'ère industrielle (S et STI)

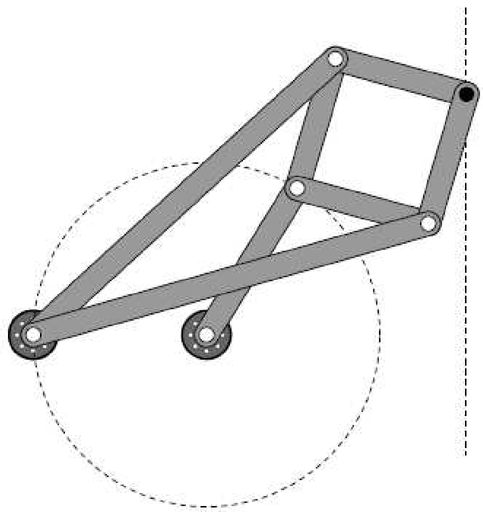
Si l'on devait définir une droite, on penserait à « *le plus court chemin entre deux points* » (définition intrinsèque) et a « *ce que l'on trace avec une règle* » ; mais cette deuxième définition apparemment effective n'en est pas une : on construit une droite avec une droite (la règle), c'est-à-dire que l'on copie une droite préexistante.

La question se pose donc : existe-t-il un outil, pour tracer des droites, ne faisant aucun usage d'une droite préexistante ?

Jusqu'à l'époque des premières machines à vapeur, les artisans savaient fabriquer des pièces raisonnablement droites. Mais on ne savait pas faire mouvoir une pièce dans un mouvement rectiligne parfait. Pourtant, dans pratiquement toutes les machines de production on a besoin de pièces qui se déplacent suivant un mouvement rectiligne.

Ainsi toutes les nations, où l'industrie moderne se développait, cherchaient des machines produisant des mouvements rectilignes parfaits. De très grands mathématiciens ont participé a ces recherches.

La première solution exacte, dont toutes les autres découlent, est due a Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913), officier des armées françaises.



La machine de Peaucellier

Il s'agit ici de voir pourquoi la machine de Peaucellier permet un mouvement rectiligne parfait.

I – Une nouvelle transformation : l'inversion

Définition : étant donnés un point O du plan et un réel k positif non nul, on appelle **inversion de centre O, de puissance k** la transformation qui a tout point M du plan, distinct de O, fait correspondre le point M' de la demi-droite [OM) tel que OM × OM' = k.

1. Images de points : soit O un point donné.

a. Soit M un point situé a 4 unités de O. Tracer l'image M' de M par l'inversion de centre O et de puissance $k = 6$.

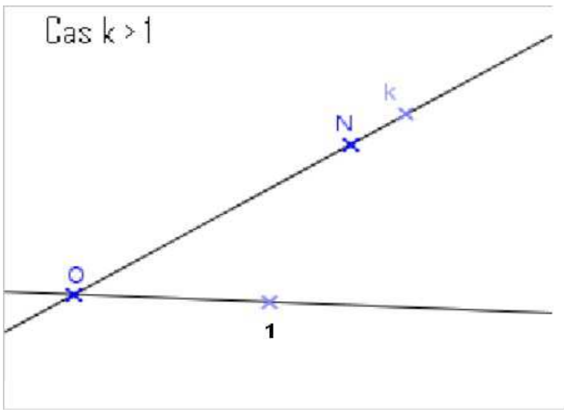
b. Quelle est l'image de ce point M' par cette même inversion ?

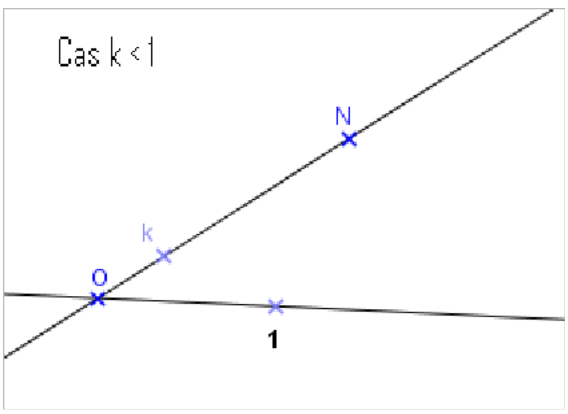
c. Le point O a-t-il une image par cette inversion ? Pourquoi ?

d. Existe-t-il des points du plan invariants par cette inversion de centre O, de puissance $k = 6$ (c'est-à-dire des points qui sont leur propre image par cette inversion) ? Si oui, quel ensemble décrivent-ils ?

e. Construction dans le cas général, une unité étant choisie.

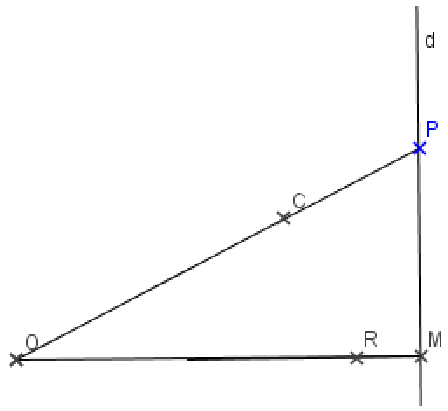
Soit N un point quelconque, distinct de O. Compléter les figures ci-dessous en construisant, à la règle non graduée et au compas, l'image de N par l'inversion de centre O, de puissance k, réel positif quelconque fixe.





2. Image d'une droite, image d'un cercle : soit O un point donné et k un réel positif non nul.

Soit d une droite ne passant par O, M le point d'intersection entre d et la perpendiculaire a d passant par O et R l'image de M par l'inversion de centre O, de puissance k.



Soit P un point quelconque de d et C son image par la même inversion.

a. Montrer que $\dfrac{OC}{OR} = \dfrac{OM}{OP}$.

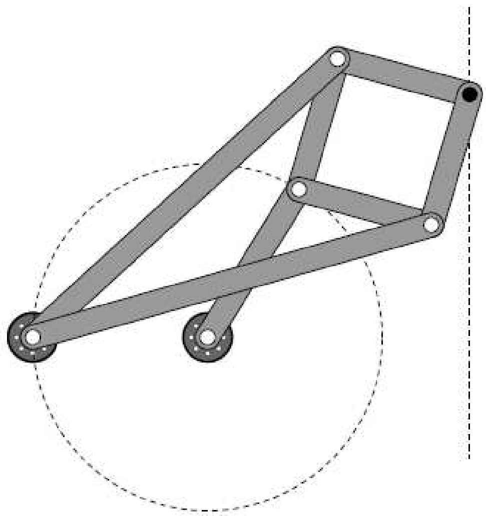
b. On note C' le point d'intersection entre (OP) et la perpendiculaire à (OP) passant par R. En calculant de deux façons le cosinus de l'angle $\widehat{MOP}$, montrer que OC = OC'.

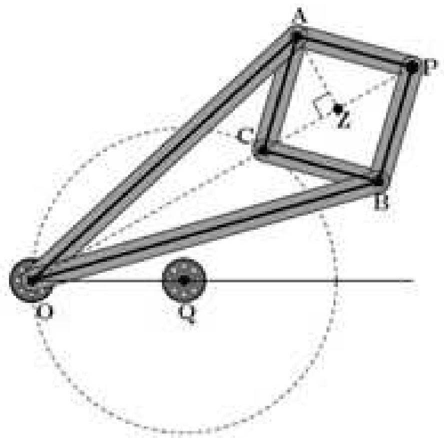
c. En déduire que l'angle $\widehat{OCR}$ est droit.

d. En déduire l'ensemble décrit par les points C quand P se déplace sur d.

e. En déduire que l'image du cercle de diamètre [OR] par l'inversion de centre O de puissance k est incluse dans la droite d.

II – Analysons la machine de Peaucellier





Analyse de la machine de PEAUCELLIER

L'étude conduite dans la partie I montre que dans le cas de trois points alignés O, C, P tels que le produit OC × OP est constant (égal a k), lorsque le point C décrit le cercle de diamètre [OR], le point P décrit une droite (XY) (ou d).

Considérons la machine de Peaucellier dans laquelle OA = OB et ACBP est un losange : par construction, C décrit un cercle de diamètre [OR] (ou R est le symétrique de O par rapport a Q).

Il reste a vérifier que OC × OP est constant lors du mouvement du système articulé.

1. Montrer que les points O, C et P sont alignés, quelle que soit la position du système articulé.

2. Montrer que OC × OP est constant.

Indication : on pourra utiliser OC = OZ – ZP et OP = OZ + ZP.

3. Conclure.

11. Guadeloupe+

http://pedagogie.ac-guadeloupe.fr/mathematiques

11-a : Quand 7 divise !

n est un entier naturel.

Dans la division euclidienne de n par 7, n peut s'écrire $n = 7q + r$ où q et r sont des entiers naturels.

1. Que représente r ? Quelles sont les valeurs possibles pour r ?

2. On divise n^2 par 7. Quels sont les restes possibles ?

3. En déduire que si 7 divise n^2 alors 7 divise n.

4. n et m sont deux entiers naturels. On divise $n^2 + m^2$ par 7. Quels sont les restes possibles ?

5. En déduire que si 7 divise $n^2 + m^2$ alors 7 divise n et m.

11-b : Géométrie : le retour

On donne un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires [AB] et [CD].

M étant un point du segment [AB], on trace (CM), qui recoupe le cercle en N.

La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P.

Montrer que OP = CM.

12. Guyane

13. La Réunion

http://maths.ac-reunion.fr/Concours-et-Rallyes/Olympiades-de-Mathematiques/

13-a : Le problème de Syracuse

⇛ *Les questions 1 à 5 sont à traiter par tous les candidats*

⇛ *La question 6 ne sera traitée que par les élèves inscrits dans la série S*

On part d'un entier n strictement positif :

* si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$;

* si n est impair ($n>1$), on le transforme en $3n+1$;

* si $n=1$, on s'arrête.

Exemples :

- Si $n=6$, on obtient la suite : $6\to3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$.
- Si $n=13$, on obtient la suite : $13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$.

Il a été observé à l'aide d'un programme sur ordinateur, que pour chaque nombre testé, la suite aboutit toujours à 1. Mais ce résultat n'a pas été entièrement démontré à ce jour.

On peut par ailleurs, s'intéresser à la longueur de cette suite, qu'on notera $L(n)$.

Par exemple $L(6)=9$ et $L(13)=10$.

1. Déterminer $L(n)$ pour les entiers allant de 1 à 12.

2. Soit p un entier, on considère l'entier $n=2^p$. Exprimer $L(n)$ en fonction de p.

3. Trouver un nombre n compris entre 2^{2007} et 2^{2008}, solution de $L(n)=2012$.

Indication : On pourra chercher un nombre de la forme $2^p \times q$.

4. Soit k un entier non nul.

a. Montrer que $L(8k+4)=L(6k+4)+3$.

b. De même, montrer que $L(8k+5)=L(6k+4)+3$.

c. Montrer que $L(16k+2)=L(16k+3)$.

5. À défaut de réussir à prouver que la suite aboutit toujours à 1, on souhaite montrer que dans un grand nombre de cas, on est sûr d'aboutir à un moment à un entier inférieur à n :

Par exemple : $51\to154\to77\to232\to116\to58\to29$……….

Montrer que dans les cas suivants, où k est un entier, on aboutit bien à un moment à un nombre plus petit que celui de départ :

a. $n=4k$.

b. $n = 4k + 1$.

c. $n = 4k + 2$.

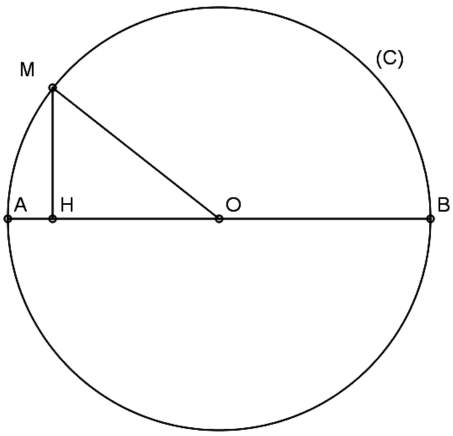
Quel problème rencontre-t-on pour $n = 4k + 3$?

6. Étant donné un entier $n \geq 1$, écrire un algorithme en pseudo-langage permettant de déterminer si la longueur $L(n)$ est inférieure ou égale à 100 et dans ce cas d'afficher $L(n)$.

13-b : Le cercle des S

On considère un cercle (C) de centre O et de diamètre [AB], un point M de (C) et son projeté orthogonal H sur [AB].

1. Soient a et b deux réels positifs, on appelle « moyenne arithmétique de a et b » le nombre $\dfrac{a+b}{2}$ et « moyenne géométrique de a et b » le nombre $\sqrt{a \times b}$.



Montrer que OM et MH sont respectivement les moyennes arithmétique et géométrique de AH et HB.

2. Montrer que le cercle de centre A et de rayon MH est tangent à la droite (OM).

3. On considère maintenant que le cercle (C) a pour rayon 10.

Existe-t-il une position de M sur (C) telle que l'aire du triangle OHM soit égale à 20 ?

13-c : La liste des non S

Une liste initiale contient tous les entiers de 1 à 2012 dans un ordre quelconque, écrits une seule fois.

L'opération suivante lui sera appliquée de manière répétée : si la première valeur de la liste est le nombre k, alors les k premières valeurs sont réécrites dans l'ordre inverse de celui où elles étaient (les autres valeurs restent inchangées).

Notons que si $k = 1$, la liste n'est pas modifiée.

Exemple : si la liste initiale est (5 ; 29 ; 7 ; 14 ; 21 ; 10 ; …) alors $k = 5$ (c'est le premier nombre de la liste) et on obtient, après la première opération, la liste : (21 ; 14 ; 7 ; 29 ; 5 ; 10 ;…).

1. Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération quatre fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

2. Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération dix-sept fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

3. Existe-t-il, pour tout entier naturel n tel que $1 \leq n \leq 2012$, une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?

4. Pour toute liste initiale, existe-t-il nécessairement un entier naturel n tel qu'après avoir appliqué l'opération à la liste n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position ?

14. Lille

http://mathematiques.discipline.ac-lille.fr/inspection/contacter-les-inspecteurs

14-a : Podium olympique (S)

On écrit les nombres entiers impairs comme ci-dessous.

			1				ligne 1
		3		5			ligne 2
	7		9		11		ligne 3
13		15		17		19	ligne 4
	…		…		…		…

Partie 1

1. Compléter le « triangle » en écrivant les lignes 5 et 6.
2. Écrire la ligne 11.
3. Quels sont les premier et dernier termes de la ligne 20 ?
4. On considère l'algorithme suivant :

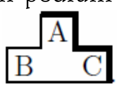
```
X prend la valeur −1
Entrer N
Pour I allant de 1 à N
Pour J allant de 1 à I
X prend la valeur X +2
Fin du Pour
Fin du Pour
Afficher X
```

a. Si l'on applique cet algorithme avec $N = 3$, que va-t-il afficher ?

b. Sachant que N représente le numéro d'une ligne, que représente X ?

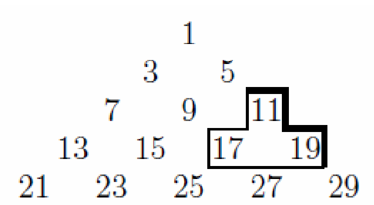
c. Modifier l'algorithme pour qu'il calcule et affiche aussi Y, le premier terme de la ligne N.

Partie 2

On dispose maintenant d'un podium que l'on peut déplacer sur le « triangle » de façon à encadrer trois nombres A, B, C : . 

dans ce cas, on dira alors que A monte sur (B + C).

Par exemple, sur la figure ci-dessous, on a placé le podium sur la ligne 4, et 11 « monte » sur 36.

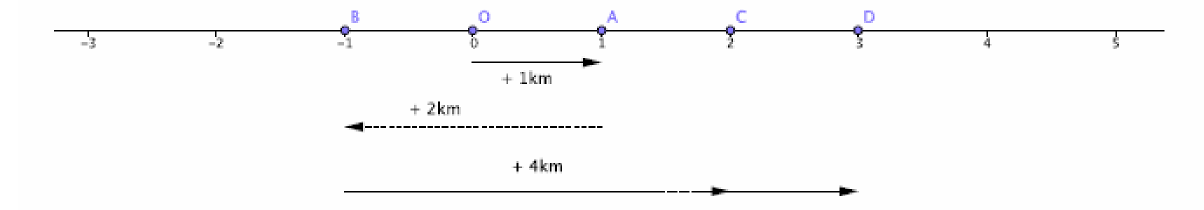


1. Si on place le podium au début de la ligne 11, quels nombres sont encadrés ? Que dira-t-on alors ?
2. Quel nombre monte sur 2012 ?
3. Sur quel nombre monte 2011 ?
4. Le nombre A peut-il monter sur (B+C) de sorte que A+B+C= 2013 ?
5. Démontrer que l'on ne monte que sur des multiples de 4.

14-b : La chasse au trésor (S)

Sur une route graduée (unité 1 km), un trésor a été placé au point T d'abscisse entière n. Jérémy, placé initialement au point O d'abscisse 0, part à sa recherche.

