Olympiades académiques de mathématiques

http://www.animath.fr/spip.php?article149

Les sujets des académies accompagnées de (*) ne me sont pas connus.

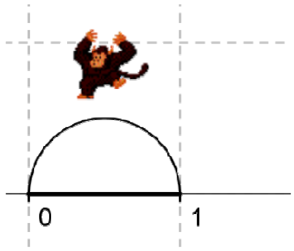
1. Exercices communs

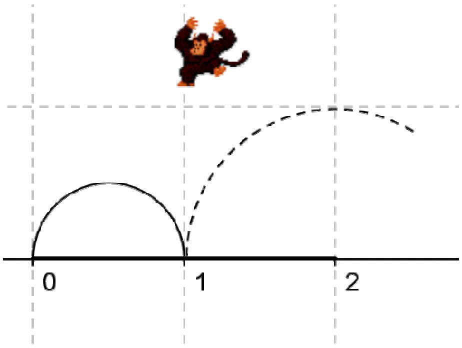
1-a : Zone Europe-Afrique-Asie : Le singe sauteur.

J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment [0 ; n].

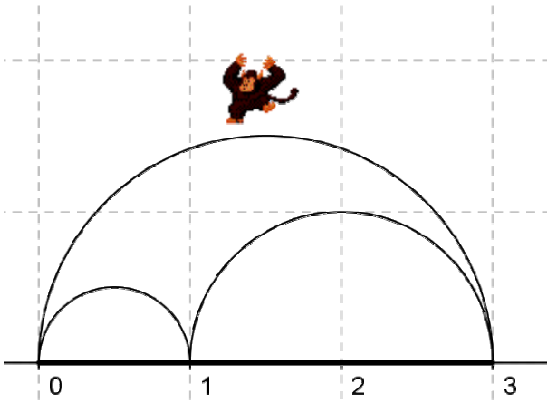
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.





Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].

Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 …

Montrer que N + 4 est aussi atteignable.

1-b : Zone Europe-Afrique-Asie : Les essuie-glaces.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous).

Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

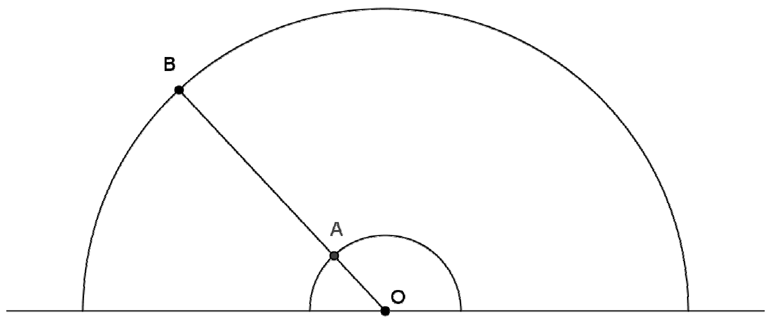


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-après).

Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO').

Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

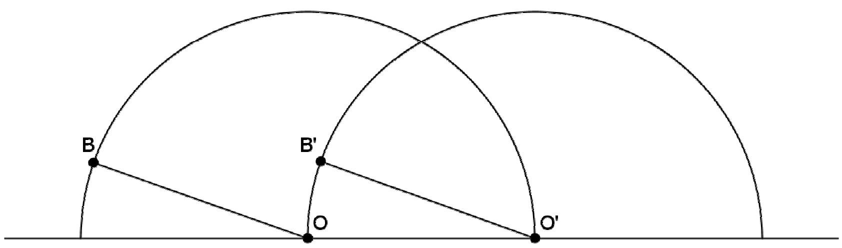


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = a.

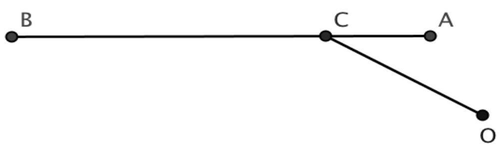


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous).

