

QUELQUES ASPECTS MATHÉMATIQUES DE LA CRISE ACTUELLE



Frédéric Laroche
Octobre 2008

Un petit calcul simple

- Somme des puissances successives d'un même nombre A :

$$S_n = A^0 + A^1 + A^2 + \dots + A^{n-1} + A^n$$

- Pour cela on multiplie S_n par $1-A$, soit

$$\begin{aligned} S_n (1-A) &= (1 + A^1 + A^2 + \dots + A^{n-1} + A^n)(1-A) \\ &= 1 + \cancel{A^1} + \cancel{A^2} + \dots + \cancel{A^{n-1}} + \cancel{A^n} - \cancel{A^1} - \cancel{A^2} - \dots - \cancel{A^n} - A^{n+1} = 1 - A^{n+1} \end{aligned}$$

- Et finalement $S_n = \frac{1 - A^{n+1}}{1 - A}$

Un petit calcul simple

$$S_n = \frac{1 - A^{n+1}}{1 - A}$$

Quand n devient très grand :

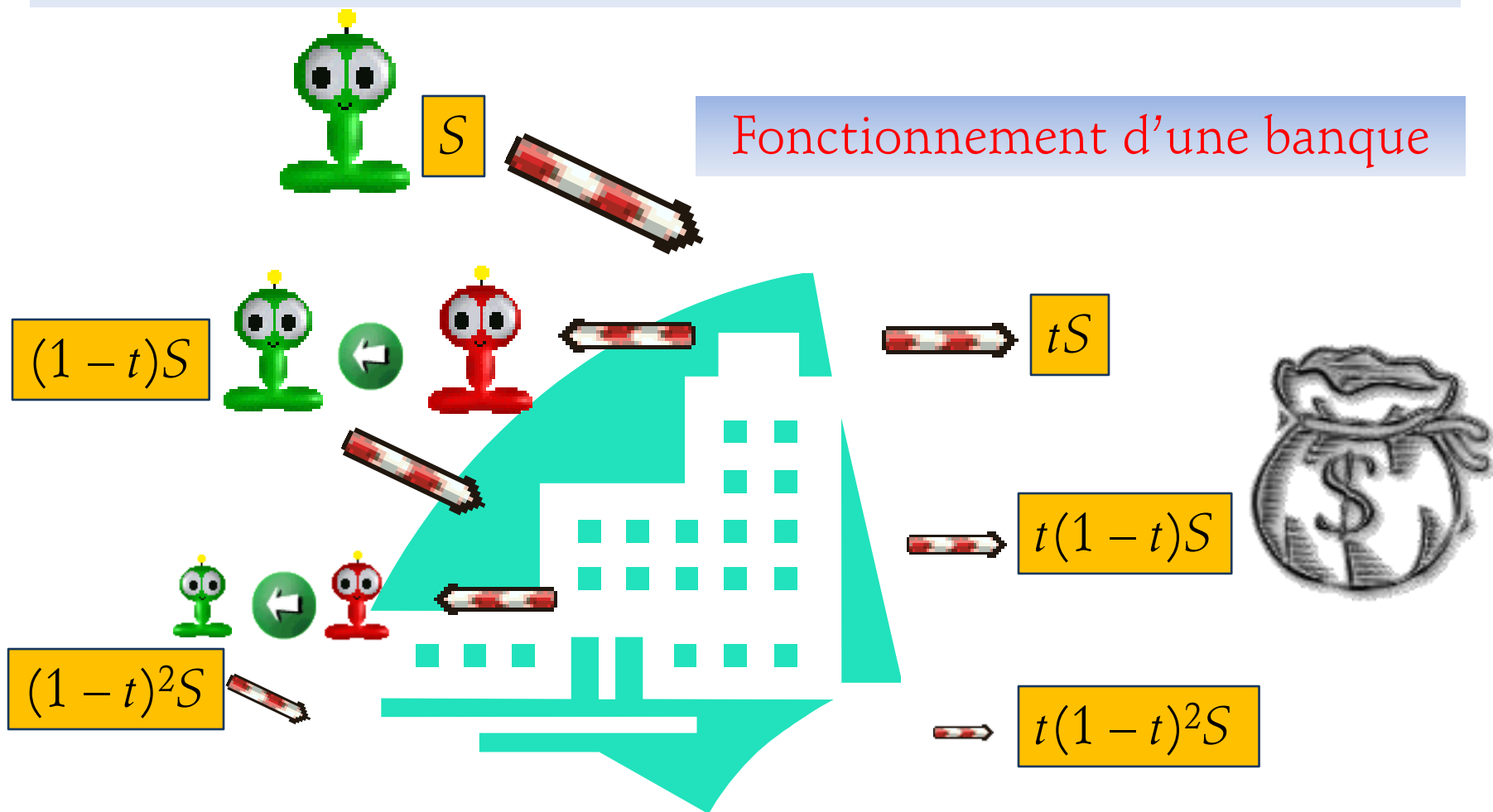
si $A < 1$, $A^{n+1} \rightarrow 0$ et

$$S_n \rightarrow \frac{1}{1 - A}$$

Par exemple $0,8^2 = 0,64 / 0,8^3 = 0,512 / 0,8^4 = 0,41 / \dots 0,8^{20} = 0,014$

$$S_n = 1 + 0,8^2 + 0,8^3 + \dots + 0,8^n \rightarrow \frac{1}{1 - 0,8} = \frac{1}{0,2} = 5$$