Dessin :



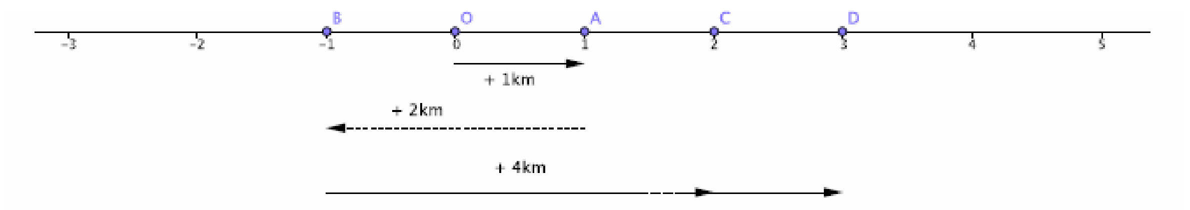
On admet que : le fait d'être au point T permet de trouver le trésor si celui-ci s'y trouve.

Ne sachant pas où est placé le trésor, Jérémy décide d'appliquer la tactique suivante :

Partant du point O, il décide de se rendre au point A d'abscisse 1 et donc de faire un kilomètre vers la droite. Si le trésor s'y trouve, sa recherche est terminée et pour le découvrir, Jérémy a parcouru 1 km. Dans le cas contraire, il décide de changer de direction et de parcourir deux kilomètres vers la gauche. Il peut ainsi découvrir le trésor si celui-ci se trouve au point B d'abscisse –1. Si le trésor s'y trouve, sa recherche est terminée et pour le découvrir, Jérémy a parcouru 3 km (1 km + 2 km). Dans le cas contraire, il décide de changer de direction et de parcourir quatre kilomètres vers la droite. Il peut ainsi découvrir le trésor si celui-ci se trouve au point C d'abscisse 2 (dans ce cas, sa recherche est terminée et pour le découvrir, Jérémy a parcouru 1 km + 2 km + 3 km soit 6 km) mais aussi au point D d'abscisse 3. Si arrivé au point d'abscisse trois, il n'a rien trouvé, il décide de changer de direction et de parcourir huit kilomètres vers la gauche. Il peut ainsi découvrir le trésor si celui-ci se trouve aux points d'abscisses respectives –2, –3, –4 et –5.

Question 1 : Si arrivé au point d'abscisse –5, il n'a rien trouvé, que fait Jérémy ?

Question 2 : En poursuivant éventuellement le dessin suivant, compléter le tableau ci-dessous :



Abscisse du point T	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Nombre de kilomètres parcourus par Jérémy pour trouver le trésor.					3	0	1				

Question 3 : Proposer un algorithme permettant de déterminer pour tout entier relatif n le nombre de kilomètres parcourus pour trouver le trésor lorsqu'il est placé au point d'abscisse n.

Question 4 : Par la méthode de votre choix, que vous préciserez, déterminer le nombre de kilomètres parcourus par Jérémy pour trouver le trésor si celui-ci se trouve au point d'abscisse 50.

Question 5 : Sachant qu'avec sa voiture, Jérémy ne peut parcourir plus de 900 km avec un plein d'essence, déterminer les points où peut se situer le trésor et atteignables avant que Jérémy ne tombe en panne d'essence.

(*Les non S ont un exercice semblable mais plus facile, voir sur le site*).

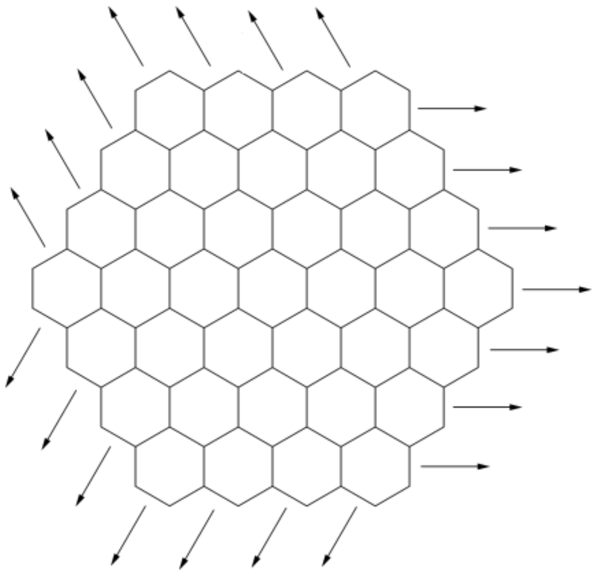
15. Limoges+

15-a : Hexagones magiques (tous)

Dans tout l'exercice, n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

On utilisera dans le problème la formule suivante qui donne la somme des entiers de 1 à n :

Formule : $1+2+3+...+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.



Un *hexagone d'ordre* n est une figure hexagonale régulière formée de petits hexagones réguliers avec n hexagones sur chaque côté (ci-contre l'hexagone d'ordre 4).

Les petits hexagones seront appelés *cellules*.

On note $C(n)$ le nombre de cellules d'un hexagone d'ordre n.

Un *hexagone magique d'ordre* n est un hexagone d'ordre n dont les $C(n)$ cellules sont remplies par tous les entiers de 1 à $C(n)$, de telle sorte que la somme des entiers de chaque ligne (dans les trois directions comme dans la figure précédente) soit toujours la même.

La somme obtenue est alors appelée *somme magique* et notée $S(n)$.

1. Hexagone magique d'ordre 3

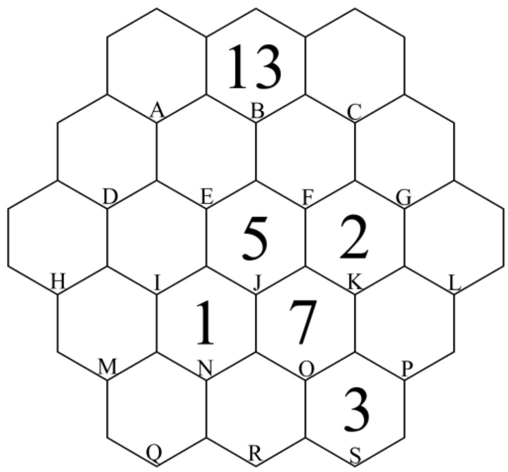
a. Préciser le nombre de cellules $C(3)$ d'un hexagone d'ordre 3.

b. En utilisant la formule, la somme des entiers de 1 à $C(3)$.

c. En déduire la somme magique $S(3)$.

d. On étudie le cas d'un hexagone magique d'ordre 3 déjà partiellement rempli. Les lettres servent uniquement à repérer les cellules. Compléter cet hexagone magique.

Justifier la position du premier nombre placé avec certitude.



2. Étude du cas général

a. Justifier que $C(n)=3n^2-3n+1$.

b. Quel est, en fonction de n, le nombre de lignes horizontales d'un hexagone d'ordre n ?

c. Quelle est la somme des entiers de 1 à $C(4)$? Peut-il exister un hexagone magique d'ordre 4 ?

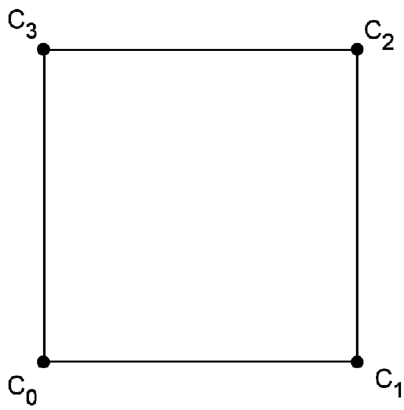
d. Déterminer une expression de $S(n)$ en fonction de n, puis montrer que

$$32S(n)=72n^3-108n^2+90n-27+\frac{5}{2n-1}.$$

e. En déduire les valeurs de n pour lesquelles un hexagone magique d'ordre n peut exister.

15-b : Milieux (S)

Soit $C_0C_1C_2C_3$ un carré.



On travaillera dans le repère $(C_0\ ; C_1, C_2)$.

1. Indiquer les coordonnées de C_0, C_1, C_2 et C_3.

2. On définit la suite de points P_n : $P_0 = C_0$ et pour tout entier n, P_{n+1} est le milieu de $[P_nC_k]$ où k est le reste de la division euclidienne de $n+1$ par 4.

o P_1 est le milieu de $[P_0C_1]$ o P_2 est le milieu de $[P_1C_2]$
o P_3 est le milieu de $[P_2C_3]$ o P_4 est le milieu de $[P_3C_0]$
o P_5 est le milieu de $[P_4C_1]$, etc.

a. Déterminer les coordonnées de P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 et P_7 sous forme exacte.

b. Démontrer que P_0, P_3, P_4 et P_7 sont alignés sur la droite Δ_0 d'équation $y = 2x$.

c. Démontrer que P_1, P_2, P_5 et P_6 sont alignés sur une droite Δ_1, parallèle à Δ_0 et dont on donnera une équation réduite.

3. a. Soit A un point quelconque de Δ_0. Démontrer que

o le milieu du segment $[AC_0]$ est sur Δ_0,

o le milieu du segment $[AC_1]$ est sur Δ_1.

b. Soit B un point quelconque de Δ_1. Démontrer que

o le milieu du segment $[BC_2]$ est sur Δ_1,

o le milieu du segment $[BC_3]$ est sur Δ_0.

c. Que peut-on en déduire pour la suite de points (P_n) ?

4. Soit $P(x\ ; y)$ un point quelconque du plan. On définit les points Q, R, S et T par

o Q est le milieu de $[PC_1]$, o S est le milieu de $[RC_3]$,
o R est le milieu de $[QC_2]$, o T est le milieu de $[SC_0]$.

a. Donner les coordonnées de T en fonction de x et y.

b. Montrer qu'il existe un unique point P tel que T = P.

Donner les coordonnées de ce point P, ainsi que les coordonnées des points Q, R et S correspondants.

c. Donner des valeurs approchées des coordonnées de P_8 et P_{12}.

d. Que peut-on conjecturer pour la suite de points (P_n), lorsque n tend vers $+\infty$?

15-c : La calculatrice défectueuse (autres que S)

Une calculatrice défectueuse permet seulement :

o de taper des nombres positifs ou nuls ;

o de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement, (x, y, z), elle affiche 0 si $x = y$ et le résultat de $\dfrac{z}{x-y}$ sinon ;

o l'utilisation des parenthèses, ce qui permet de composer des calculs.

L'objectif est de déterminer si cette calculatrice permet tout de même de faire les opérations usuelles sur tout les nombres réels : $+$, $-$, $\times$,/.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats suivants donnés par la calculatrice :

$$(0, 1, 2) \to -2 \text{ et } ((2, 0, 1), 1, 1) \to -2.$$

2. Que donnent (2, 0, 1), (0, 2, 1) et (2, 1, (2, 1, 3)) ?

3. Donner un calcul permettant d'obtenir –1.

4. Vérifier que le calcul $(a, 0, 1)$ permet d'obtenir l'inverse de a, pour tout $a > 0$.

5. Proposer un calcul permettant de faire la division de deux nombres positifs : $\dfrac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$.

6. Proposer un calcul permettant de faire la multiplication de deux nombres positifs : $a \times b$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$.

7. Proposer un calcul permettant de faire la soustraction de deux nombres positifs : $a - b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

8. Proposer un calcul permettant d'obtenir l'opposé d'un nombre positif : $-a$ avec $a \geq 0$.

9. Proposer un calcul permettant de faire l'addition de deux nombres positifs : $a + b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

10. Proposer une décomposition du calcul suivant afin de pouvoir le réaliser avec cette calculatrice à partir des nombres donnés :

$$1 + \frac{-3}{34 \times 112 + 4}.$$

16. Lyon+

http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/spip.php?article258

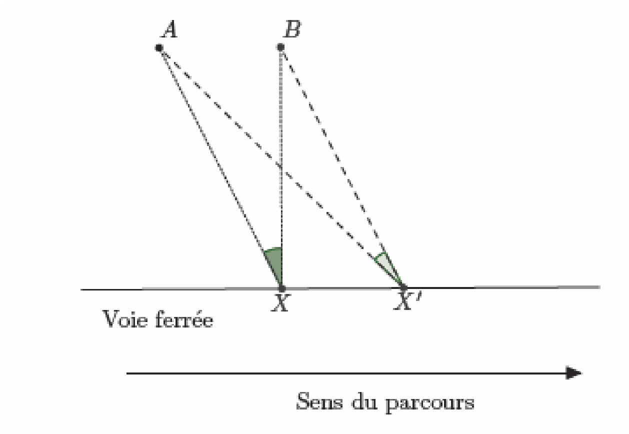
16-a : Les éoliennes

Xavier voyage dans un train en compagnie de ses deux amies Yasmina et Zoé. La voie ferrée est rectiligne et le train circule à une vitesse constante de 90 km/h.

1. Combien de secondes le train met-il pour parcourir 100 m ?

2. D'un côté de la voie, à une distance de 200 m de celle-ci, se trouvent deux éoliennes A et B distantes l'une de l'autre de 100 m (A se trouve avant B dans le sens du parcours). Lorsque Xavier se trouve exactement à 200 m de l'éolienne B, c'est à dire lorsque l'angle $\widehat{ABX}$ est droit, il mesure l'angle $\widehat{AXB}$.

4 secondes plus tard, il se trouve dans une position X_0 et mesure à nouveau l'angle $\widehat{AX_0B}$, comme illustré sur la figure ci-dessous.



Montrer que la somme des mesures des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AX_0B}$ vaut 45°.

3. Sa camarade, Yasmina, a observé avant lui ces deux éoliennes. Toutes les 4 secondes, elle a mesuré l'angle $\widehat{AYB}$, Y étant sa position sur la voie ferrée. Elle a commencé ses mesures 8 secondes avant la première mesure de Xavier et a terminé en même temps que Xavier.

a. Faire une figure.

b. Calculer la somme des mesures de tous les angles que Yasmina a mesurées.

4. Zoé a effectué ses mesures bien longtemps en avance : elle a commencé 10 minutes avant la première mesure de Xavier et a renouvelé toutes les 4 secondes la mesure de l'angle $\widehat{AZ_0B}$, $\widehat{AZ_1B}$,…, Z_0, Z_1, … étant les positions de Zoé sur la voie ferrée. Elle a continué ses calculs longtemps après que Xavier s'est arrêté.

Démontrer que la somme des mesures de tous les angles qu'elle a mesurés est inférieure à 180°.

16-b : Duels tétraédriques

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre.

Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base du tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.

Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6.

Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5, celui de Cyril, 3, 3, 3 et 8, et enfin, celui de Diane, 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette son dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6 ?

2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.

a. Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

b. Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.

3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.

a. Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.

b. Qui a le plus de chances de gagner ce jeu ?

4. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane utilisent maintenant d'autres dés, numérotés avec des entiers naturels, de sorte que celui d'Antoine a des faces numérotées a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 avec $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$, celui de Baptiste a des faces numérotées b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4 avec $b_1 \le b_2 \le b_3 \le b_4$, celui de Cyril a des faces numérotées c_1 ; c_2 ; c_3 ; c_4 avec $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$, celui de Diane a des faces numérotées d_1 ; d_2 ; d_3 ; d_4 avec $d_1 \le d_2 \le d_3 \le d_4$.

Nous savons de plus qu'aucun des numéros d'un dé tétraèdrique ne se retrouve sur un autre dé tétraèdrique.

Par conséquent, dans chaque duel, il y a toujours un gagnant et un perdant.

a. Montrer que, si $a_2 \le b_2$, la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.

b. Existe-t-il des dés tétraèdriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité strictement supérieure à $\frac{5}{8}$?

c. Existe-t-il des dés tétraèdriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$.

17. Marseille+

http://www.ac-aix-marseille.fr/pedagogie/jcms/c_143884/olympiades-de-mathematiques-2012-sujets-corrections

17-a : Carrelages (S)

Un carreleur dispose d'un stock (suffisant) de pavés bleus et ronds, de 10 cm de rayon, pour paver une grande salle. Il hésite entre les deux types de pavages suivants :

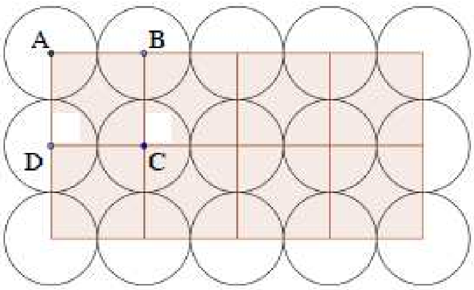


Figure 1: pavage P_1

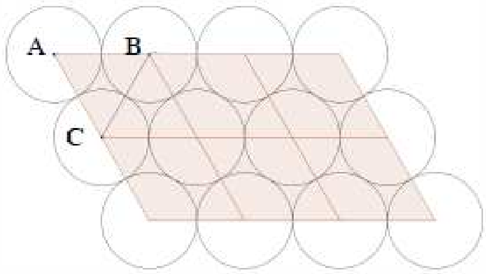


Figure 2: pavage P_2

Sur chaque pavage, quand on relie les centres des disques adjacents, on obtient un polygone (appelé cellule) qui se reproduit « à l'infini ».

Dans le premier pavage cette cellule est un carré et dans le second cette cellule est un triangle équilatéral.

On appelle **densité** du pavage le rapport entre la surface occupée par les portions de disques contenues dans une cellule et la surface de la cellule elle-même. On définit ainsi un indicateur de compacité du pavage : plus la densité du pavage est grande, plus le pavage est compact...

Partie I

1. Montrer que la densité du pavage P_1 arrondie à 10^{-3} est $D = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$.

2. Calculer la densité du pavage P_2. Quel est le « meilleur » pavage ?

3. Le carreleur choisit finalement le deuxième pavage mais trouve que la surface non recouverte par les pavés est encore trop importante. Il décide de créer des nouveaux pavés ronds, cette fois-ci de couleur marron, qui rentreront exactement dans les interstices. On admet qu'on obtient la figure 3.

