F. Laroche - 2008

CALCUL INTÉGRAL

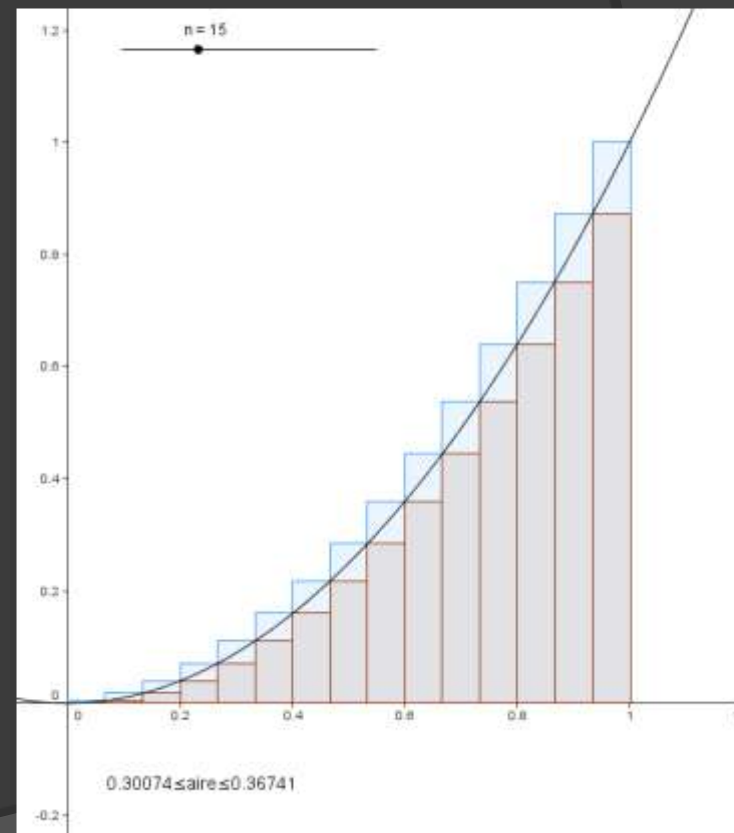
Découpages

On peut découper l'aire sous la courbe, ici $y=f(x)=x^2$, en n rectangles de largeur $1/n$, de hauteur $f(k/n)=(k/n)^2$.

La somme de ces n rectangles est :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{2n^3+\dots}{6n^3}$$

Qui tend lorsque n tend vers l'infini vers $\boxed{\frac{1}{3}}$



Cette méthode est difficile à utiliser quand la fonction devient trop compliquée mais est (très) pratique à utiliser avec un ordinateur.