Prêter et provisionner



Prêter et provisionner

<i>client n°</i>	0	1	2	3	...	<i>n</i>
Dépôt	S	$(1-t)S$	$(1-t)^2S$	$(1-t)^3S$...	$(1-t)^nS$
Prêt	$(1-t)S$	$(1-t)^2S$	$(1-t)^3S$	$(1-t)^4S$...	$(1-t)^{n+1}S$
Réserve	tS	$t(1-t)S$	$t^2(1-t)S$	$t^3(1-t)S$...	$t^n(1-t)S$

La banque reçoit donc au total $D = S + (1-t)S + \dots + (1-t)^n S = S \left(1 + (1-t) + \dots + (1-t)^n \right)$



$$D = S \left(\frac{1 - (1-t)^{n+1}}{1 - (1-t)} \right) = \frac{S}{t} \left(1 - (1-t)^{n+1} \right)$$

Quand n devient grand, D tend vers $\frac{S}{t}$ car $1-t < 1$.

Prêter et provisionner

- La banque peut prêter



$$P = (1-t)S + (1-t)^2 S + \dots + (1-t)^{n+1} S = (1-t)S \frac{1-(1-t)^{n+1}}{1-(1-t)}$$

- Quand n devient grand, P tend vers

$$\frac{1-t}{t} S$$



- Multiplicateur de crédit =

$$\frac{1-t}{t}$$

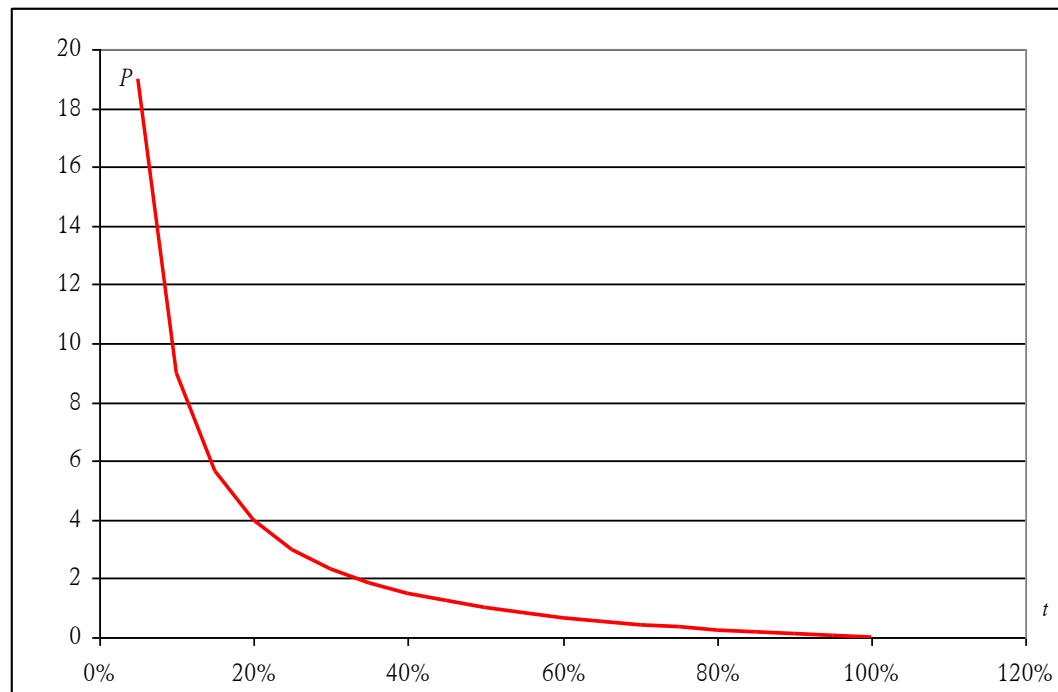
- Réserve (fonds propres)