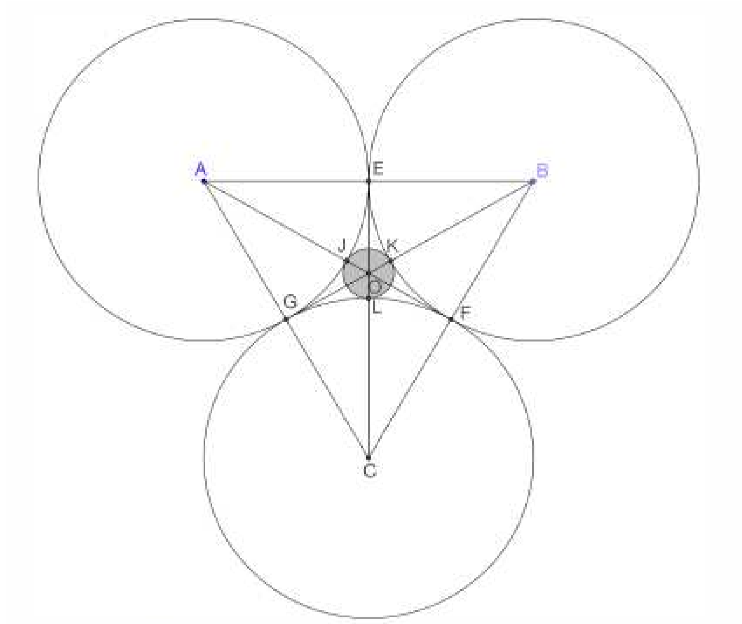


Figure 3 : des pavés marron dans les interstices

a. En s'aidant de la figure 3, déterminer le rayon de ces nouveaux pavés.

b. Quelle est la densité de ce pavage ?

c. Le carreleur aurait-il obtenu une meilleure densité à partir de pavés bleus d'un rayon différent de 10 cm ? Justifier.

Partie II

Le carreleur doit maintenant créer un motif ayant la forme d'un triangle équilatéral. Pour cela, il s'inspire du deuxième pavage : voir figure 4.

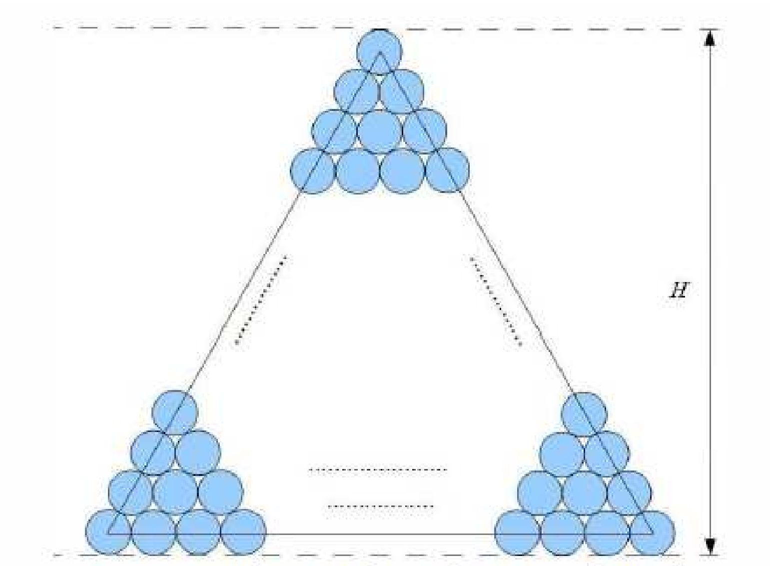
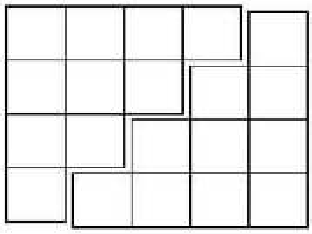


Figure 4 : motif ayant la forme d'un triangle équilatéral

1. Donner une formule donnant la valeur de $1 + 2 + \ldots + n$ en fonction de n.

On pourra s'aider, si nécessaire, du schéma suivant :



2. Le carreleur dispose de 50 paquets de 20 pavés bleus. Il souhaite remplir le motif triangulaire le plus grand possible. Combien de carreaux restera-t-il ?

3. Pour le carreleur, les contraintes porteront en général sur la hauteur du motif.

Par exemple, pour une hauteur maximale de 3,50 m quel est le nombre de pavés nécessaires pour créer le plus grand motif possible ?

17-b : Marche aléatoire (S)

On considère deux points distincts A et B et un nombre réel p, $0 < p < 1$.

On s'intéresse aux marches aléatoires « infinies » sur l'ensemble $\{A ; B\}$ respectant les conditions suivantes :

- on part du sommet A ;

- à chaque étape, on reste au point où l'on est avec la probabilité $(1-p)$ et on change de point avec la probabilité p.

On note S_k le sommet où l'on se trouve à la k-ième étape. On a donc $S_0 = A$.

1. Écrire en langage naturel un algorithme qui génère une étape de cette marche aléatoire.

2. Montrer que la probabilité de se trouver au point B à la deuxième étape (c'est-à-dire la probabilité que $S_2 = B$) est $2p(1-p)$.

On admet que la probabilité d'être en B après la k-ième étape est $\dfrac{1-(1-2p)^k}{2}$.

3. Vérifier que cette formule est cohérente avec le résultat de la question précédente.

4. Déterminer l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles on a plus de chance d'être en B qu'en A à la 43e étape.

5. Que peut-on dire des probabilités d'être en A, ou en B, quand le nombre d'étapes est suffisamment grand ?

6. On prend $p = 0,1$. Déterminer le nombre d'étapes minimal k_0 à effectuer pour que la probabilité d'être en B à partir de cette étape soit comprise entre 0,49 et 0,51.

17-c : Carrelage (non S)

Un carreleur dispose d'un stock (suffisant) de pavés ronds de 10 cm de rayon et doit créer des motifs ayant la forme d'un triangle équilatéral :

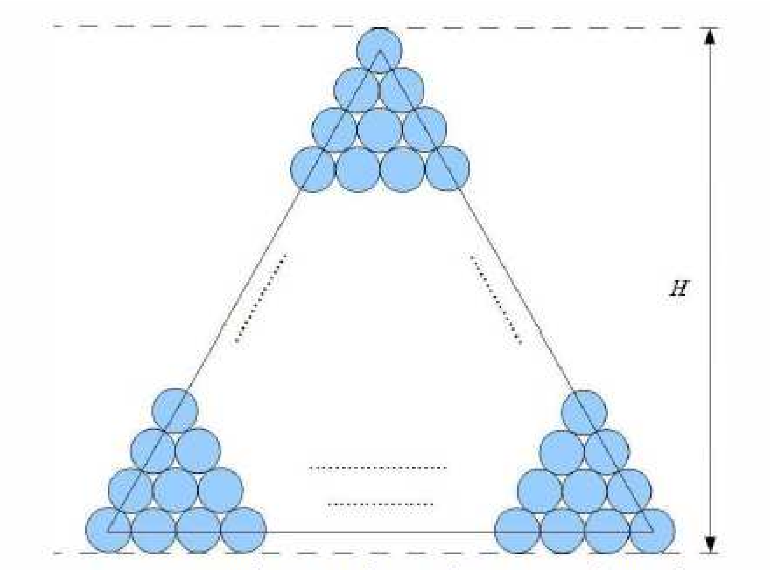


Figure 4 : motif ayant la forme d'un triangle équilatéral

1. Le carreleur a besoin de créer un motif de 15 pavés de côté. Combien de pavés doit-il prévoir au total ?

2. Le carreleur dispose de 50 paquets de 20 pavés gris. Il souhaite remplir le motif triangulaire le plus grand possible. Combien de carreaux restera-t-il ?

3. Un client demande au carreleur de réaliser la figure précédente en utilisant alternativement des lignes de pavés gris et blancs. La première ligne est faite d'un seul pavé gris. La longueur L est égale à 15 mètres.

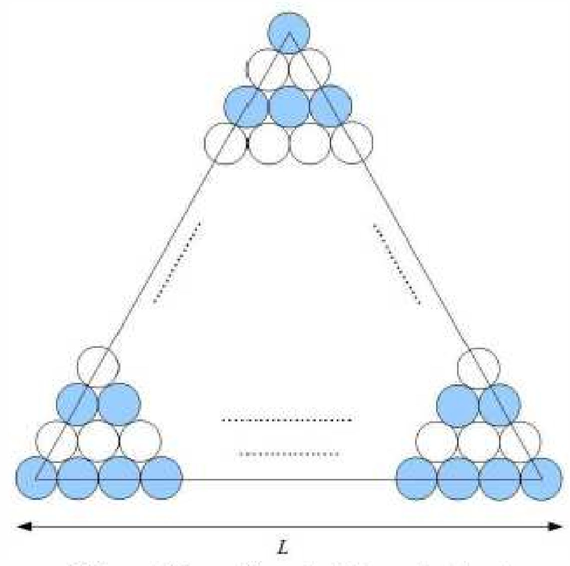


Figure 2 : motif souhaité par le client

Combien de pavés gris sont nécessaires à la réalisation du motif ?

4. Pour le carreleur, les contraintes sur un mur porteront en général sur la hauteur du motif.

Par exemple, pour une hauteur maximale de 3,50 m, quel est le nombre de pavés nécessaires pour créer le plus grand motif possible ?

Formule : $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

17-d : Rep-unit

On appelle **Rep-unit** un nombre s'écrivant uniquement avec des 1.

Les premiers Rep-unit sont donc : $R_1=1$, $R_2=11$, $R_3=111$, $R_4=1\ 111$, …

Ainsi, $R_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \ldots + 10^1 + 10^0$.

1. Montrer que $R_3 = 111$ et $R_4 = 1\ 111$ se décomposent chacun en produit de deux nombres entiers strictement supérieurs à 1 que l'on déterminera.

2. Dans cette question, on s'intéresse au nombre R_{12}.

a. Vérifier que R_2 et R_3 divisent R_{12}.

b. Montrer que, plus généralement, pour tout diviseur k de 12, R_k divise R_{12}.

3. On s'intéresse désormais, pour tout entier naturel $p \geq 2$, au nombre R_p.

a. Vérifier que $R_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

b. Développer et réduire l'expression $(x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1\right)$ définie pour tout nombre réel x.

c. On suppose que $p = k \times q$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.

Démontrer que R_k divise R_p.

18. Martinique+

http://cms.ac-martinique.fr/discipline/mathematiques/

18-a : Johnny

Un organisateur de spectacle organise un concert dans une salle de 800 places. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser sa recette. Une étude du marché lui apprend que :

- si le prix du billet est de 50 €, il vend 300 billets ;

- chaque baisse de 0,06 € sur le prix du billet lui permet de vendre un billet supplémentaire.

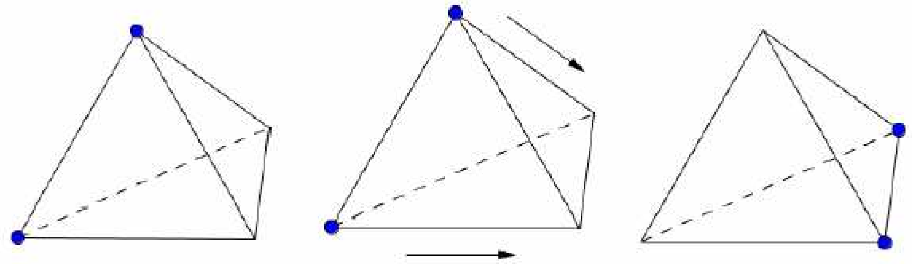
Déterminer le prix du billet pour que la recette soit maximale.

18-b : Les billes

Partie I - Sur un tétraèdre

Deux billes se trouvent sur deux sommets d'un tétraèdre.

À chaque étape d'un jeu, les deux billes se déplacent simultanément, de façons aléatoires et indépendantes d'un sommet à un autre en suivant une arrête. Les déplacements possibles sont équiprobables.



À la première étape :

➢•Si au cours du déplacement, les deux billes se rencontrent sur une arête, alors le jeu s'arrête et le joueur à perdu.

➢•Si à l'issue du déplacement, les deux billes se retrouvent sur un même sommet, alors le jeu s'arrête et le joueur a gagné.

➢•Sinon, le jeu continue et à la deuxième étape, les règles sont les mêmes qu'à la première.

Si le jeu continue à l'issue de la deuxième étape, la troisième étape sera la dernière et la règle est la suivante :

➢•le joueur a gagné si à l'issue du déplacement des deux billes, elles se retrouvent sur un même sommet.

➢•Le joueur a perdu dans tous les autres cas.

1. a. Démontrer que la probabilité que le joueur perde après une seule étape est égale à $\frac{1}{9}$.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne après une seule étape ?

2. a. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête à l'issue de la seconde étape ?

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne à l'issue de la 3ème étape ?

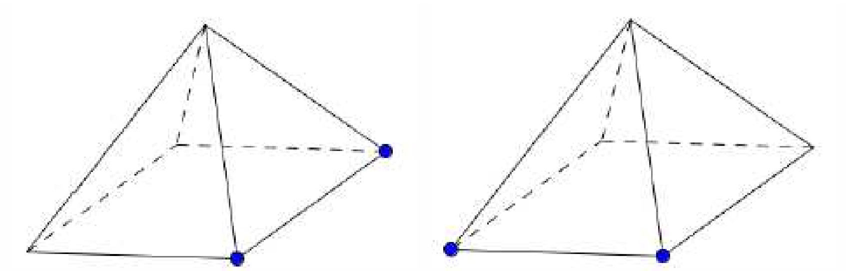
3. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Partie II – Sur une pyramide

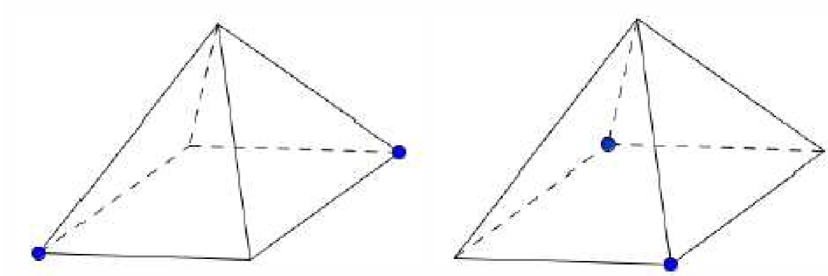
Dans cette nouvelle version du jeu, les deux billes sont initialement placées sur deux sommets d'une pyramide à base carrée. Par ailleurs, les règles du jeu sont identiques.

On peut alors facilement se convaincre que, tant que le jeu continue, à l'issue d'une étape, les deux billes sont nécessairement placées dans l'une des trois configurations ci-dessous :

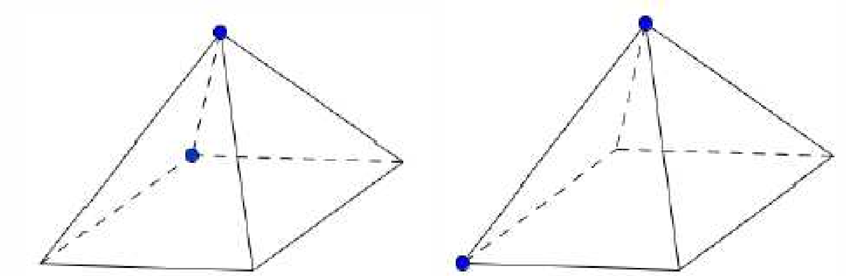
Configuration A : Les deux billes sont situées sur la base de la pyramide, aux deux extrémités d'une même arrête. Par exemple :



Configuration D : Les deux billes sont situées sur la base de la pyramide et diagonalement opposées. Par exemple :



Configuration S : L'une des deux billes est située sur le sommet de la pyramide. Par exemple :



On considère les évènements :

A_1 : À l'issue de la première étape, les billes sont en configuration A.

D_1 : À l'issue de la première étape, les billes sont en configuration D.

S_1 : À l'issue de la première étape les billes sont en configuration S.

G_1 : À l'issue de première étape, le joueur a gagné.

F_1 : À l'issue de première étape, le joueur a perdu.

1. Les deux billes sont placées initialement dans l'une des trois configurations A, D ou S.

Compléter le tableau ci-dessous. *Les résultats seront donnés sans justification.*

	$P(A_1)$	$P(D_1)$	$P(S_1)$	$P(G_1)$	$P(F_1)$
Billes initialement en configuration A					
Billes initialement en configuration D					
Billes initialement en configuration S					

19. Mayotte+

19-a : Les silences sont aussi éloquents que la parole …

Trois participants à un jeu télévisé – habiles mathématiciens ! – doivent être départagés à l'aide d'un test de logique. Ils doivent être alignés l'un derrière l'autre et regardent tous devant eux. Pour des raisons d'équité, ils tirent d'abord au sort la place qu'ils occuperont : premier, deuxième ou troisième de la file.

L'animateur dispose de cinq rubans : deux blancs et trois rouges. Il accroche au hasard, au dos de chaque participant, un des cinq rubans. Aucun joueur ne peut voir la couleur de son propre ruban, ni celle(s) du ou des joueurs qui sont derrière lui.

Un joueur gagne s'il peut annoncer de façon certaine la couleur de son ruban.

La règle du jeu est la suivante :

- Si les conditions sont réunies pour qu'un joueur trouve la couleur de son ruban, il est obligé de donner cette couleur sinon il est éliminé et dans ce cas, l'animateur annonce la couleur qu'il avait. Lorsqu'il a un doute raisonnable, le joueur doit se taire.