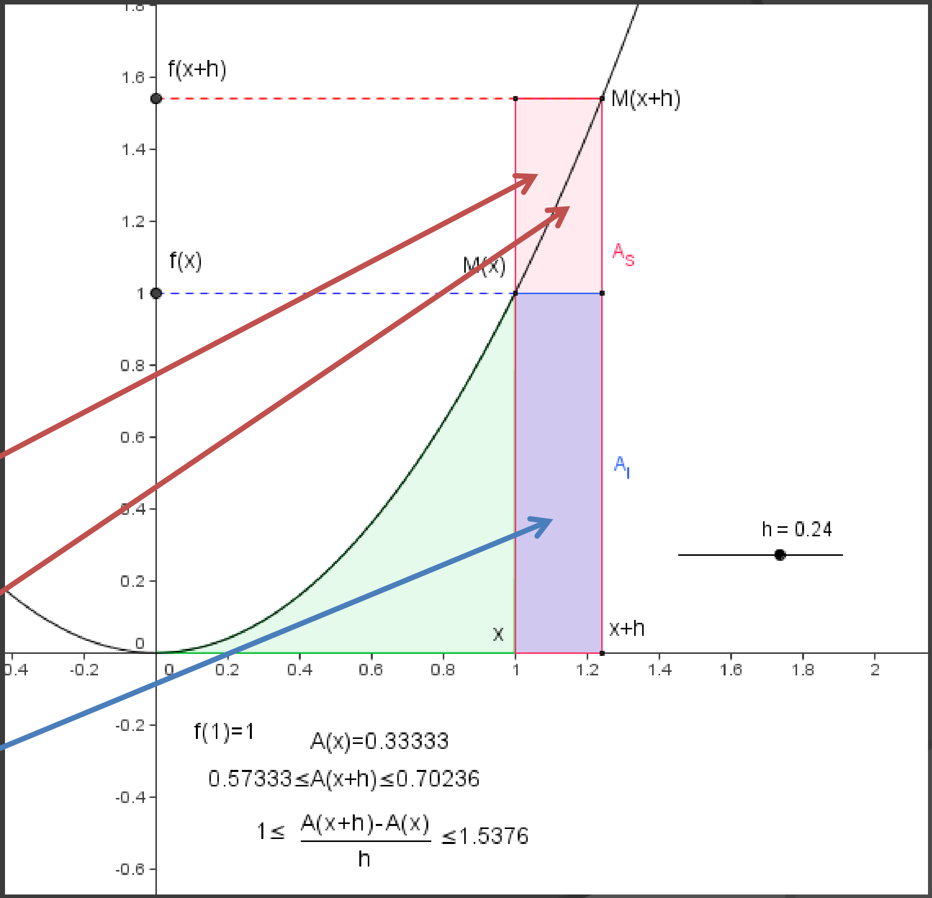
Et si on encadrait ?

Prenons deux points $M(x)$ et $M(x+h)$ sur (C) ; $A(x)$ et $A(x+h)$ sont les aires comprises entre (C), l'axe (Ox), la droite $x=a$ (ici $x=0$) et les droites verticales passant par $M(x)$ et $M(x+h)$.

La différence entre ces deux aires est $A(x+h) - A(x)$ qui représente l'aire du trapèze curviligne entre $M(x)$ et $M(x+h)$.

On encadre cette aire par celles des deux rectangles A_S et A_I de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$\boxed{h.f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq h.f(x+h)}$$



Et si on encadrait ?

$$h.f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq h.f(x+h)$$

Divisons ces inégalités par h (on suppose ici que $h>0$) et passons à la limite quand h tend vers 0 :

$$f(x) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x+h)$$

$$f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x) \leq \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

$$A'(x) = f(x)$$

La fonction A est donc une primitive de f

Le Théorème fondamental

Attention au sens de variation de *f* quand même…

En général on a donc *F* une primitive de *f*, alors

$$A(x) = F(x) + K.$$

Comme $A(a)=0$, $K = -F(a)$, d'où

$$A(x) = F(x) - F(a)$$

et l'aire cherchée est

$$A(b) = F(b) - F(a).$$

Un exemple

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$A(1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$$

$$A(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt$$

$$\int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

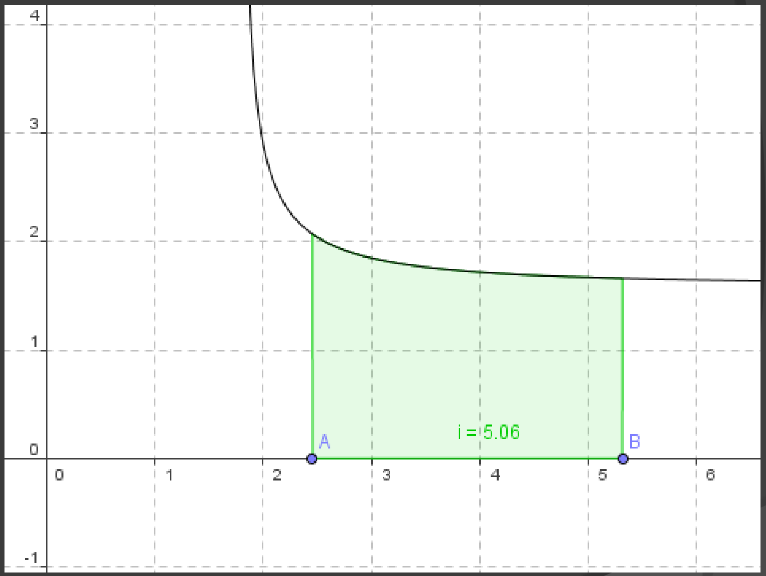
On note $A(b) = \int_a^b f(x)dx$

On lit « intégrale de *f* entre *a* et *b* » $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Calculer une aire