$$R = \frac{1}{t} S - \frac{1-t}{t} S = S$$



Prêter et provisionner

- Les possibilités de prêt suivant le taux de réserve obligatoire en abscisse, le multiplicateur de crédit en ordonnée.
- Le FMI recommande un coefficient de 12, celui autorisé par la FED est de 32.



Black et Scholes

- « *contrats d'options* », « *contrats dérivés* », « *crédits default swaps (CDS)* », « *crédits structurés* » = produits « *toxiques* »

Un exemple

- Alfred doit acheter d'ici un laps de temps T du pétrole pour sa compagnie d'aviation.



Black et Scholes

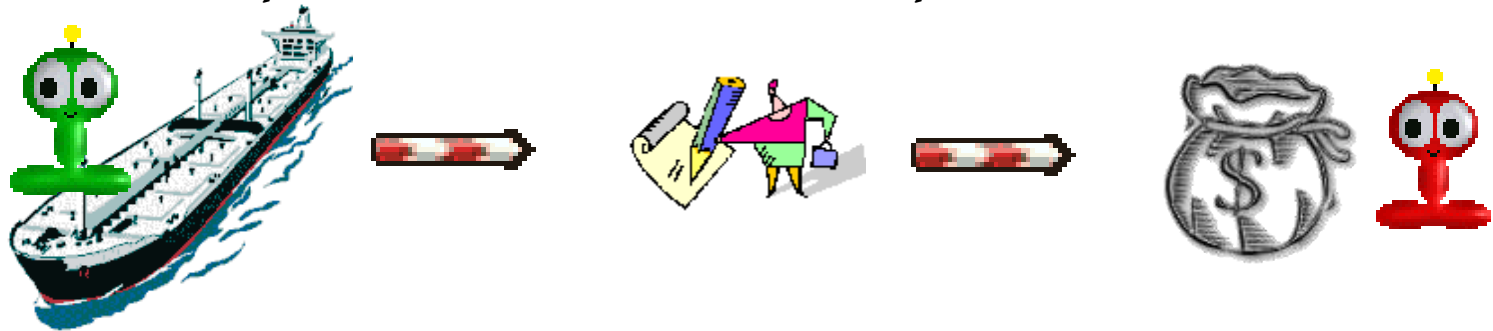
- Vincent dispose de pétrole car justement il a une compagnie pétrolière et il préfère vendre son pétrole maintenant que dans T .

Je t'achète l'option au cours C d'aujourd'hui, mais si le cours a baissé à T et vaut c je n'exercerai pas l'option et je t'achèterai le pétrole au cours c