- Les joueurs peuvent se servir de l'information, ainsi fournie par l'un d'entre eux, pour deviner la couleur du ruban qui leur est attribué.

On suppose que les couleurs annoncées par les joueurs sont toujours exactes.

1. Quel joueur semble le plus avantagé ?

2. De combien de manières différentes peut-on aligner les joueurs?

3. Quelle est la probabilité pour l'un des trois joueurs d'être premier de la file ? deuxième ? troisième ?

4. L'un des joueurs proteste ! Il dit qu'il était inutile de distribuer les rubans car « la position du joueur rend le jeu totalement inégalitaire » .

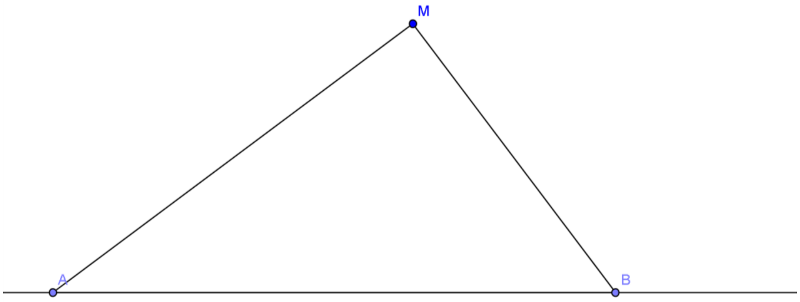
a. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier soigneusement la réponse à l'aide d'un raisonnement logique.

b. Retrouver les conclusions du a) en utilisant un calcul de probabilités.

19-b : Rencontre à Sakouli

Dans tout ce problème, on ne tiendra pas compte de la force du courant, ni de la marée !

Mogné saute d'un bateau au point M et nage au plus court à la vitesse de 1,5 km/h vers le rivage, représenté ci-dessous par la droite (AB) . On sait que AM = 160 m ; MB = 120 m et AB = 200 m.



Au même instant, Bouéni, sa petite amie, ne peut résister à l'envie de nager à sa rencontre. Elle s'élance donc du point B. Pour faire la surprise à Mogné, elle prend son tuba, évite de sortir la tête de l'eau et nage en ligne droite, à la même vitesse que Mogné et calcule sa trajectoire afin qu'ils se rencontrent.

1. Réaliser une figure codée et placer le point de rencontre J.
2. À quelle distance le bateau est-il du rivage ?
3. Au bout de combien de temps, exprimé en minutes et secondes, Bouéni et Mogné se rencontreront-ils ?
4. Après leur rencontre, Bouéni et Mogné décident de continuer à nager chacun sur leur trajectoire, toujours à la même vitesse. Leur ami Ibrahim est situé au milieu I de [AB] et regarde en direction du bateau. Verra-t-il Bouéni à gauche, à droite ou dans l'alignement du bateau, à l'instant où Mogné atteindra le rivage ? Justifier.

20. Montpellier+

http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/pedago/jeumath/olymp.htm

20-a : Des dés pas ordinaires (S - STI)

On lance deux dés ordinaires : le Tableau 1 suivant présente les résultats possibles du lancer des deux dés ainsi que l'ensemble des valeurs prises par la somme des valeurs obtenues pour les deux dés.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Tableau 1

Ce tableau conduit aux nombres d'apparitions suivants pour chacune des sommes possibles de 2 à 12 :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'apparitions	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tableau 2

Problème : le but de cet exercice est de montrer qu'il est possible de fabriquer une autre paire de dés cubiques, équilibrés, qui ne sont pas les dés cubiques ordinaires, permettant de retrouver en les lançant exactement le même tableau que le Tableau 2.

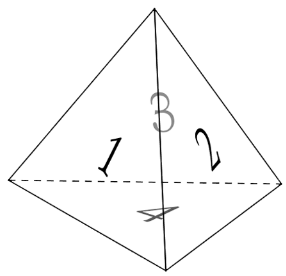
On se donne les règles de construction suivantes :

- les chiffres figurant sur chaque face sont non nuls,

- les chiffres ne sont pas forcément entre 1 et 6,

- on peut répéter le même chiffre sur deux faces différentes.

Les deux dés de la paire ne sont pas forcément les mêmes.



1. *Étude d'un problème plus simple* : on considère deux dés à quatre faces (dés tétraèdriques réguliers) dont les faces sont marquées avec les chiffres de 1 à 4.

a. Donner le tableau des résultats possibles pour la somme du résultat des deux dés, avec leur nombre d'apparitions (analogue du Tableau 2).

b. On essaie de fabriquer deux dés différents à quatre faces donnant le même Tableau 2 ; pour cela on essaie le Tableau 3 suivant :

Faces des tétraèdres	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
4	5	6	7	7
5	6	7	8	8

Tableau 3

Ce tableau convient-il ?

c. Fabriquer alors deux dés différents à quatre faces qui conviennent.

d. Justifier qu'il n'existe qu'une paire de dés solution du problème.

2. *Retour au problème des dés cubiques*

Si on cherche une paire de dés à six faces solution du problème ci-dessus et qu'on ordonne, pour chaque dé, ses faces dans l'ordre croissant dans un tableau comme le Tableau 3 ci-dessus, il n'est pas possible que les quatre premières faces des deux dés soient les mêmes que celles obtenues à la question 1. d.

Donner, sans justification, une paire de dés à six faces répondant au problème posé.

Indication : La répartition des 1 et des 2 pour ces dés pas ordinaires n'est pas celle des dés ordinaires.

On ne demande pas de prouver l'unicité du résultat, mais ce résultat est en effet unique.

Correction

1. a.

somme	2	3	4	5	6	7	8
nombre d'apparition	1	2	3	4	3	2	1

b. Ce tableau 3 ne convient pas car il y a par exemple deux fois la somme 8. 1) c) et d) ensemble

N.B. 1 : dans les tableaux ci-dessous les faces sont énumérées dans l'ordre croissant. On parlera du dé vertical et du dé horizontal, pour désigner resp. celui dont les faces sont données verticalement et horizontalement.

N.B. 2 : Cette convention entraîne aussi que dans les tableaux, les chiffres sont toujours croissants vers la droite et vers le bas. Donc une entrée est toujours inférieure ou égale à toutes les entrées à sa droite et en dessous.

Le fait d'avoir un total qui fait 2 exige d'avoir un 1 sur chaque dé. Le fait d'avoir deux totaux 3 demande d'avoir deux fois 2+1 :

• *Par l'absurde* : Si on choisit de mettre un 2 sur chaque dé, on doit ensuite pour fabriquer trois fois le total 4, et se distinguer des dés ordinaires, choisir de mettre deux fois 3 sur l'un des deux dés, sans restriction de généralité.

Mais alors comme le plus grand total doit faire huit, et que ce doit être l'endroit en bas à droite du tableau, on sait aussi qu'on a un 5 sur la quatrième face du second dés, ce qui nous donne le tableau suivant

	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
5	6	7	8	8

Et on voit qu'il *ne convient pas* puisqu'on a deux fois le total 8.

Conclusion : Si on veut des dés différents des dés ordinaires, on *doit commencer* par mettre deux 2 sur l'un des dés et donc le tableau commence par :

	1	2	2	
1	2	3	3	

Le fait d'avoir trois fois le total 4 impose déjà que la seconde face du dé "vertical" (cf. le N.B.) est un 3 : car sinon, toutes les entrées des deux dernières lignes seraient strictement plus grandes que 4. Donc on a déjà :

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	

Reste à fabriquer deux fois le total 4 : il n'y a que deux possibilités : ou bien on rajoute deux fois encore le 3 sur le dé vertical ou bien on rajoute un 3 sur chaque dé.

Montrons que la première possibilité ne convient pas : on obtiendrait :

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	
3	4	5	5	
3	4	5	5	

et donc trop de totaux valant 5.

Donc *nécessairement* le tableau est de la forme

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6

Pour obtenir le total maximum qui doit faire 8, la dernière face du dé vertical doit faire 5, et donc nécessairement le tableau est le suivant.

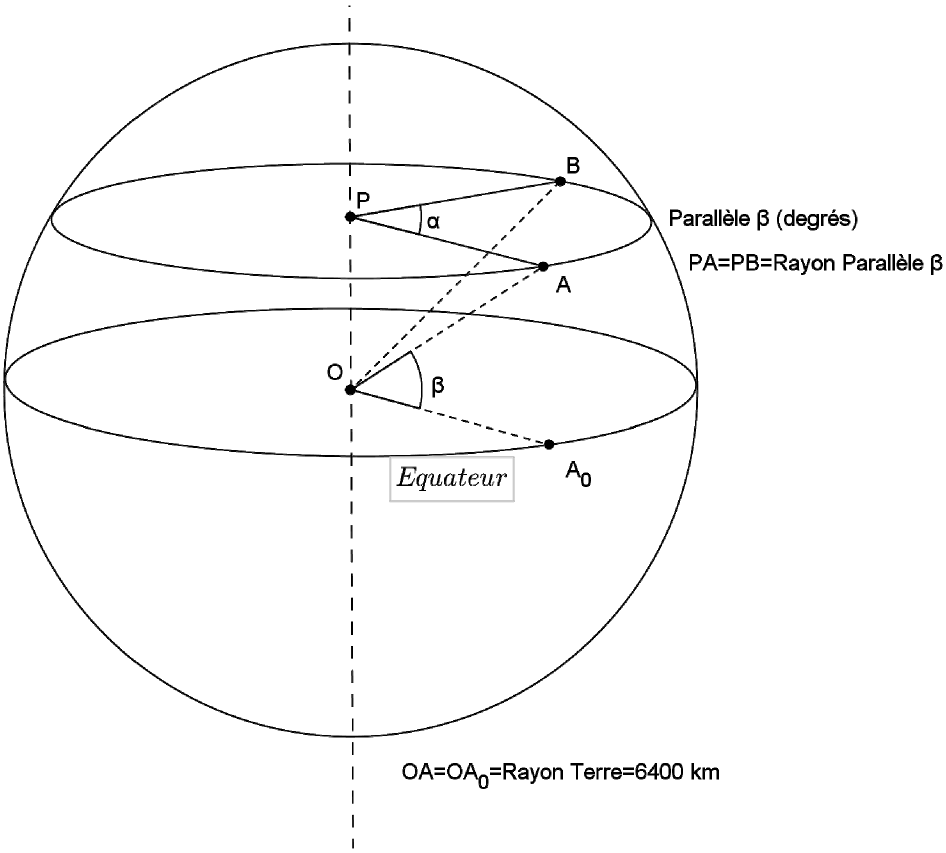
	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6
5	6	7	7	8

Réciproquement, il convient !

2. Résultat sans justification

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

20-b : Perdre le Nord ? (S-STI)



1. Sur Terre, à la latitude β (en degrés), le cercle parallèle à l'Équateur (appelé parallèle) a pour centre P et pour rayon R : montrer que lorsqu'on parcourt une distance $d = 1000$ km sur ce parallèle entre deux points A et B, une mesure de l'angle $\alpha = \widehat{APB}$ est $\frac{d}{R}$ radians ou $\frac{180}{\pi}\frac{d}{R}$ degrés.

2. Igor Moustaïev part de chez lui à Novosibirsk (latitude 55° Nord) faire un tour de Sibérie : il prend un avion qui le mène plein Nord pendant 1000 km puis il prend un deuxième avion qui l'emmène plein Est pendant 1000 km, un troisième au Sud pendant 1000 km, enfin un quatrième vers l'Ouest. Quelle est la distance parcourue par le dernier avion ?

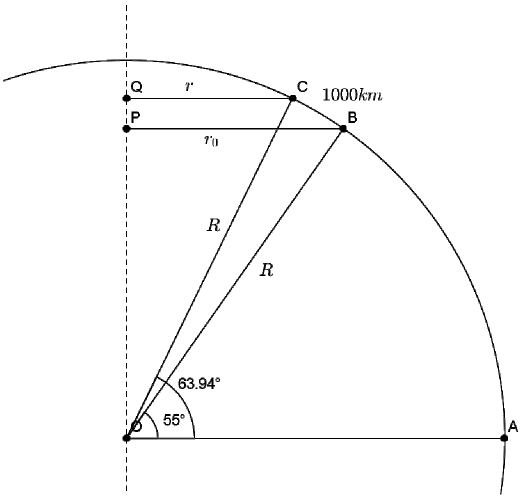
3. Jésus Martinez rencontre son ami Paco Montaner au Bar des Amis ; la température est de 35 °C. Il lui raconte la mésaventure qu'il vient de vivre : « Figure-toi qu'en déchargeant des caisses, le train dans lequel je travaillais est parti sans prévenir : j'ai fait 200 km vers le Nord, 200 km vers l'Ouest, 200 km vers le Sud et 200 km vers l'Est… et je suis revenu à mon point de départ ! »

« Amigo, c'est normal puisque… aaargh… » lui dit Paco en s'écroulant dans un dernier râle, un couteau planté entre les deux épaules… Où habitent Paco et Jésus ¿

<u>Correction</u>

1. Pour un angle de 360 ° on parcourt $2\pi R$ km, soit pour 1 °, $\frac{2\pi R}{360}$ et pour α ,

$$\frac{2\pi R}{360}\alpha = \frac{\pi R}{180}\alpha = d \Leftrightarrow \alpha = \frac{180}{\pi R}d \text{ ou } \frac{d}{R} \text{ en radians.}$$



2. À la latitude 55° le rayon du parallèle est

$$r = R\cos 55° = 3670{,}89 \text{ km}.$$

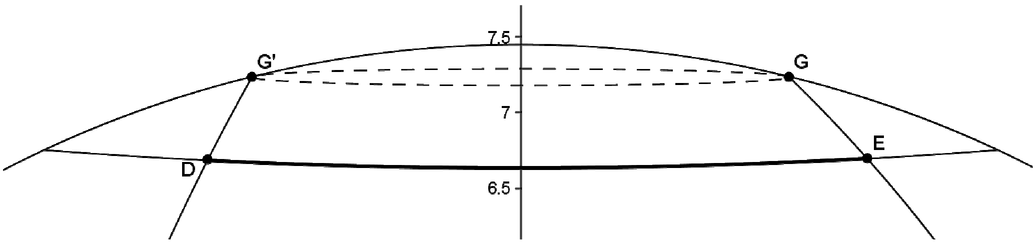
En montant de 1000 km, il parcourt un angle de $\frac{1000}{R} = 0{,}156$ rad et atteint la latitude 63,95° ou $\beta = 1{,}116$ rad .

À cette latitude le rayon du parallèle est $r = R\cos\beta = 2810{,}34$ et on parcourt 1000 km en décrivant un angle de $\gamma = \frac{1000}{2810{,}34} = 0{,}3558$ rad

d'où en revenant à la latitude 55° la distance

$$d' = \gamma \times r = 0{,}3558 \times 3670{,}89 = 1306{,}1 \text{ km}.$$

3. Pour que ça soit possible, il faut que les 200 km vers le Nord se fassent symétriquement à l'Équateur, soit 100 km au sud de l'Équateur… Évidemment il pourrait aussi être un peu en-dessous du Pôle Nord et tourner plusieurs fois autour du pôle puis redescendre vers le Sud et retourner à la maison…



Comme il fait 35 ° et qu'il n'y a pas de trains au Pôle Nord, la situation ne concorde pas… mais les calculs peuvent être amusants… Serait-ce possible au Pôle Sud ¿

20-c : Parlons le MIU (autres que S-STI)

Dans le jeu suivant, on appelle *mot* une suite de lettres ou *chaîne de caractères*.

Les *mots* que nous allons considérer n'utilisent que les trois lettres M,I et U, autant de fois que l'on veut (IMUUIM est un tel *mot*).

Le but du jeu est de fabriquer des mots nouveaux à partir du seul mot MI.

Pour cela, il y a quatre règles (et quatre seulement) qui permettent d'agrandir la collection de mots.

- R_1 : Si vous possédez un mot se terminant par I, vous pouvez lui rajouter un U à la fin.

Par exemple avec MI vous pouvez faire MIU

- R_2 : Si vous avez un mot de la forme Mx où x représente n'importe quelle chaîne de caractères jusqu'à la fin du mot, vous pouvez faire le mot Mxx.

Par exemple avec MIU vous pouvez faire MIUIU et avec MI vous pouvez faire MII.

- R_3 : Si dans un mot vous avez III (trois fois la lettre I) vous pouvez remplacer ce III par U et inversement U par III.

Par exemple avec UIIIM vous pouvez faire UUM ou IIIIIIM.

- R_4 : Si dans un mot vous avez UU à n'importe quel endroit vous pouvez supprimer ce UU.

Par exemple avec MIMUU vous pouvez faire MIM.

1. Montrez qu'on peut fabriquer le mot MUIUI (indiquer soigneusement les étapes suivies avec les numéros des règles utilisées).
2. Montrez qu'on peut fabriquer le mot MUIIU (même consigne qu'au 1.)
3. Peut-on fabriquer le mot MU ? Si non, pourquoi ?

En tous cas, aMIUsez vous bien !

Correction

1. $MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIIII \xrightarrow{R3} MUI \xrightarrow{R2} MUIUI$.

2. $MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIIII \xrightarrow{R1} MIIIIU \xrightarrow{R3} MUIU \xrightarrow{R2} MUIUUIU \xrightarrow{R4} MUIIU$.

3. Montrons qu'il est impossible d'obtenir MU.

Pour chaque mot m obtenu, notons $N(m)$ le nombre de lettres 7 présentes dans ce mot.