En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle a dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

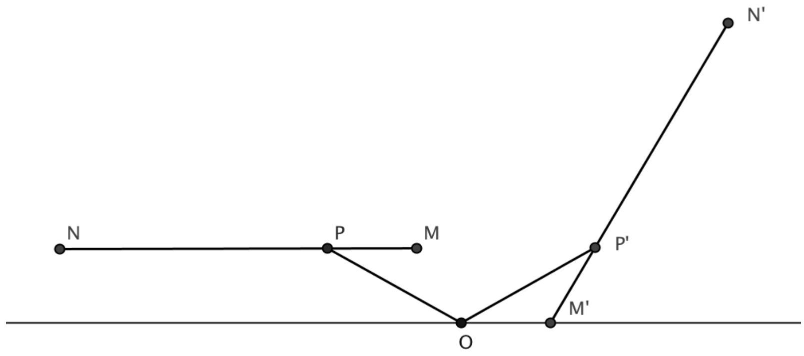


Fig. 4

1-c : Zone Océanie : Suite de nombres +

L'exercice consiste à étudier les nombres obtenus en partant du nombre 1 par une succession d'étapes, de la manière suivante : un nombre obtenu à l'une des étapes est remplacé à l'étape suivante soit par sa moitié (étape codée M) soit par son complément à 1 (étape codée C). Ainsi par exemple :

- la première étape consiste toujours à passer de 1 soit à $\frac{1}{2}$ (étape M) soit à 0 (étape C) ;

- la succession d'étapes M puis M puis C puis M, notée MMCM, conduit au nombre $\frac{3}{8}$ par le chemin $1 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \to \frac{3}{4} \to \frac{3}{8}$;

- à partir du nombre $\frac{3}{8}$ on peut obtenir, à l'étape suivante, soit $\frac{3}{16}$ (étape M) soit $\frac{5}{8}$ (étape C).

1. Quels sont les nombres obtenus après chacune des successions :

a. CMM (C puis M puis M) ?

b. MMMCM (M puis M puis M puis C puis M) ?

c. CCCCCC ?

2. Donner tous les nombres que l'on peut obtenir au bout de 3 étapes, puis de 4 étapes.

3. Montrer que tous les nombres obtenus, au bout d'un nombre quelconque d'étapes, sont dans l'intervalle [0 ; 1].

4. Écrire, dans les trois cas suivants, une succession d'étapes permettant d'obtenir les nombres indiqués :

a. $\frac{3}{2^8}$; b. $\frac{253}{256}$; c. $\frac{2011}{2^{2011}}$.

5. Soient n et N deux entiers naturels tels que N est impair et $N < 2^n$.

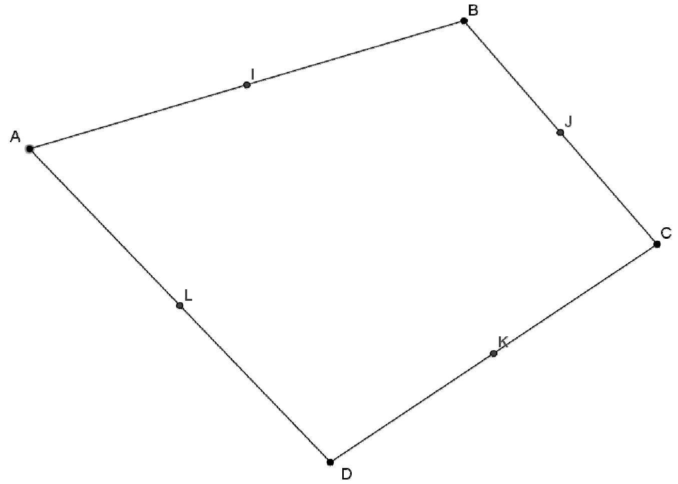
Écrire un algorithme permettant d'atteindre le nombre $\frac{N}{2^n}$ en un nombre fini d'étapes. Conclure.

1-d : Zone Océanie : La pelouse arrosée

Un jardinier doit arroser une pelouse, assimilée à un quadrilatère convexe ABCD quelconque (voir la figure ci-contre pour un exemple).

Pour cela, il place un arroseur automatique à chacun des milieux I, J, K et L des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

La portée du jet de l'arroseur situé en I est de mesure $\frac{AB}{2}$. Le jet commence par arroser le segment [IA], puis il pivote de 180° pour arroser le segment [IB] ; chacun des trois autres arroseurs est réglé de manière analogue. Les quatre arroseurs arrosent ainsi quatre demi-disques.