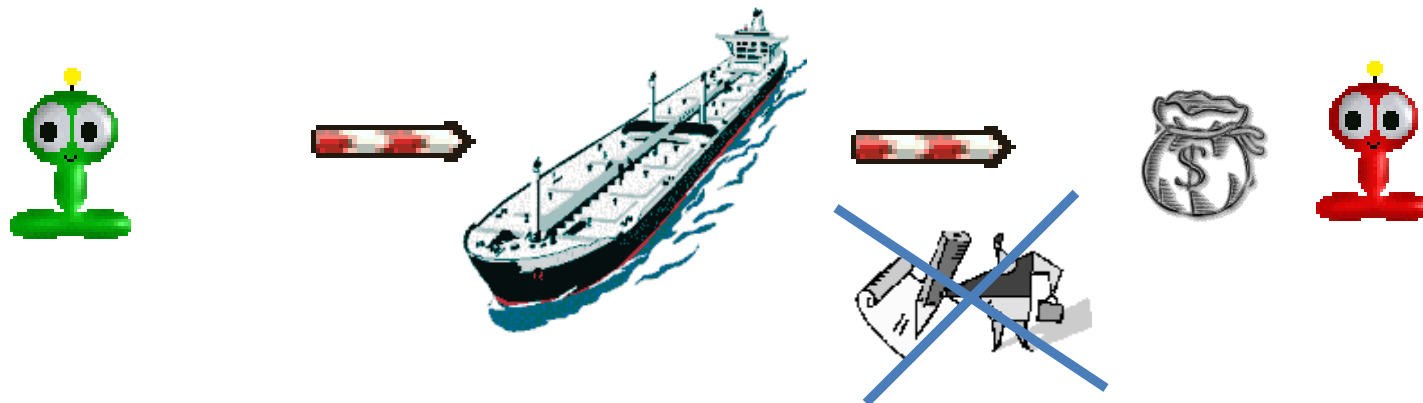


Black et Scholes

- Si le cours du pétrole monte, Alfred achète l'option.



- Si le cours du pétrole baisse, Alfred achète le pétrole.



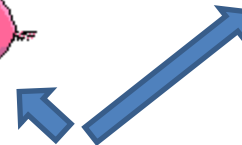
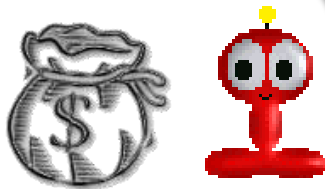
- Dans tous les cas Alfred est gagnant (exemple : Air France à l'été 2008).

Black et Scholes

Ok, mais tu dois me payer une prime pour le risque que je prends à ta place !

Le pétrole est « prépayé » par Alfred grâce à l'option

Combien vaut la prime ?



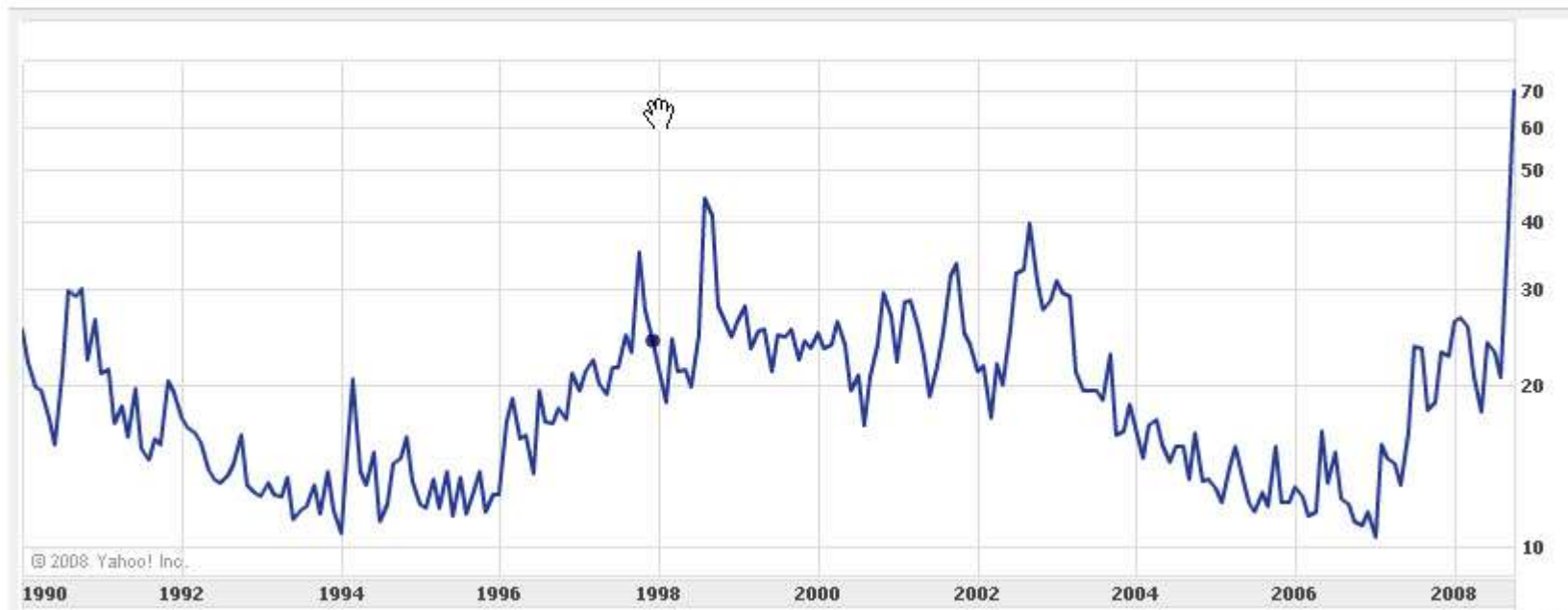
La prime est cotée sur un marché d'options : Vincent revend le risque