Au départ $N(MI) = 1$.

Si on a un mot m et qu'on fabrique un mot m' en utilisant une des quatre règles, avec R1 et R4, le nombre de 7 ne change pas. Avec R2, on a $N(m') = 2N(m)$, et avec R3, on a $N(m') = N(m) - 3$.

En utilisant le langage commode des congruences : module 3, la seule règle qui modifie $N(m)$ est R2, et par cette règle $N(m)$ *est* multiplié par $-1 = 2$ [3].

Il est donc exclu en partant de $m = MI$ avec $N(m) = 1$, d'arriver à un mot final MU avec $N(MU) = 0$.

Au niveau première, on parlera seulement de divisibilité par 3....

20-d : Quitte ou double (autres que S-STI)

Dans la suite des entiers positifs ci-dessous :

$$1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, \ldots$$

les entiers qui sont absents, à savoir 2, 6, 8, 10, 14, 18, … sont exactement les doubles de ceux qui sont présents.

1. a. Montrez que les nombres impairs sont tous présents dans la suite.

b. Montrez que les nombres de la forme $2I$ où I est un nombre impair sont tous absents de la suite.

c. Montrez que les nombres de la forme $4I$ où I est un nombre impair sont tous présents dans la suite.

d. Que pouvez-vous dire des nombres de la forme $8I$? de la forme $16I$?

2. On cherche la quantité de nombres inférieurs à 100 dans la suite en complétant le tableau suivant :

Présents	De … à …	Nombre de termes
impairs	de 1 à 99	50
les $4I$	de 4×1 à $4\times 25(=100)$	?
les $16I$	?	?
les $64I$	?	?
	Total	

3. Procédez de manière semblable pour trouver le 2012-ème nombre de la suite.

Correction

1. a. Les nombres impairs sont tous présents dans la suite car il manque tous les doubles des présents : on a 1 donc il manque 2, on a alors 3 donc il manque 6, on a 4 donc il manque 8, etc. Aucun impair n'est un double donc il y a tous les impairs.

b. Comme il y a tous les impairs, tous les $2I$ sont absents de la suite.

c. et d. Comme les $2I$ sont absents, les $4I$ sont présents, par contre les $8I$ seront absents (doubles des $4I$) et les $16I$ seront présents, etc.

2. On cherche la quantité de nombres inférieurs à 100 dans la suite :

Présents	De … à …	Nombre de termes
impairs	de 1 à 99	50
les $4I$	de 4×1 à $4\times25(=100)$	13
les $16I$	de 16×1 à $16\times6(=96)$	3
les $64I$	64 est seul	1
	Total	67

3. On procède de manière semblable pour trouver le 2012-ème nombre de la suite. Par exemple jusqu'à 3000 on a :

Présents	De … à …	Nombre de termes	Total
impairs	de 1 à 3000	1500	1500
les $4I$	de 4×1 à 4×750	375	1875
les $16I$	de 16×1 à 16×187	94	1969
les $64I$	de 64×1 à 64×46	23	1992
les $256I$	de 256×1 à 256×7	4	1996
les $1024I$	1024	1	1997

On y est presque : la réponse finale est 3019.

21. Nancy-Metz

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/olympiad.htm

21-a : Somme de carrés

1. a. Vérifier que 5 et 25 s'écrivent comme la somme des carrés de deux nombres entiers.

Considérons à présent $A=5\times25$. Vérifier que A s'écrit lui aussi comme la somme des carrés de deux nombres entiers.

Y'a-t-il unicité d'une telle écriture ?

b. Proposer un autre exemple de produit de deux nombres s'écrivant chacun comme la somme des carrés de deux nombres entiers, et qui s'écrit lui-même comme la somme des carrés de deux nombres entiers.

2. Considérons à présent $61 = 5^2 + 6^2$ et $53 = 2^2 + 7^2$.

On cherche à déterminer si le produit 53×61peut s'écrire comme la somme des carrés de deux nombres entiers.

Proposer un algorithme permettant de répondre à cette question et de donner une telle écriture.

3. a. Soient a, b, c, d des entiers choisis arbitrairement. Montrer que le produit $m\times n$ avec $n=a^2+b^2$ et $m=c^2+d^2$ peut lui-même s'écrire comme la somme des carrés de deux nombres entiers.

b. Déterminer deux entiers e et f tels que : $53\times61=e^2+f^2$.

21-b : Parties de mêmère

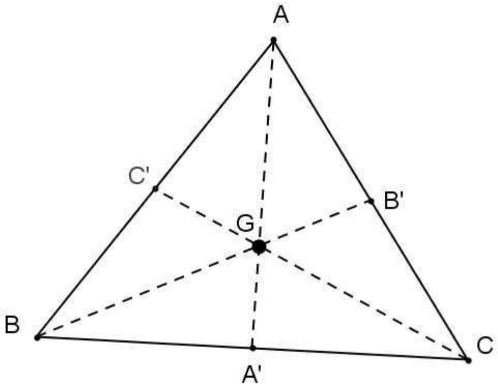
Le but de cet exercice est d'étudier le lien entre le centre d'un polygone et l'ensemble des droites qui le partagent en deux parties de même aire.

Le cas du triangle

On considère un triangle quelconque ABC. Le centre du triangle est G, le point d'intersection de ses médianes.

1. Donner un exemple de droite coupant le triangle en deux parties de même aire. Justifier.

2. Toutes les droites passant par G le coupent-elles en deux parties de même aire ? Si oui, justifier, si non, donner un contre-exemple.



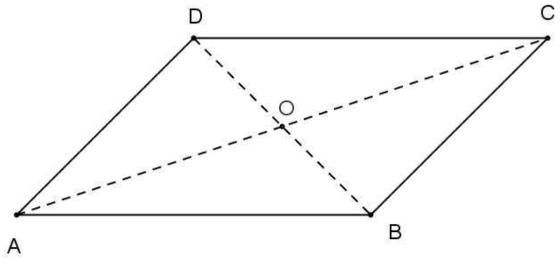
Le cas du parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme quelconque. Le centre du parallélogramme est O, point d'intersection de ses diagonales.

1. Donner 5 exemples de droites coupant le parallélogramme en deux parties de même aire. Justifier.

2. Monter que si une droite D ne contient pas le point O, elle ne partage pas le parallélogramme en deux parties de même aire.

3. Quel est l'ensemble des droites partageant un parallélogramme en deux parties de même aire ?



22. Nantes

http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/49496062/0/fiche___pagelibre/&RH=1160080235671

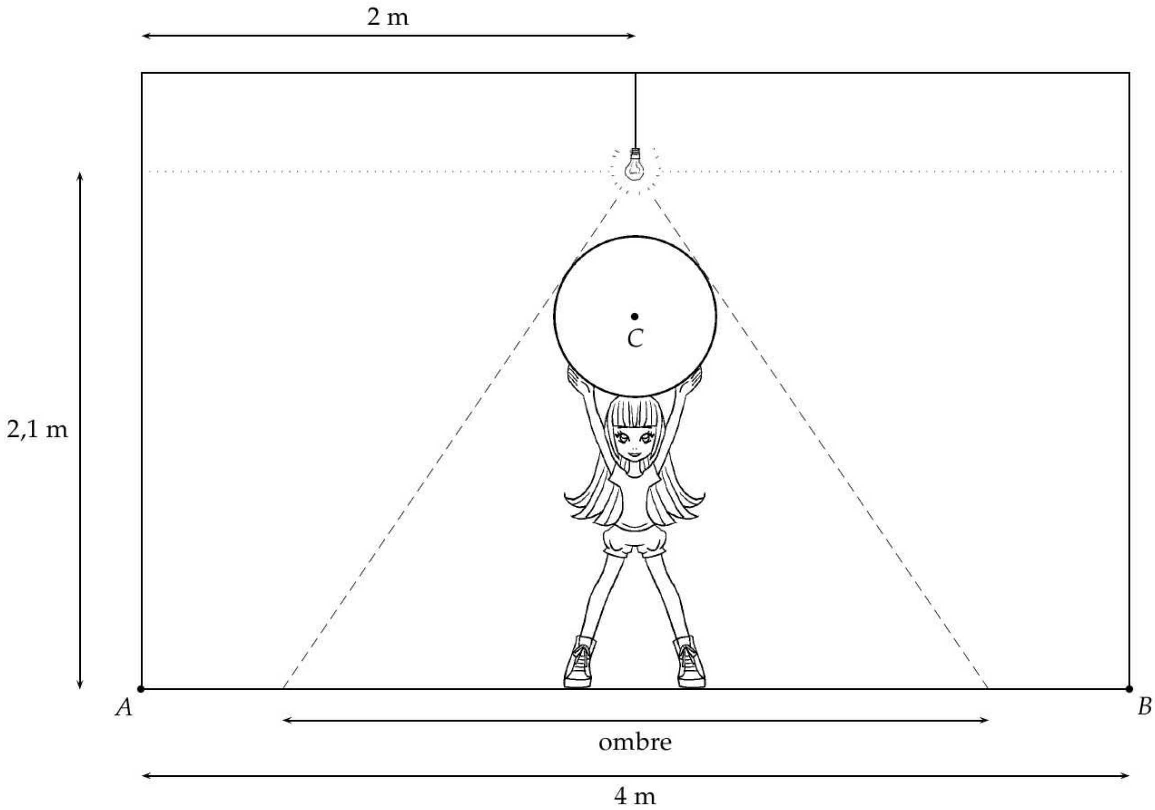
23. Nice+

http://www.ac-nice.fr/maths/

23-a : La chambre de Léa (S)

Le dessin ci-dessous représente une coupe transversale de la chambre de Léa.

Les dimensions de la pièce, en mètre, sont précisées sur la figure.



Léa tient dans ses mains un ballon.

Sur la figure, ce ballon est représenté par un cercle de rayon 30 cm et de centre C.

L'ampoule du plafond émet une lumière qui forme une ombre au sol.

Déterminer la plus petite hauteur à partir de laquelle Léa doit tenir son ballon pour que l'ombre de ce dernier recouvre entièrement le sol AB.

On donnera la hauteur du point C ainsi que la distance AC.

23-b : Dés dix-èdriques (S)

On lance quatre fois de suite un dé bien équilibré à 10 faces dont les faces sont numérotées de 0 a 9.

On obtient ainsi quatre chiffres que l'on note a, b, c et d dans leur ordre de sortie.

On forme alors l'entier N dont l'écriture décimale est $abcd$.

Exemple 1 : si l'on obtient successivement 2, 0, 1 et 2 avec le dé alors l'entier N est 2012.

Exemple 2 : si l'on obtient successivement 0, 7, 8 et 3 avec le dé alors l'entier N est 783.

1. Calculer la probabilité que :

a. le nombre N soit strictement supérieur a 2012.

b. le produit des quatre chiffres de N soit égal a 2012.

2. Soit la fonction F qui à tout entier s associe le nombre de lancers de quatre dés tels que la somme de ces quatre lancers soit égale a s.

Exemple 1 : $F(0) = 1$ car seule la combinaison 0000 permet d'obtenir une somme égale a 0.

Exemple 2 : $F(1) = 4$ car seules les quatre combinaisons 1000, 0100, 0010 et 0001 donnent une somme égale a 1.

a. Déterminer $F(2)$.

b. Calculer la probabilité que la somme des quatre chiffres de N soit égale a 3.

c. Écrire un algorithme qui calcule et affiche $F(s)$ pour s entier donné.

3. On dit que N est « croisé » lorsque $a = c$ et $b = d$.

a. Quelle est la probabilité que N soit croisé ?

b. Un nombre croisé non nul peut-il être un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier) ?

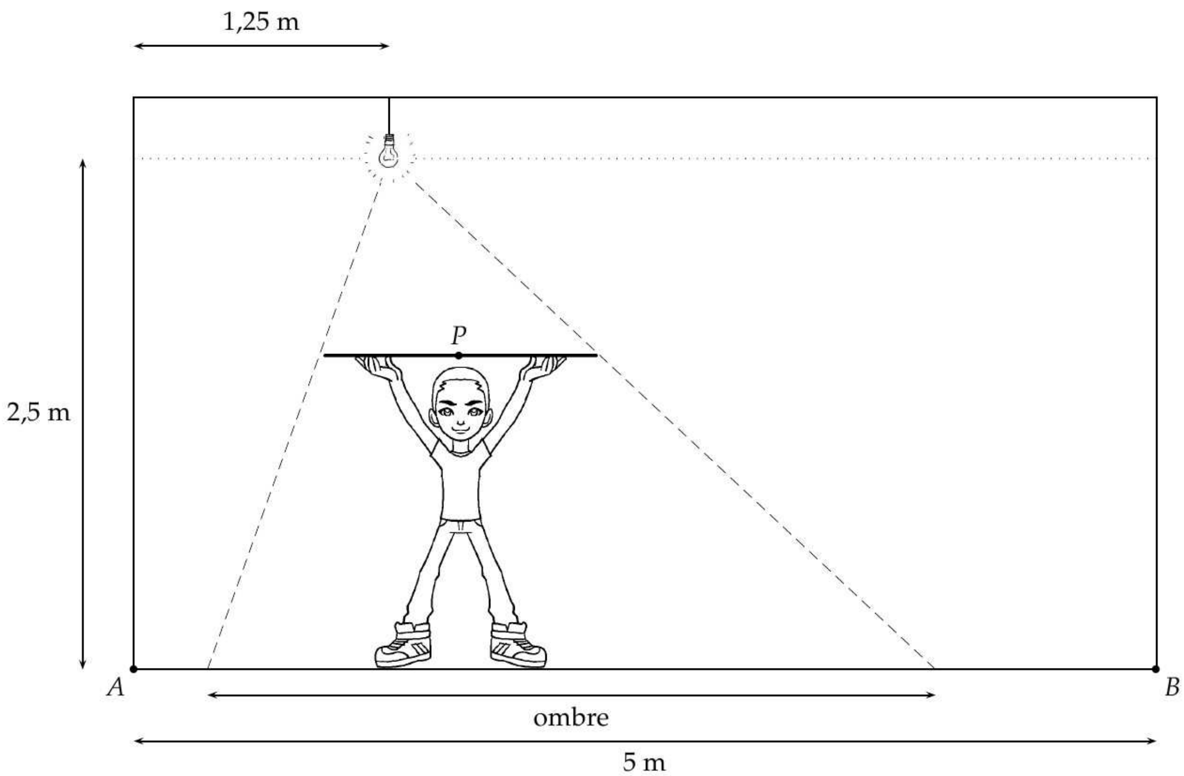
4. Si $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont les écritures décimales respectives de deux entiers N et N', on appelle « distance de N a N' » le nombre $D = (a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2 + (d-d')^2$.

Déterminer, parmi tous les entiers croisés, tous ceux dont la distance à 2012 est la plus petite possible.

23-c : La chambre d'Adrien (non S)

Le dessin ci-dessous représente une coupe transversale de la chambre d'Adrien.

Les dimensions de la pièce, en mètre, sont précisées sur la figure.



Adrien tient dans ses mains, parallèlement au sol, une plaque de bois.

Sur la figure, cette plaque est représentée par un segment de longueur 180 cm et de centre P.

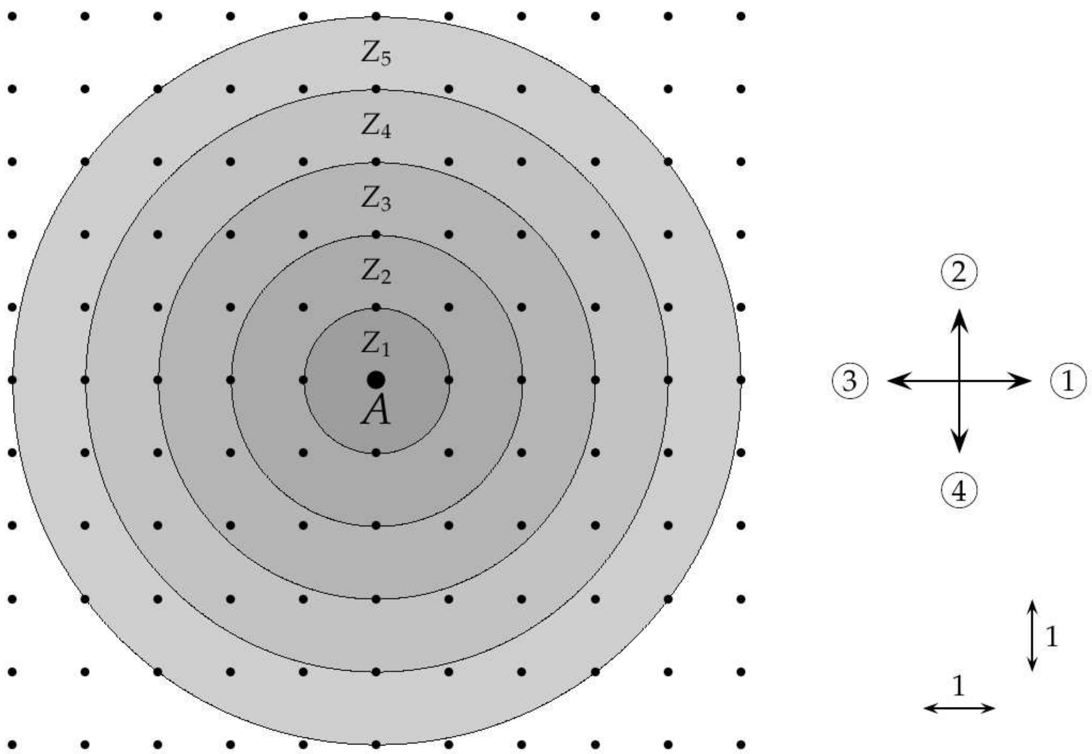
L'ampoule du plafond émet une lumière qui forme une ombre au sol.