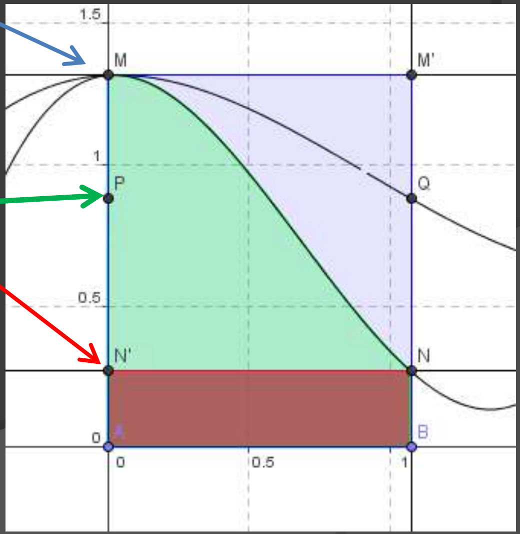
- Choisir une belle fonction f bien mûre.
- Mettre dans le saladier une primitive F quelconque de f.
- Calculer $F(b)-F(a)$ et saupoudrer d'épices.
- Multiplier éventuellement par l'unité d'aire $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ pour faire bon poids.
- Secouer violemment et servir froid.

- Pour l'aire entre deux courbes, enlever celle de dessous, puis suivre les instructions précédentes.
- Si la courbe est sous l'axe ou coupe l'axe, se débrouiller…



Propriétés

- Evident : $\int_a^b f+g(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt,\ \int_a^b kf(t)\,dt=k\int_a^b f(t)\,dt$
- Moins évident : si $a\le t\le b$ et $f\le g\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt\le\int_a^b g(t)\,dt$
- Encore moins évident : si $m\le f(t)\le M\Rightarrow m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\le M$



- Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est la

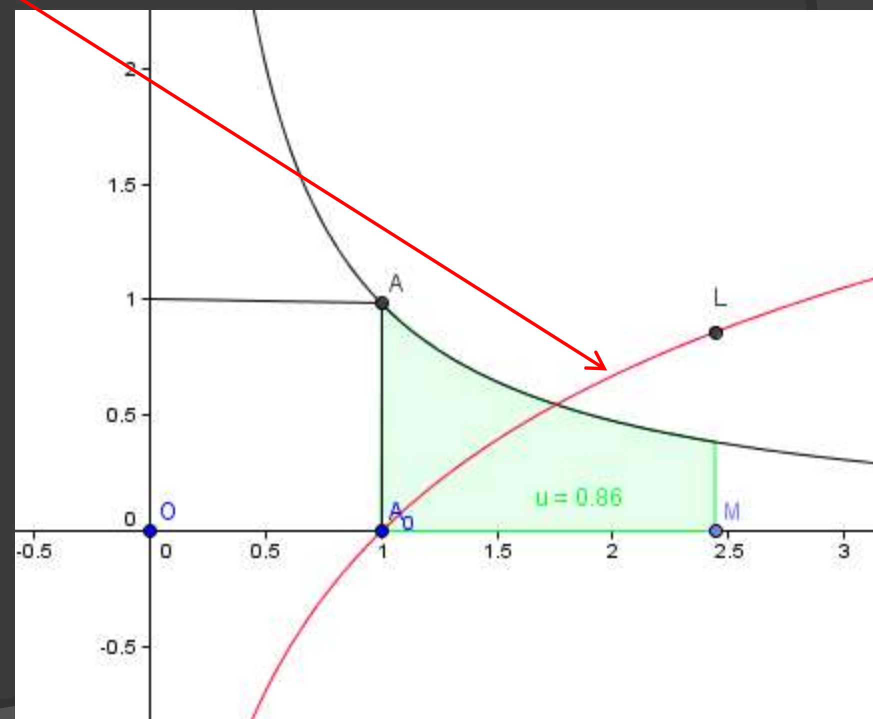
  valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Une primitive