La formule de B&S donne la valeur de la prime en fonction de divers paramètres dont la « volatilité », difficile à estimer.

Black et Scholes

- Parfois l'option n'est même pas cotée, c'est le risque qui l'est.
- Volatilité : quelle est la confiance des opérateurs ?
- Toutes ces opérations se font hors bilan et sans contrôle.



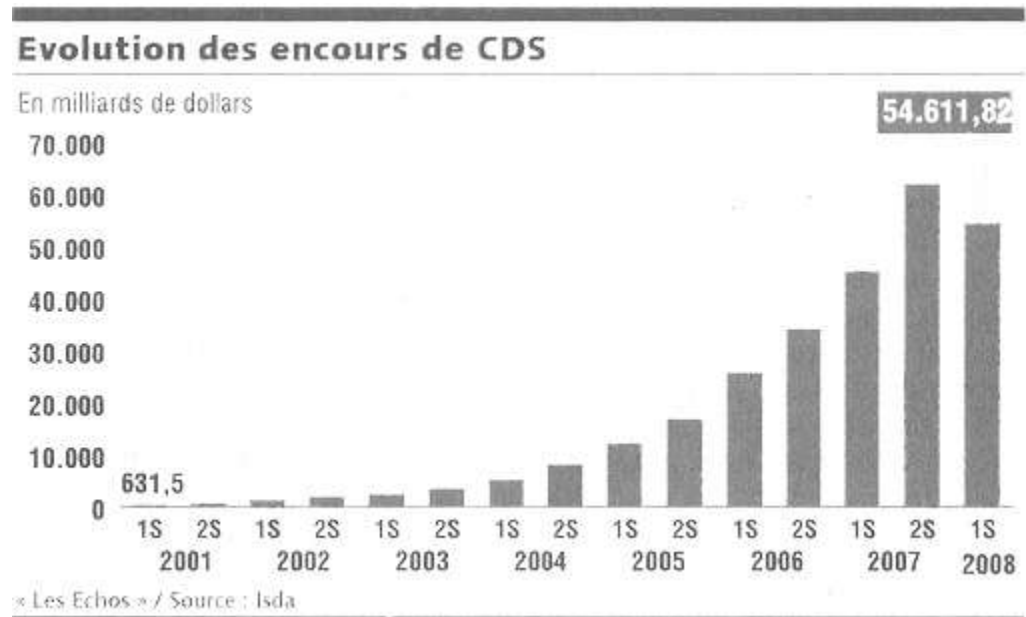
Evolution de l'indice VIX S&P 500 depuis sa création.

Black et Scholes

- CDS (Credit Default Swaps) : même principe que les options, mais sur de la dette.

Pays	2006	2007
Allemagne	2 916	3 397
Brésil	1 067	1 314
Chine	2 645	3 280
États-Unis	13 244	13 811
France	2 399	2 562
Inde	887	1 171
Japon	4 366	4 376
Royaume-Uni	2 252	2 727
Russie	979	1 291

PIB des grands pays



La crise... et vous



Alternatives
Economiques

La Tribune.fr



Le Monde.fr

LE FIGARO.fr

Libération.fr

les echos.fr

Midi Libre.com

Le web de l'économie

- Alors un dernier conseil : lisez les journaux, seule source fiable et compréhensible d'information !