Déterminer la plus petite hauteur à partir de laquelle Adrien doit tenir la plaque pour que l'ombre de cette dernière recouvre entièrement la longueur du sol AB.

Préciser dans ce cas la distance AP.

23-d : Réseau de points (non S)

Un jeu consiste à se déplacer cinq fois sur un réseau de points en partant d'un point A et à suivre, de façon aléatoire et équiprobable, une des quatre directions (Nord : 2, Sud : 4, Est : 1 ou Ouest : 3).



Sur la figure :

* la zone Z_1 est le disque de centre A et de rayon 1, frontière comprise ;

* la zone Z_2 est la couronne de centre A et de rayons 1 et 2 : elle contient le cercle de centre A et de rayon 2, mais pas le cercle de centre A et de rayon 1 ;

* la zone Z_3 est la couronne de centre A et de rayons 2 et 3 : elle contient le cercle de centre A et de rayon 3, mais pas le cercle de centre A et de rayon 2 ;

…, etc.

On simule un trajet en utilisant la calculatrice et en affichant cinq fois de suite un nombre entier aléatoire compris entre 1 et 4. On note ensuite le numéro de la zone dans laquelle le déplacement s'est terminé.

Exemple 1 : si la calculatrice retourne la série de nombres 2, 1, 1, 3 et 2, alors le trajet se termine dans la zone Z_3.

Exemple 2 : si la calculatrice retourne la série de nombres 1, 2, 3, 4 et 4, alors le trajet se termine dans la zone Z_1.

1. a. Simuler à l'aide de la calculatrice 20 déplacements dans le réseau puis recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Zone Z_1	Zone Z_2	Zone Z_3	Zone Z_4	Zone Z_5	Total
					20

b. Montrer qu'aucun trajet ne se termine au point de départ A.

c. Est-il possible d'atteindre toutes les zones a l'issue d'un trajet ? Justifier la réponse.

Exemple 3 : si la calculatrice retourne la série de nombres 1, 1, 1, 2 et 1, alors le trajet se termine dans la zone Z_5. De même pour la série de nombres 1, 1, 1, 1 et 1. Bien que ces deux trajets soient différents, ils se terminent tous deux dans la même zone.

2. a. Combien existe-t-il de trajets différents qui se terminent en zone Z_5 ?

b. Combien existe-t-il de trajets différents qui se terminent sur le cercle extérieur de la zone Z_5 ?

3. Écrire un algorithme qui simule 1000 trajets et qui affiche le nombre de ceux qui se terminent sur le cercle extérieur de la zone Z_5.

24. Orléans Tours+

http://www.ac-orleans-tours.fr/maths/rubrique.php3?id_rubrique=40

24-a : Des cercles à la suite …

On rappelle que, pour tout entier $n > 0$, la somme des entiers de 1 à n est donnée par :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'origine O.

On considère des cercles tous centrés sur l'axe des abscisses et définis de la manière suivante :

- le cercle C_1 passe par le point O et a pour rayon 1 ;

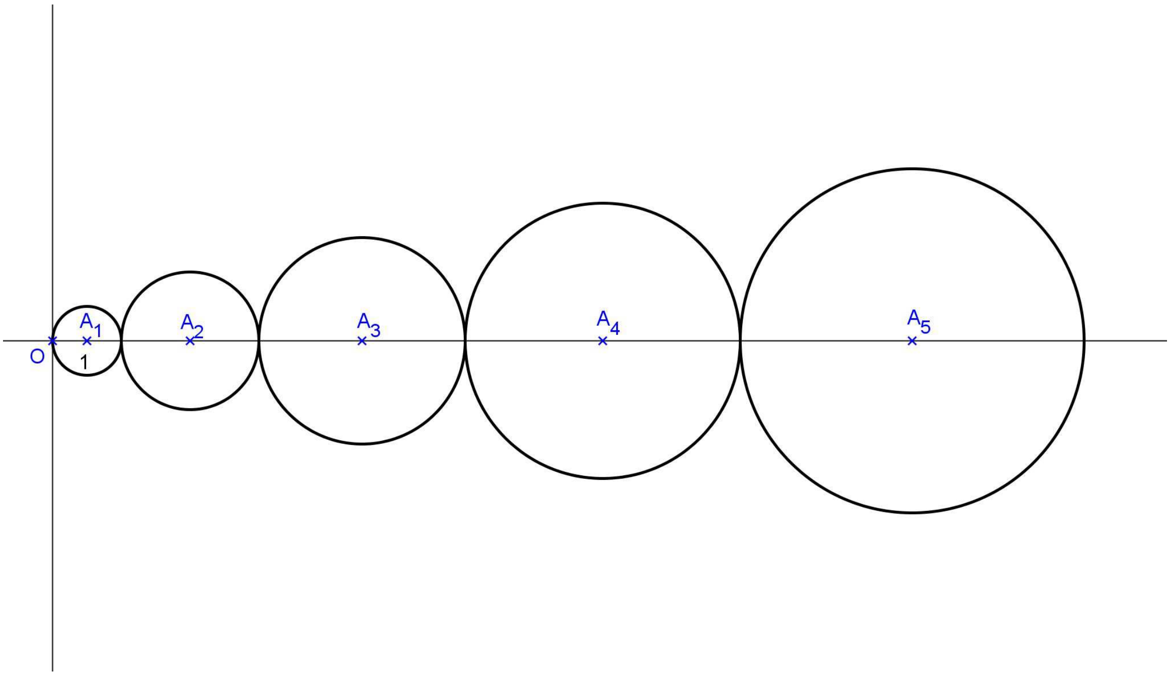
- le cercle C_2 est tangent extérieurement au cercle C_1 et a pour rayon 2 ;

- le cercle C_3 est tangent extérieurement au cercle C_2 et a pour rayon 3 ;

- et plus généralement, pour tout entier $n \geq 2$, le cercle C_n est tangent extérieurement au cercle C_{n-1} - et a pour rayon n.

Pour tout entier $n > 1$, on désigne par A_n le centre du cercle C_n et par x_n l'abscisse du point A_n.

On rappelle que les cercles sont centrés sur l'axe des abscisses et on suppose le repère choisi de telle sorte que tous les nombres réels x_n soient positifs.



1. a. Calculer les abscisses x_1, x_2 … x_6 respectives des points A_1, A_2, … A_6.

b. Conjecturer l'expression, pour tout entier $n > 1$, de x_n en fonction de n.

c. Valider votre conjecture par une démonstration.

2. On désigne par d_5 une droite passant par le point O et tangente au cercle C_5.

a. Construire d_5 sur la figure. Justifier la construction.

b. On considère les points suivants :

* le point de contact de la droite d_5 avec le cercle C_5 ;

* P_3 et Q_3 les deux points d'intersection de la droite d_5 et du cercle C_3 ;

* P_4 et Q_4 les deux points d'intersection de la droite d_5 et du cercle C_4.

Démontrer que les cordes $[P_3Q_3]$ et $[P_4Q_4]$ ont la même longueur. On pourra considérer les points I_3 et I_4, milieux respectifs de ces deux segments.

3. Dans cette question, on considère un entier naturel $n > 2$ et les n cercles de C_1 à C_n. Une droite d passant par le point O et tangente au cercle C_n définit des cordes sur chacun des cercles C_1, C_2, …, C_{n-1}.

a. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on désigne par P_k et Q_k les deux points d'intersection de la droite d et du cercle C_k. Démontrer que $P_kQ_k = \frac{2k}{n}\sqrt{n^2 - k^2}$.

b. Démontrer que, parmi les $n - 1$ cordes $[P_kQ_k]$, il en existe au moins deux qui ont la même longueur si et seulement si n^2 est la somme des carrés de deux entiers.

c. Pour $n = 6$, une droite d passant par le point O et tangente au cercle C_6 définit des cordes sur chacun des cercles C_1, C_2, …, C_5. Parmi ces cinq cordes, en existe-t-il deux qui ont la même longueur ?

d. Et pour $n = 10$?

24-b : Accrochez les wagons !

Dans cet exercice, l'unité de masse sera la tonne et l'unité de longueur le mètre.

Un convoi ferroviaire est constitue de N wagons choisis parmi deux types :

- Wagons de type A : longueur 20, masse totale 60 ;
- Wagons de type B : longueur 30, masse totale 100.

Un convoi de cinq wagons peut être symbolisé par une écriture du type (A,B,A,A,B), désignant les wagons dans l'ordre du convoi.

Ainsi les deux convois de trois wagons symbolises par (A,A,B) et (A,B,A) sont considérés comme distincts.

On note L la longueur totale du convoi, qui ne tient pas compte des espaces entre les wagons, ni des motrices.

1. On forme un convoi de longueur 310 admettant exactement N wagons.

a. Pour quelle valeur de N ce convoi a-t-il une masse totale maximum ?

b. De combien de façons distinctes peut-on former un convoi répondant aux conditions de la question précédente ?

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de convois distincts de longueur $L = 10 \times n$. Ainsi, u_5 désigne le nombre de convois distincts de longueur 50.

a. Déterminer u_{10}, c'est-à-dire le nombre de convois distincts de longueur 100.

b. Compléter le tableau suivant :

n	2	3	4	5	6	7
u_n						

c. Calculer u_8 à l'aide du tableau précédent en remarquant que tout convoi de longueur 80 se termine soit par un wagon A, soit par un wagon B.

d. Retrouver la valeur de u_{10}, puis calculer u_{15} et u_{20}.

3. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de calculer u_n, lorsque l'on saisit une valeur de n.

25. Paris

http://www.ac-paris.fr/portail/jcms/d_5402/disciplines-maths-portail

25-a : Breaking the calculette

On dispose d'une calculatrice cassée. Quand on l'allume, elle affiche 0 et se trouve en mode degré. Les touches numériques ne fonctionnent pas ; les seules touches qui sont en bon état sont les touches $\boxed{\cos}$, $\boxed{\sin}$ et $\boxed{\tan^{-1}}$.

On admet que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\cos^{-1}(x) \in [0\,;90]$ et $\cos\left(\cos^{-1}(x)\right) = x$.

On admet que, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\tan^{-1}(x) \in [0\,;90]$ et $\tan\left(\tan^{-1}(x)\right) = x$.

Exemple de séquence de calcul avec cette calculatrice :

* *on allume la calculatrice : elle affiche* 0 ;

* *on tape alors sur la touche* [cos] *: elle affiche* 1 ;

* *on tape sur la touche* [$\tan^{-1}$] *: elle affiche* 45.

1. Montrer que pour tout $z \in]0\,;1]$, $g(z) = \tan^{-1}(\cos(z)) = \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{z}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = \sin(\tan^{-1}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. On utilise l'algorithme suivant :

Début | Choisir un entier n > 1 ;
allumer la calculatrice ;
taper sur la touche [cos] ;
pour i allant de 1 à $n^2 - 1$ faire
taper sur la touche [$\tan^{-1}$] ;
taper sur la touche [sin] ;
Fin | Fin pour.

Quel résultat obtient-on à l'écran de la calculatrice après avoir appliqué cet algorithme avec n = 1000 ?

4. Comment peut-on obtenir le nombre entier 2012 a l'écran ?

25-b : Morpion

Deux joueurs établissent les règles d'un jeu : sur un damier rectangulaire de dimensions quelconques $n \times p$ (n lignes et p colonnes), n > 1 et p > 1, chaque joueur à tour de rôle coche une case. La case cochée ainsi que toutes celles qui se trouvent au-dessus et à droite, lorsqu'elles existent, sont neutralisées.

Exemple : dans le cas ci-dessous la croix désigne la case cochée, et le grisé les cases neutralisées.

						X		

Le perdant est celui qui coche la dernière case. Montrer que celui qui joue le premier a une stratégie gagnante :

* dans le cas $n \times n$ (c'est à dire p = n) ;

* dans le cas $2 \times p$ (c'est à dire n = 2) ;

* dans le cas général.

26. Poitiers

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?rubrique26

26-a : N mille (S)

Soit N_{1000} l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 999.

On définit sur N_{1000} la fonction F de la manière suivante : si n appartient à N_{1000}, on remplace chaque chiffre a de l'écriture décimale de n par $2a+2$, qui est un nombre à un ou deux chiffres. Le nombre $F(n)$ est alors obtenu en écrivant à la suite ces nombres.

Par exemple, si $n = 3$, il y a un seul chiffre $a = 3$ qui est remplacé par $2\times3+2=8$. Donc $F(3)=8$.

Si $n = 47$, on remplace le chiffre 7 par $2\times7+2=16$, le chiffre 4 par $2\times4+2=10$, donc $F(47)=1016$ (10 suivi de 16). De même, $F(526)=12614$ (12 suivi de 6 suivi de 14).

1. Calculer $F(857)$.

2. On suppose, dans cette question seulement, que n est un nombre à deux ou trois chiffres : $n = cdu$ (u est le chiffre des unités, d est celui des dizaines et c celui des centaines). On note n' le nombre à un ou deux chiffres cd obtenu en retirant de l'écriture de n le chiffre des unités.

Par exemple, si $n = 47$, $n' = 4$; si $n = 247$, $n' = 24$.

Montrer que $F(n)=10F(n')+F(u)$ ou $F(n)=100F(n')+F(u)$. Préciser, en fonction de la valeur de u, quelle égalité on doit utiliser.

3. Montrer que l'équation $F(n)=3n$ a trois solutions.

Indication - Commencer par déterminer le chiffre u des unités de n, puis chercher n'...

4. L'équation $F(n)=5n$ a-t-elle des solutions ?

5. Résoudre l'équation $F(n)=23n$.

26-b : Découpe de rectangle (tous)

Le rectangle AH'A'H ci-dessous est pavé par quatre pièces numérotées 1, 2, 3 et 4, **toutes de même forme** et il y a seulement deux tailles de pièce. Les grandes pièces 1 et 2 sont identiques de même que les pièces 3 et 4. Il y a donc proportionnalité entre les côtés correspondants des grandes pièces et des petites pièces.

Pour des raisons esthétiques on impose FG = AH/2.

1. Pourquoi a-t-on alors obligatoirement BC = DE ?

2. Si AH = 8 et HG = 4, que valent les autres côtés de la pièce 1 ? Donner aussi les longueurs des côtés de la pièce 4.

3. Même question que la précédente avec AH = 8 et AB = 9.

4. Si les dimensions du rectangle AH'A'H sont AH' = 13 et AH = 12, que valent les côtés des pièces 1 et 4 ?

5. Peut-on paver un carré de la sorte ? Justifier la réponse.

26-c : Vendredi (autres que S)

Robinson, oublié sur son île, occupe son lundi après-midi d'été en traçant des nombres (des entiers naturels) sur le sable.

Il écrit le nombre qu'il a choisi, puis, en dessous il écrit le nombre suivant qui doit décrire la composition en chiffres du nombre qu'il vient d'écrire en comptant le nombre d'apparitions des différents chiffres de 9 a 0 (dans cet ordre).

Par exemple, si le nombre choisi par Robinson est 2040, ce nombre est compose d'un 4, un 2, deux 0 (on énumère les chiffres de 2040 dans l'ordre décroissant), ce qui signifie que Robinson va tracer en dessous le nombre un-4-un-2-deux-0, c'est a dire : 141220.

Vous pouvez vérifier que le troisième nombre sera 14222110.

1. Quel sera le quatrième nombre tracé par Robinson ?

2. Robinson continue à rainurer le sable puis constate qu'après quelques étapes supplémentaires, il écrit toujours le même nombre. Lequel ?

3. Le mardi, la nuit ayant porté conseil et la marée ayant effacé la plage, Robinson choisit un nouveau nombre de telle sorte que le nombre suivant soit égal au premier. Il vérifie avec satisfaction que ce nombre est même le plus petit possible a posséder cette propriété. Quel est ce nombre ?

4. Le mercredi, Robinson trace une colonne de quatre nombres, mais une vague recouvre les trois premiers. Le quatrième est son année de naissance : 1632. Quel était le premier ?

Comme il y a de nombreuses solutions, donnez simplement la plus petite et la plus grande d'entre elles et déterminez le nombre de solutions.

5. Le jeudi, Robinson trace un premier nombre (notons-le a), puis le nombre suivant (notons le b, qui est différent de a), mais quand il écrit le troisième, il constate avec émerveillement qu'il est identique au nombre a. Combien vaut a ?

Cette question a plusieurs solutions, mais serez-vous capable de trouver la plus petite valeur possible du nombre a ?

Le vendredi, Robinson trouve une trace de pas dans le sable ...

27. Reims

http://www.ac-reims.fr/editice/index.php?option=com_k2&view=item&layout=item&id=507&Itemid=602

27-a : Paul sans Virginie (non S)

Paul attend Virginie qui n'arrive pas.

La première fois, il décide de l'attendre encore une heure mais elle n'arrive pas.

Paul ne se résout cependant pas à partir, il décide de l'attendre encore une demi-heure mais elle n'arrive pas.

Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit 1/4 d'heure) mais elle n'arrive pas.

Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit 1/8 d'heure) mais elle n'arrive pas.

Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit 1/16 d'heure) mais elle n'arrive pas.

Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit 1/32 d'heure) mais elle n'arrive pas.

Et ainsi de suite....

Paul va-t-il attendre indéfiniment Virginie ? Sinon, combien de temps au total va-t-il attendre ?