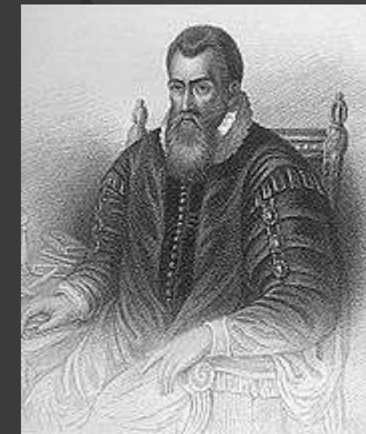
- La formule $\int u'u^n = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$ ne marche pas lorsque $n=-1$.
- La fonction $1/x$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, elle a donc une primitive.
- On définit une nouvelle fonction comme la primitive de $1/x$ qui s'annule pour $x=1$.

- On a même le tableau de variations de cette fonction :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖			$+$			
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Ln



- La fonction définie par $\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ est donc appelée **logarithme néperien**.

- Evidemment $\left[\ln(x)\right]'=\frac{1}{x}$ et grâce au théorème sur la dérivée des fonctions composées, on a $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

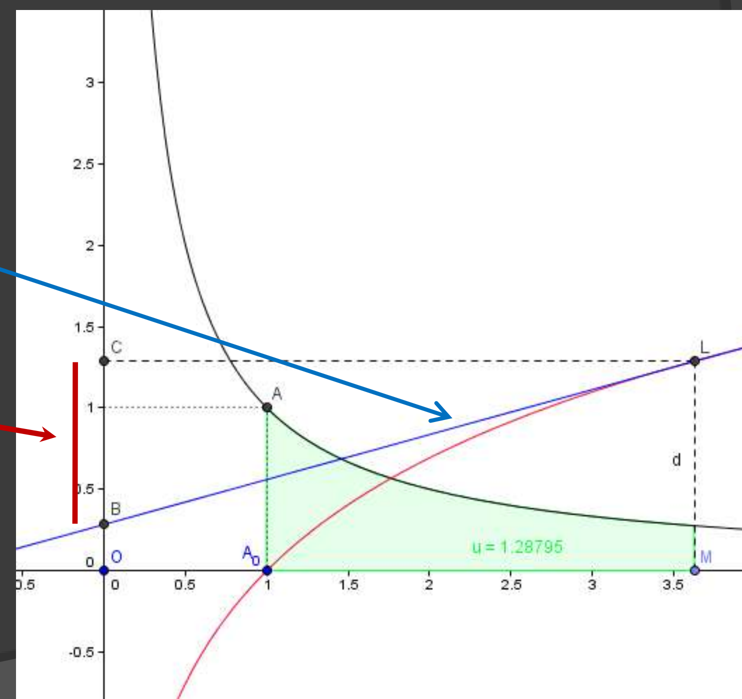
  - La tangente au point L a pour équation

    $y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln a=\frac{1}{a}x-1+\ln a$

    La distance BC vaut donc

    $y_C-y_B=\ln a-(-1+\ln a)=1$

    Cette propriété suffit à caractériser ln.



Propriétés de ln

- Si on dérive uv et que l'on divise par uv, on a $\frac{(uv)'}{uv}=\frac{u'v+uv'}{uv}=\frac{u'v}{uv}+\frac{uv'}{uv}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$
- Intégrons cette relation (en pensant à la constante d'intégration K) :

$$\int\frac{(uv)'}{uv}=\int\frac{u'}{u}+\int\frac{v'}{v}+K\Leftrightarrow\ln(uv)=\ln u+\ln v+K$$