La seconde fois Paul attend une heure mais Virginie n'arrive encore pas !

Paul l'attend encore une demi-heure mais elle n'arrive pas.

Paul l'attend encore 1/3 d'heure mais elle n'arrive pas. Paul l'attend encore 1/4 d'heure mais elle n'arrive pas. Paul l'attend encore 1/5 d'heure mais elle n'arrive pas. Paul l'attend encore 1/6 d'heure mais elle n'arrive pas. Paul l'attend encore 1/7 d'heure mais elle n'arrive pas. Paul l'attend encore 1/8 d'heure mais elle n'arrive pas. Paul l'attend encore 1/9 d'heure mais elle n'arrive pas. Paul l'attend encore 1/10 d'heure mais elle n'arrive pas.

Et ainsi de suite....

Montrer, sans faire le calcul, que : $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}>\frac{1}{2}$.

Paul va-t-il attendre indéfiniment Virginie ?

27-b : Construction par origami d'une racine cubique (S)

L'origami est l'art japonais du pliage du papier.

On admet que le pliage suivant est réalisable : étant données deux droites perpendiculaires, et deux points non situés sur ces droites, il existe un pliage envoyant un des points sur une des droites, et l'autre point sur l'autre droite.

L'exercice donne une application de ce pliage à la construction d'une racine cubique.

Soit m un réel non nul.

Dans un repère orthonormé, on considère le point A de coordonnées $(1/2, m)$ et le point B de coordonnées $(1, m/2)$. Soit un pliage envoyant A sur un point A' de l'axe des abscisses de coordonnées $(a, 0)$, et B sur un point B' de l'axe des ordonnées de coordonnées $(0, b)$.

Les droites (AA') et (BB') sont donc parallèles ; soit p leur coefficient directeur.

1. Calculer a et b en fonction de m et p.

2. Soit A'' le milieu de [AA'], et B'' le milieu de [BB']. Calculer le coefficient directeur de la droite (A''B'').

3. En déduire que $p^3 = m$. On utilisera, sans le démontrer, le fait que deux droites non parallèles aux axes de coordonnées sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

4. Soit H la projection orthogonale de B sur l'axe des ordonnées. Prouver que $B'H^3 = m$ (utiliser le résultat de la question précédente). Faire une figure.

28. Rennes

http://espaceeducatif.ac-rennes.fr/jahia/Jahia/lang/fr/pid/16941

28-a : Martin et le défi de Calculator (tous)

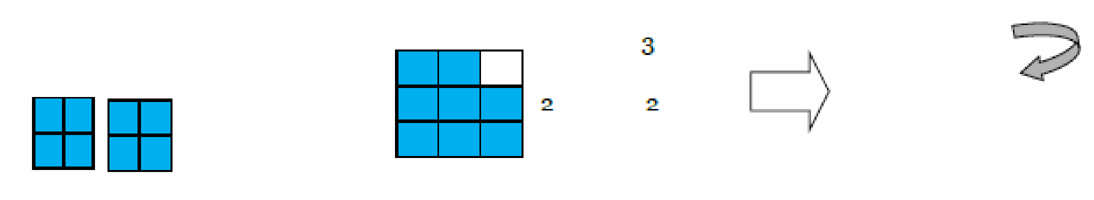
C'est la semaine des défis mathématiques dans le lycée Al Gorismus. Le savant Calculator est invité a cette occasion à faire une démonstration de ses talents.

Il annonce ainsi aux élèves présents :

« On dit que le carré d'un nombre b est un **quasi-double** du carré d'un nombre a si le carré de b est égal au double du carré de a à 1 unité près ».

Pour mieux se faire comprendre, Calculator donne des exemples :

Le carré de 3 est un quasi-double du carre de 2 car $2 \times 2^2 = 8 = 9 - 1 = 3^2 - 1$.



De même, le carré de 41 est un quasi-double du carré de 29 car $2 \times 29^2 = 41^2 + 1$.

Puis, le défi est lance par Calculator :

- Je vous donne une journée pour me dire si cette affirmation est vraie ou fausse :

Le carré de 318 281 039 est un quasi-double du carré de 225 058 681.

Martin, surnommé le petit génie de l'algorithmique, est bien décidé à relever ce défi.

Rentré a la maison, il commence a chercher et constate alors que sa calculatrice ne lui donne pas directement le résultat.

Qu'à cela ne tienne ! Il l'utilise tout de même pour construire un tableau donnant tous les couples d'entiers inferieurs a 100 dont le carré de l'un est un quasi-double du carré de l'autre.

Martin suppose ensuite que le carré de b est un quasi-double du carré de a, a et b étant des entiers naturels tous deux non nuls. Il établit alors un procédé qui, à partir du couple (a, b), lui permet d'obtenir d'autres couples vérifiant la même propriété.

Il faut dire que le tableau précédent l'a aidé à formuler une conjecture pour ce travail. Le reste de la recherche, il en fait son affaire… Martin peut dormir tranquille, il va pouvoir répondre au défi du savant Calculator.

Question : Retrouver la démarche qu'a pu suivre Martin (ou bien en proposer une autre qu'il aurait pu suivre) afin de relever le défi du savant Calculator.

28-b : Les amies (autres que S-STI)

Aziliz, Bleuenn, Clervie, Diana et Enora sont toutes dans la même classe.

On s'intéresse aux relations d'amitié entre elles. On considère qu'une fille ne peut pas être sa propre amie et que l'amitié est réciproque (ce qui signifie que : si A est une amie de B alors B est une amie de A).

Monsieur Kontan, leur professeur de mathématiques fait les observations suivantes :

a. Aziliz est une amie de Diana et Clervie n'a qu'une seule amie.

b. Aziliz a exactement deux amies et une des amies d'Aziliz est une amie de Diana.

c. Clervie et Aziliz ont les mêmes amies et Diana et Enora ne sont pas amies.

d. Bleuenn est une amie d'Aziliz et Enora est une amie de Clervie.

e. Diana n'a pas d'amie et Clervie est une amie de Bleuenn.

1. Montrer que Monsieur Kontan se trompe au moins une fois, c'est-a-dire que l'une au moins des cinq observations précédentes est fausse.

2. Montrer que si l'observation **e** est vraie, alors il y a au moins deux des quatre observations restantes qui sont fausses.

3. Montrer que, dans tous les cas, Monsieur Kontan s'est trompé au moins deux fois dans ses observations.

On suppose, pour la suite de l'exercice, que Monsieur Kontan s'est trompé exactement deux fois.

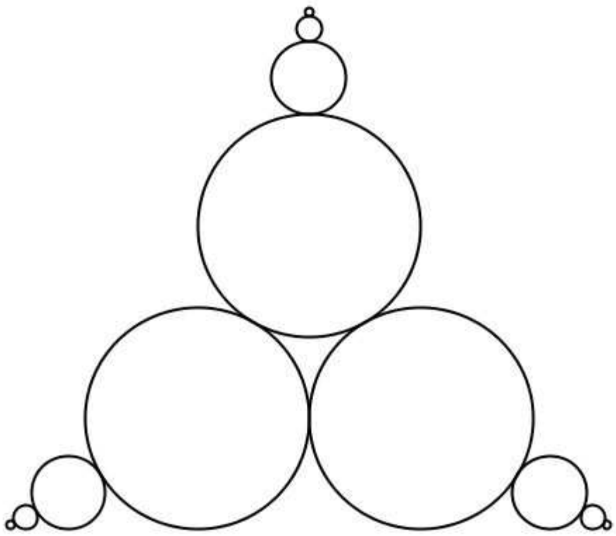
Madame Skrivan, leur professeure de français (qui elle ne se trompe pas) observe ce groupe de cinq filles et annonce l'affirmation notée **f** :

f. « Chaque fille a au moins une amie, aucune n'est amie avec toutes les autres et il y a exactement une fille du groupe qui a exactement trois amies dans le groupe ».

4. Combien Enora a-t-elle d'amies dans le groupe ? (on pourra étudier tous les cas possibles).

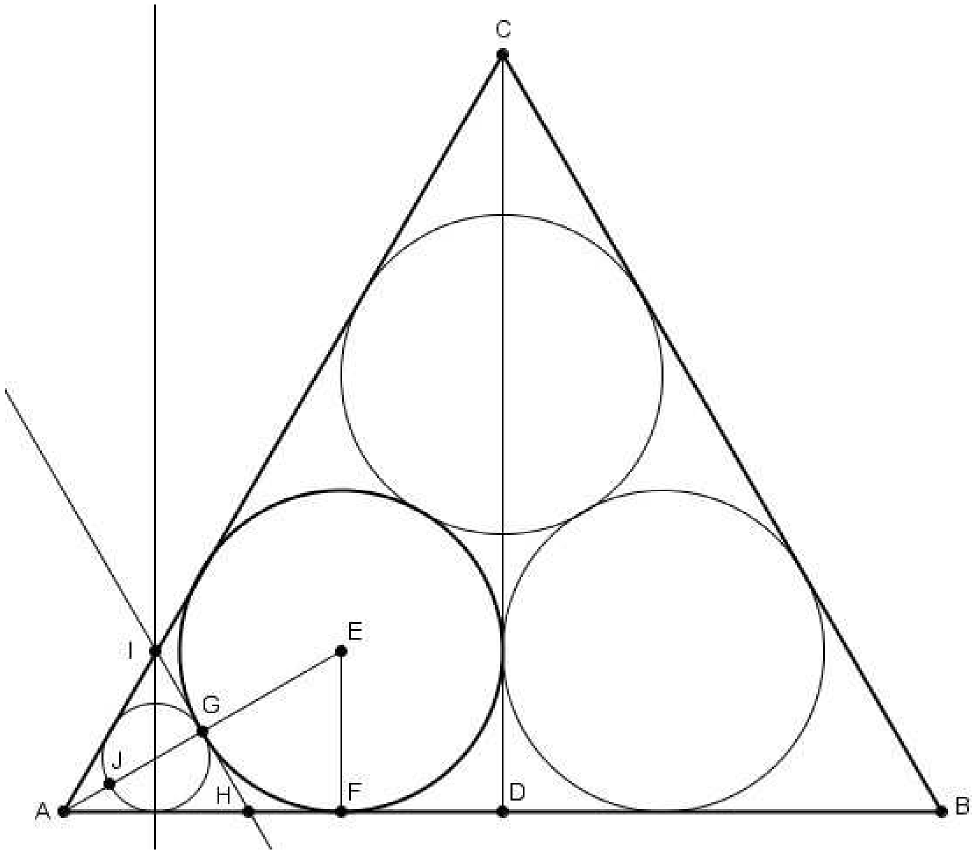
28-c : Les fêtes de Kerondec (S-STI)

Les fêtes de Kerondec approchent et pour les célébrer dignement en portant le costume traditionnel de la région, Marie veut reproduire le tablier de dentelle porté par une de ses aïeules et visible sur la photo ci-jointe. Elle relève alors un des motifs composé de douze disques réalisés en dentelle.



Marie souhaite le reconstituer fidèlement pour un faire un patron à partir d'un triangle équilatéral de côté égal a 18 centimètres.

Ce motif a été construit a partir d'un triangle équilatéral ABC dans lequel on a tracé trois grands cercles identiques, chacun tangent aux deux autres et chacun tangent à deux côtés du triangle.



1. On note a la longueur du côté du triangle équilatéral ABC.

a. Donner la hauteur h de ce triangle.

b. Donner le rayon r du cercle inscrit (C) dans ce triangle équilatéral. On notera O le centre de ce cercle.

2. Sur la figure ci-dessus, on note D le milieu de [AB], (C_1) le cercle de centre E inscrit dans le triangle ACD ; (C_1) est tangent au côté [AB] en F.

On appelle r_1 le rayon du cercle (C_1). Montrer que $r_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a$.

3. (C_1) coupe [AE] en G ; la tangente en G au cercle (C_1) coupe respectivement les segments [AB] et [AC] en H et I. Déterminer :

a. le milieu de [AE] ;

b. le rayon r_2 du cercle (C_2), cercle inscrit dans le triangle AHI.

4. Le cercle (C_2) a pour diamètre [GJ] et la tangente à ce cercle en J coupe respectivement les côtés [AB] et [AC] en H' et I'.

Déterminer le rayon r_3 du cercle (C_3), cercle inscrit dans le triangle AH'I'.

5. Déterminer le rayon r_4 du dernier cercle, tangent aux côtés [AB], [AC] ainsi qu'au cercle (C_3).

6. Réaliser, sur une feuille de papier millimétré, le motif à partir d'un triangle équilatéral de côté égal à 18 cm.

29. Rouen+

http://maths.spip.ac-rouen.fr/spip.php?rubrique86

29-a : Des algorithmes hasardeux (tous)

Pierre se présente devant une machine à algorithmes.

La machine lui demande de choisir un réel x au hasard.

La machine applique alors à x l'un des deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
VARIABLES	VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE	x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE	y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME	DEBUT_ALGORITHME
LIRE x	LIRE x
y PREND_LA_VALEUR $x - 1$	y PREND_LA_VALEUR $x - 1$
y PREND_LA_VALEUR $y \times y$	y PREND_LA_VALEUR $6/y$
y PREND_LA_VALEUR $y - 5$	y PREND_LA_VALEUR $2 + y$
AFFICHER y	AFFICHER y
FIN_ALGORITHME	FIN_ALGORITHME

Dans deux cas sur trois, elle choisit l'algorithme n°1 et donc, dans un cas sur trois, l'algorithme n°2.

1. Pierre entre le nombre 2 dans la machine. Quelle est la probabilité que la machine affiche 8 ?

2. La machine affiche –4. Quels nombres Pierre a-t-il pu entrer ?

3. a. Exprimer en fonction de x la valeur de y obtenue à l'affichage de l'algorithme 1.

On notera $f(x)$ cette expression.

b. Exprimer en fonction de x la valeur de y obtenue à l'affichage de l'algorithme 2.

On notera $g(x)$ cette expression.

4. Pierre choisit un nombre au hasard dans l'intervalle [–5 ; 5] et l'introduit dans la machine.

Quelle est la probabilité que le nombre affiché par la machine se trouve dans l'intervalle [–4 ; 4] ?

29-b : Fleurs et Légumes (S-STI)

Madame Olympe vient d'hériter d'un champ carré de côté 1 hectomètre.

1. Dans un premier temps, elle partage son champ en 4 parties, à l'aide de deux quarts de cercle.

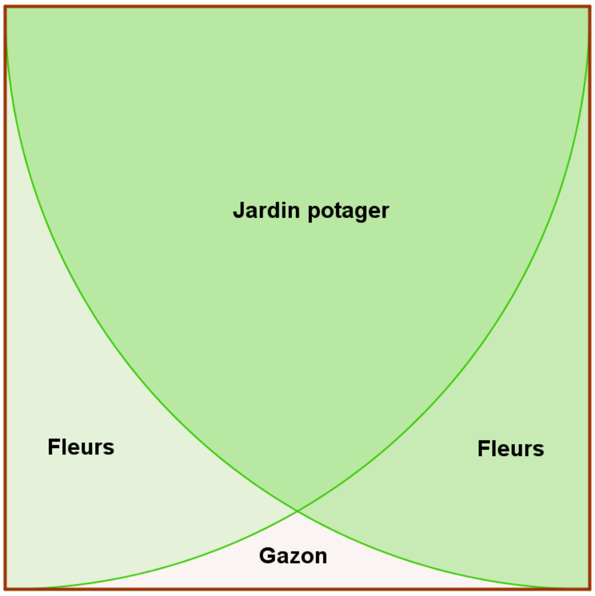
Dans la partie inférieure, elle sème du gazon, dans les deux parties latérales, elle plante des fleurs.

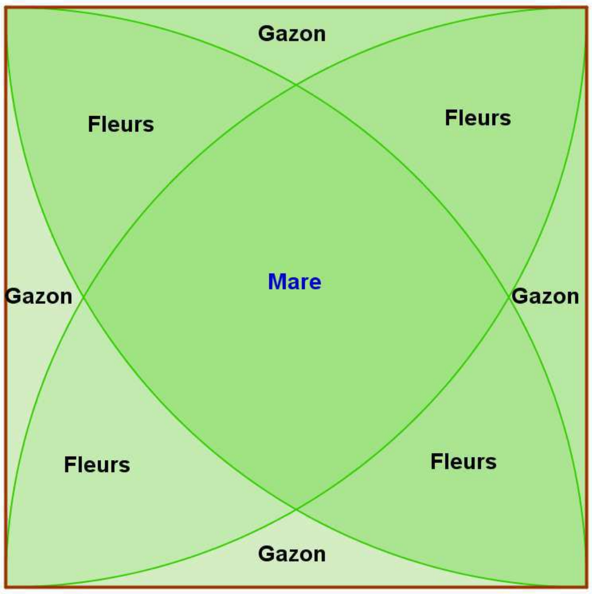
Elle réserve la partie supérieure pour y faire un jardin potager.

a. Calculer l'aire réservée au gazon.

b. Calculer l'aire réservée aux fleurs.

c. Calculer l'aire réservée au jardin potager.





2. Déçue par son jardin potager, elle décide de modifier la configuration de son champ et de rajouter deux autres quarts de cercle de manière à pouvoir créer une mare.

Elle partage alors son terrain de la manière exposée ci-contre.