- Prenons par exemple $u=v=1$, on a alors $0=0+0+K$ donc $K=0$ et la relation qui a fait le succès des logarithmes dès leur plus tendre enfance :

$$\boxed{\ln(uv)=\ln u+\ln v}$$

- Prenons pour v l'inverse de u : $v=\frac{1}{u}\Rightarrow\ln u+\ln\frac{1}{u}=\ln\left(u\times\frac{1}{u}\right)=\ln 1=0\Rightarrow\ln\frac{1}{u}=-\ln u$
- Par récurrence on a pour n entier : $\ln(u^n)=n\ln u$
- Puis en posant $u^n=U\Leftrightarrow u=U^{\frac{1}{n}}$, on obtient $\ln\left(u^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\ln u\Rightarrow\ln\left(u^{\frac{p}{q}}\right)=\frac{p}{q}\ln u$

Toujours plus fort

- La relation $\ln\left(u^x\right) = x\ln u$ est donc valable pour x rationnel (quotient de deux entiers relatifs).
- En fait si on prend un réel x, on pourra toujours trouver deux rationnels m et M tels que $m \leq x \leq M$ où m et M sont aussi proches de x qu'on le souhaite : par exemple $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15\,;\, 3{,}141 \leq \pi \leq 3{,}142\,;\, 3{,}1416 \leq \pi \leq 3{,}1417$
- On peut alors définir un nombre y tel que $y = u^x$ avec $u^m \leq u^x \leq u^M$ et $\ln\left(u^m\right) \leq \ln\left(u^x\right) \leq \ln\left(u^M\right)$ puisque ln est continue monotone croissante.

- On peut s'en sortir plus simplement en considérant que ln est continue monotone strictement croissante, qu'elle est « bijective » et donc qu'il existe pour tout $x > 0$ un unique y tel que $y = \ln x$; réciproquement il existe un seul $x > 0$ pour tout y réel tel que $x = \ln^{-1}(y)$, fonction réciproque de ln.
- Comme on a $\ln e = 1$, on doit avoir $e = \ln^{-1}(1)$, ce qui donne $y = y\ln e = \ln e^y = \ln x$

soit $\boxed{x = e^y \Leftrightarrow \ln x = y}$ ainsi que $\boxed{e^{\ln a} = a \Rightarrow e^{x\ln a} = a^x}$

Réciproque, est-ce que j’ai une tête de réciproque ?

- Les courbes de la fonction **ln** et de sa réciproque **exp** sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

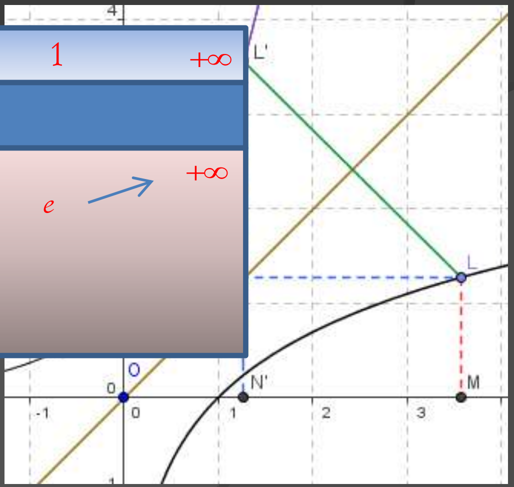
- En utilisant la dérivée de la réciproque, $\boxed{\left(f^{-1}\right)'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}}$ on a $\boxed{\left(e^{x}\right)'=\dfrac{1}{\ln'\left(e^{x}\right)}=\dfrac{1}{1/e^{x}}=e^{x}}$

- Avec la dérivée des fonctions composées : $\boxed{\left(e^{u}\right)'=u'e^{u}}$

- Les tableaux de variation sont réciproques : x devient y et y devient x.

x	0	1	e	$+\infty$
$1/x$		+		
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$		+		
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$



Des propriétés de ln à celles de exp

ln		**exp**
$\ln\left(uv\right)=\ln u+\ln v$	on pose $u=e^x$, $v=e^y$	$\ln\left(e^x e^y\right)=\ln e^x+\ln e^y=x+y\Leftrightarrow e^x e^y=e^{x+y}$
$\ln\left(u/v\right)=\ln u-\ln v$	on pose $u=e^x$, $v=e^y$	$\ln\left(e^x/e^y\right)=\ln e^x-\ln e^y=x-y\Leftrightarrow e^x e^y=e^{x-y}$
$\ln\left(u^n\right)=n\ln u$	on pose $u=e^x$	$\ln\left(\left[e^x\right]^n\right)=n\ln e^x=nx\Leftrightarrow\left[e^x\right]^n=e^{nx}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$	on pose $x=e^X$, quand x tend vers $+\infty$, X aussi.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln e^X}{e^X}=0^+\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0^+\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$
	on pose $Y=-X$, quand X tend vers $+\infty$, Y tend vers $-\infty$.	$\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{Y\to-\infty}\dfrac{e^{-Y}}{-Y}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{Y\to-\infty}Ye^Y=0$
ln est dérivable en 1, avec la définition on a :	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}=\ln'\left(1\right)=\dfrac{1}{1}=1$	exp dérivable en 0, avec la définition on a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=e^0=1$
$\int\ln x dx=x\ln x-x$		$\int e^{ax+b}dx=\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$

Equations différentielles

- On cherche les fonctions f telles que $\boxed{f'(x)=af(x)}$ avec $\boxed{f(x_0)=y_0}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=a \Rightarrow \ln|f(x)|=ax+K \Leftrightarrow |f(x)|=e^{ax+K}=e^K e^{ax} \Leftrightarrow f(x)=\pm e^K e^{ax}=Ce^{ax}$$

- Comme $f(x_0)=y_0$, on a $y_0=Ce^{ax_0} \Leftrightarrow C=y_0e^{-ax_0} \Rightarrow f(x)=y_0e^{-ax_0}e^{ax}=y_0e^{a(x-x_0)}$
- Conclusion : les solutions sont les fonctions $\boxed{f(x)=Ce^{ax}}$

- Si on a $\boxed{f'(x)=af(x)+b}$: essayons de résoudre avec une fonction du type $f(x)=g(x)e^{ax}$; on remplace dans l'équation, ce qui donne

$$\left(g(x)e^{ax}\right)'=ag(x)e^{ax}+b \Leftrightarrow g'(x)e^{ax}+g(x)ae^{ax}=ag(x)e^{ax}+b \Leftrightarrow g'(x)e^{ax}=b \Leftrightarrow g'(x)=be^{-ax}$$

- Il reste juste à trouver g puis f : $g(x)=b\frac{1}{-a}e^{-ax}+C \Rightarrow f(x)=g(x)e^{ax}=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

- Conclusion : les solutions sont les fonctions $\boxed{f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}}$

La méthode d'Euler

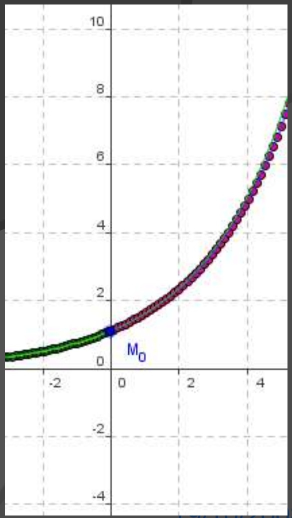
- Dans de nombreux cas on ne sait pas résoudre les équations différentielles, ou alors c'est trop compliqué, ou encore ça ne sert à rien…
- L'idée développée dès les débuts du calcul différentiel fut de remplacer la définition de la dérivée comme limite par une définition approchée . Plutôt que de prendre

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  on prend $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$ avec h petit.
- On a alors deux suites : une pour les abscisses $x_{n+1} = x_n + h$

  et une pour les ordonnées : $y_{n+1} = f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) = y_n + hf'(x_n)$

- En traçant la suite de points $(x_n \,; y_n)$ on a une assez bonne représentation des courbes intégrales (solutions).



F. Laroche – 2008

http://laroche.lycee.free.fr

FIN