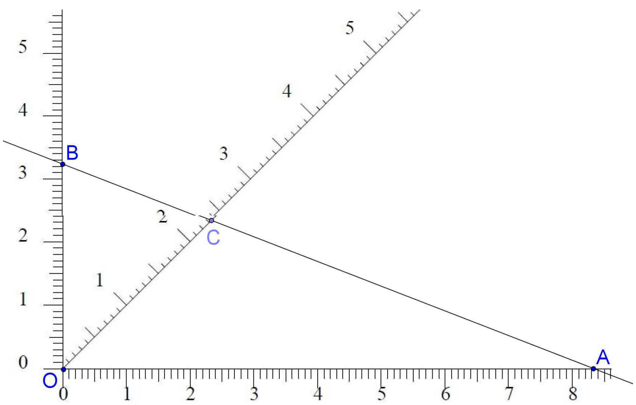
a. Calculer l'aire réservée au gazon

b. Calculer l'aire réservée aux fleurs

c. Calculer l'aire réservée à la mare.

29-c : Rapporteur ? (non S, STI)

Ci-dessous est présenté un instrument de calcul. L'objectif de l'exercice est d'en déterminer la fonction.



On considère un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

A est un point de la demi-droite $[O\,;\vec{i})$, distinct de O et B est un point de la demi-droite $[O\,;\vec{j})$, distinct de O. C est le point de la bissectrice issue de O dans le triangle OAB tel que les points A, B et C soient alignés.

On note a et c les abscisses respectives des points A et C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On note b l'ordonnée du point B dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Démontrer que $c=\dfrac{ab}{a+b}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

2. Expliquer alors l'usage que l'on peut faire de l'instrument de calcul représenté ci-dessus.

30. Strasbourg

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php?frame=.%2Fcompet%2Fsujets.php&m0=comp&m1=oly&m2=suj&categ=olymp

30-a : Eps (S)

Le professeur d'éducation physique et sportive demande aux élèves de son groupe de 24 garçons de se mettre en rangs pour former 6 lignes et 4 colonnes. Tous les garçons sont de tailles différentes.

Il sélectionne alors le plus grand de chaque ligne pour un tournoi de basket-ball et le plus petit de chaque colonne pour une course à cheval.

1. Un même élève peut-il être sélectionné à la fois comme basketteur et comme cavalier ?

2. Un cavalier peut-il être plus grand qu'un basketteur ?

30-b : Dé (S)

Les quatre faces d'un dé tétraédrique posé sur une table sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est posé sur la face numérotée 1. À chaque étape, Nicolas fait basculer le dé autour l'une des arêtes de la face sur laquelle il est posé et note le numéro de la face sur laquelle il se retrouve posé.

Au bout de 2012 basculements, Nicolas fait la somme S des 2012 chiffres qu'il a notés.

1. Donner la valeur maximale M et la valeur minimale m de la somme S ainsi obtenue.

2. La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre m et M ?

http://www.animath.fr/IMG/pdf/Strasbourg-S.pdf

30-c : Kougelhopf (non S)

Armelle laisse ses neveux pour un goûter d'anniversaire au Kougelhopf doré.

Ils ont le choix entre deux formules mais doivent tous prendre la même : la formule A est à 7 euros pour les grands, et 3 euros pour les petits ; la formule B est à 6 euros pour les grands, et 2 euros pour les petits.

Armelle n'a dans son porte-monnaie que des billets de 10 euros.

Avant de partir elle annonce à l'animatrice à laquelle elle confie ses neveux : « Quelque soit le choix de mes neveux, 3 billets seront insuffisants. Voici donc 4 billets, mais je sais que c'est trop, il en restera. »

Combien a-t-elle de grands et de petits neveux ?

30-d : Nombres (non S)

On écrit tous les nombres à quatre chiffres formés avec les chiffres 1, 2, 3, 4 sans répétition.

1. Combien y-en-a-t-il ?

2. Que vaut la somme de tous ces nombres ?

31. Toulouse

http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades/

31-a : Le concours d'Olympie (tous)

Tous les ans, la ville d'Olympie organise un concours. Ce concours débute à 14 heures précises.

1. Deux amis, Raymond et Eddie, qui habitent dans le même village à 10 km d'Olympie décident de se rendre à ce concours. Ils disposent d'un seul vélo qui ne peut transporter qu'une seule personne (pas de porte-bagages !).

Ils estiment que leur vitesse moyenne à vélo est de 20 km/h et que leur vitesse moyenne à pied est de 5 km/h.

Ils décident de partir à 12 h 30.

a. Raymond propose l'organisation suivante : il fait le début du parcours à vélo. Arrivé chez son cousin Albert qui habite à 3 km d'Olympie, il dépose son vélo et poursuit à pied. Lorsque Eddie arrivera chez Albert, il récupèrera le vélo et finira le parcours avec.

À quelle heure le dernier des deux amis va-t-il arriver à Olympie ?

Dans la suite, on suppose que l'on peut laisser le vélo, sans surveillance, n'importe où sur le chemin d'Olympie.

b. Raymond propose de laisser son vélo entre la maison d'Albert et Olympie. Le dernier des deux amis arrivera-t-il plus tard à Olympie que si Raymond laisse le vélo chez Albert ?

c. À combien de kilomètres d'Olympie Raymond doit-il déposer le vélo pour que la durée du trajet du plus lent des deux amis soit la plus courte possible ?

À quelle heure au plus tard peuvent-ils partir pour être tous les deux à l'heure au concours ?

2. Au dernier moment, Jeannie, camarade de Raymond et Eddie, se joint à eux pour aller au concours. On considère qu'elle se déplace, à vélo et à pied, aux mêmes vitesses moyennes que Raymond et Eddie.

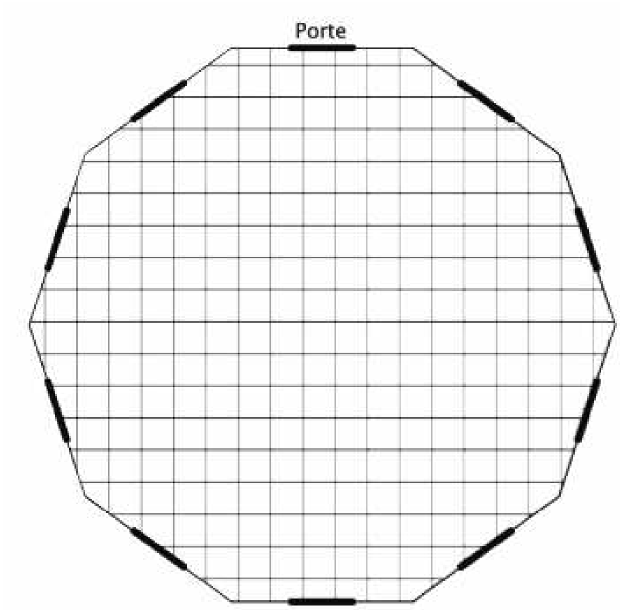
Raymond, Eddie et Jeannie veulent partir ensemble le plus tard possible et être à l'heure pour le début du concours.

a. S'ils disposent d'un seul vélo, à quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours et comment doivent-ils s'organiser ?

b. Jeannie décide finalement d'amener son vélo, lui aussi sans porte-bagages. Les trois amis disposeront donc de deux vélos pouvant transporter chacun une seule personne. À quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours ?

3. Jeannie se dit alors : « Si nous étions sept à vouloir aller à ce concours dans les mêmes conditions avec des bicyclettes sans porte-bagages, il en faudrait au moins cinq pour y arriver en moins d'une heure ». Jeannie a-t-elle raison ?

31-b : Peintures et gravures (non S)



Dans le salon en rotonde sont accrochés dix beaux tableaux à des clous équidistants les uns des autres : une gravure du port de Rouen (R), une nature morte de Paul Cézanne (Cz), une peinture de grand-père (GP), une gravure de Toulouse-Lautrec (TL), une peinture de la Tour Eiffel (TE), une peinture de Bernard Buffet (BB), une peinture de Paul Klee (K), une vieille carte du Monde gravée (CM), une gravure chinoise (Ch), une gravure japonaise (J).

Aujourd'hui, Maman propose de repenser la disposition des tableaux. Nous discutons donc de la meilleure façon de les accrocher ; il y a finalement six souhaits :

S_1 - D'abord, dit Maman, gravures et peintures doivent être alternées.

S_2 - Et puis, dit Papa, la gravure du port de Rouen ne doit surtout pas avoisiner la nature morte de Paul Cézanne ; ni la peinture de grand-père.

S_3 - Je voudrais que la gravure de Toulouse-Lautrec et la peinture de la Tour Eiffel soient diamétralement opposées, dit mon grand-oncle Arthur.

S_4 - … Que la peinture de Bernard Buffet soit à côté de la vieille carte du monde, dit ma petite sœur, mais que cette dernière soit elle-même voisine de la peinture de la tour Eiffel.

S_5 - La peinture du grand-père et la nature morte de Cézanne doivent encadrer la gravure chinoise, demande mon petit frère.

S_6 - Et moi, dis-je enfin, je souhaite simplement que le tableau de Bernard Buffet n'avoisine pas la gravure japonaise.

1. Maman commence par placer la carte du Monde au dessus de la porte et elle réussit finalement à accrocher tous les tableaux en faisant plaisir à tout le monde.

a. Proposer une disposition satisfaisant les six souhaits.

b. Y en a-t-il d'autres ? Si oui combien ?

2. Si c'est plutôt la peinture de Paul Klee que Maman avait choisie de placer au dessus de la porte, aurait-il été possible de disposer les tableaux ? Si oui, de combien de manières ?

3. Sans décider d'avance quel tableau est accroché au dessus de la porte, combien y a-t-il de dispositions possibles des tableaux respectant les six souhaits ?

4. a. Il semble que le nombre de tableaux s'intercalant entre la carte du Monde et la peinture de Paul Klee soit indépendant de la disposition des tableaux. Est-ce vrai ?

b. Est-ce vrai pour la peinture de Paul Klee et la peinture de grand-père ?

c. On choisit deux tableaux au hasard parmi les dix. Qu'est-ce qui est le plus probable ? :

• le nombre de tableaux s'intercalant entre eux ne dépend pas de la disposition ;

• le nombre de tableaux s'intercalant entre eux dépend de la disposition.

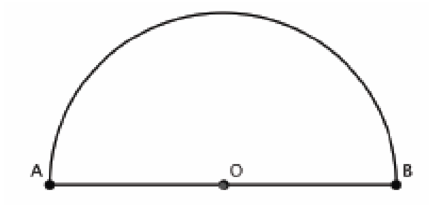
31-c : Largeur constante (S)

On considère une courbe fermée du plan et un point M de cette courbe. On peut alors toujours trouver un point N sur la courbe, pas forcément unique, pour lequel la distance MN - c'est-à-dire la longueur du segment $[MN]$ - est maximale.

Cette valeur maximale est appelée « **largeur** en M » de la courbe ; on la note $L(M)$.

On dit qu'une courbe est à largeur constante si la largeur est la même en chacun de ses points.

Dans cet exercice on étudie quelques courbes fermées et on examine si leur largeur est constante.



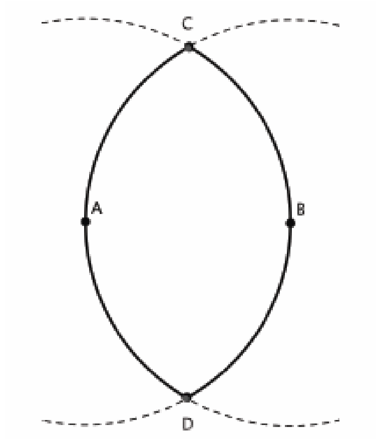
1. Soit la courbe fermée constituée par un segment [AB] de longueur $2R$ et un demi-cercle de diamètre [AB] ; on note O le milieu de [AB].

a. Déterminer en fonction de R la largeur en O de la courbe : $L(\text{O})$.

b. Déterminer en fonction de R la largeur en A de la courbe : $L(\text{A})$.

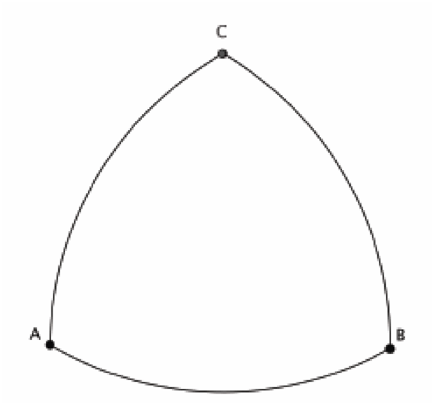
c. Cette courbe est-elle à largeur constante ?

2. Un cercle de centre O et de rayon R est une courbe fermée. Est-elle à largeur constante ?



3. La courbe fermée ci-contre est constituée des deux arcs de cercle tracés en trait plein. L'un des deux a pour centre A, l'autre a pour centre B. Ils ont tous les deux pour rayon AB et pour extrémités les points C et D communs aux deux cercles.

Cette courbe est-elle à largeur constante ?



4. La courbe fermée ci-contre est appelée *triangle de Reuleaux*.

Elle est construite à partir des sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté d. Elle est composée de trois arcs de cercle centrés respectivement en A, B et C et ayant pour extrémités les deux autres sommets du triangle équilatéral ABC.

a. M étant un point de l'arc BC autre que B et C, quel est le point du *triangle de Reuleaux* le plus éloigné de M ?

b. Le *triangle de Reuleaux* est-il une courbe à largeur constante ?

5. a. Construire sur la copie un *triangle de Reuleaux* de sommets A, B et C (on prendra 8 cm pour d) et les points d'intersection A', B' et C' des médiatrices des segments [BC], [AC] et [AB] avec les arcs de cercle composant le « triangle » de Reuleaux.

b. Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?

6. Un triangle équilatéral MNP étant donné, proposer au moins trois courbes fermées à largeur constante passant par ses trois sommets.

N.B. : Le *triangle de Reuleaux* doit son nom à l'ingénieur allemand Franz Reuleaux (1829-1905), qui fut au XIXe siècle un pionnier du génie mécanique ; ce « triangle » est associé au *moteur à piston rotatif* dont le rotor, qui n'est pas cylindrique, est à la base un « triangle » de Reuleaux.

32. Versailles

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades.htm

32-a : Mille et une lampes (S)

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Sur un cercle on dispose n lampes, régulièrement espacées, entre lesquelles sont disposés n commutateurs. Chaque commutateur a deux positions, « I » et « O ». Toute lampes est éteinte si elle se trouve entre deux commutateurs de même position, allumée si elle se trouve entre deux commutateurs placés dans des positions contraires.

1. Si $n = 8$, est-il possible que toutes les lampes soient allumées ? Si $n = 5$, est-il possible que toutes les lampes soient allumées ?

2. Si $n = 2012$, déterminer le nombre maximum de lampes qui peuvent être allumées, et donner les positions des commutateurs correspondants. Même question avec $n = 2011$.

3. Si $n = 2012$, est-il possible que la moitié exactement des lampes soient allumées ?

Même question avec $n = 10$.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 2012$.

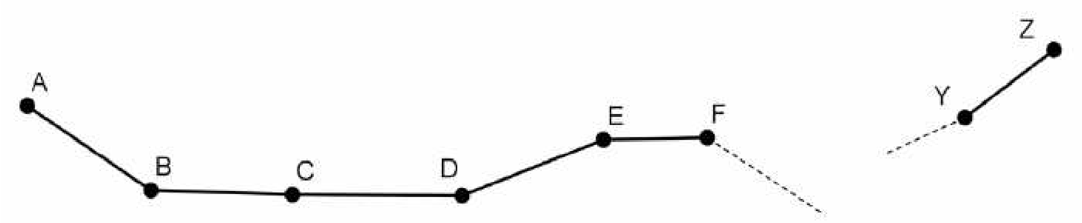
a. Est-il possible d'allumer exactement 4 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un carré ?

b. Est-il possible d'allumer exactement 8 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un hexagone régulier ?

c. Est-il possible d'allumer exactement 503 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un polygone régulier à 503 côtés ?

32-b : Inauguration (tous)

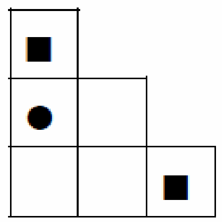
Olympiade-Ville va bientôt avoir sa ligne de métro. La longueur de trois sections (*) consécutives devra toujours être inférieure ou égale à 16 km et la longueur de cinq sections consécutives devra toujours être supérieure ou égale à 27 km.



Combien cette ligne a-t-elle de stations ?

(*) *Une section est un intervalle entre deux stations de métro*

32-c : Tableaux triangulaires (non S)



Un **tableau alternant de taille 3** (appelé dans la suite « tableau A3 ») est un tableau de la forme illustrée ci-contre, dont les cases sont soit vides soit occupées par un jeton carré ou par un jeton rond, en respectant la consigne suivante :

- à gauche d'un jeton carré, toutes les cases sont vides ;
- au-dessous d'un jeton rond, toutes les cases sont vides.

1. Donner un exemple de tableau A3 contenant 3 jetons carrés. Donner un exemple de tableau A3 contenant 3 jetons ronds.

2. Combien peut-il y avoir de jetons carrés dans un tableau A3 ?

3. Est-il possible que toutes les cases d'un tableau A3 soient occupées ? Combien de cases peuvent-elles être occupées, au maximum ? Donner un exemple.

4. Un **tableau alternant de taille n** (appelé « tableau A_n ») est constitué de la même manière et avec les mêmes règles sur une base de n cases.

a. Représenter un tableau A5.

b. Combien peut-il y avoir de jetons carrés dans un tableau A5 ?

c. Combien de cases d'un tableau An peuvent-elles être occupées, au maximum ?