1. Montrer que, dans le cas d'une pelouse de forme carrée, toute la surface est arrosée.

2. Est-ce encore vrai dans le cas général ?

1-e : Zone Amériques-Caraïbes : Découpage d'un triangle

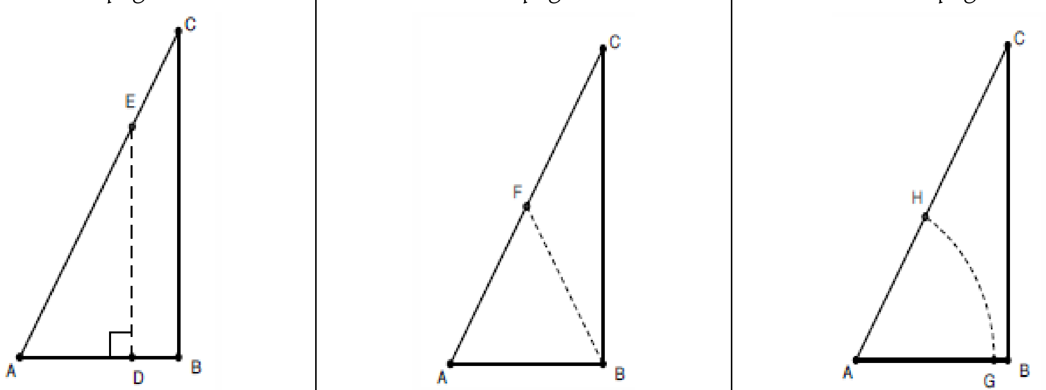
Partie A

Soit ABC un triangle rectangle en B, tel que l'angle en A mesure 60°. On supposera de plus que l'aire du triangle ABC est 2.

1. Justifier que la longueur AB vaut $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

On propose ci-dessous trois découpages, le long d'une ligne en pointillé, du triangle ABC en deux parties de même aire :

découpage 1	découpage 2	découpage 3



Dans les découpages 1 et 2, les lignes (en pointillé) [DE] et [BF] sont des segments.

Dans le découpage 3, la ligne (en pointillé) $\overset{\frown}{GH}$ est un arc de cercle de centre A.

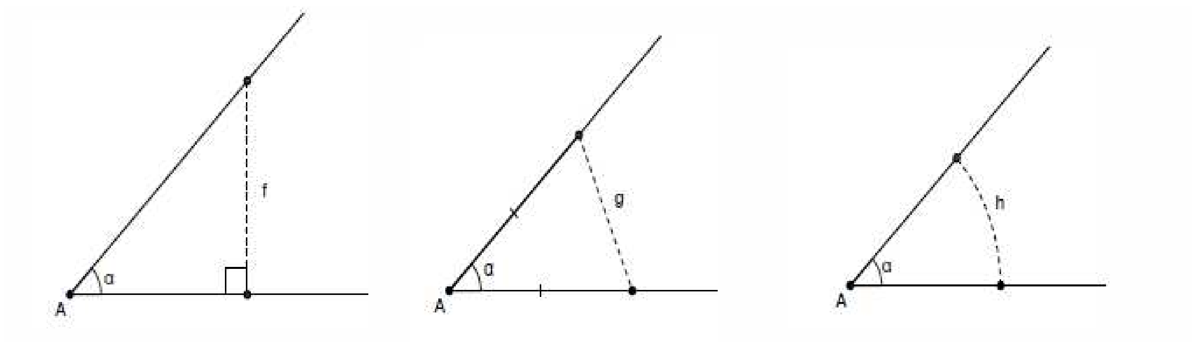
2. Déterminer les longueurs des segments [DE] et [BF] et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{GH}$. Parmi ces trois lignes, quelle est la plus courte ?

3. Proposer un autre découpage du triangle ABC en deux parties de même aire par une ligne de longueur inférieure aux trois lignes précédentes.

Partie B

Deux demi-droites d'origine A forment un angle aigu $\hat{\alpha}$.

Sur les trois figures ci-dessous, la ligne en pointillé délimite entre les demi-droites une surface d'aire de mesure 1.



Les lignes (en pointillé) de longueur f et g sont des segments, la ligne de longueur h est un arc de cercle de centre A.

1. Montrer que $h < f$ (on pourra utiliser le résultat suivant, admis : pour un angle aigu non nul, dont la mesure α est exprimée en radian, alors $\alpha < \tan\alpha$).

2. Montrer, de même, que $h < g$.

3. Un triangle est d'aire de mesure 2 et d'angles de mesures 40°, 60° et 80°.

Proposer, en utilisant l'une des trois méthodes précédentes, un découpage en deux parties de même aire par une ligne la plus courte possible. Préciser la longueur de la ligne obtenue.

1-f : Zone Amériques-Caraïbes : Les k-nombres +

Pour un entier $k \geq 2$ fixé, on appelle ***k*-nombre** tout entier relatif N pouvant s'écrire sous la forme

$$N = 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ldots \pm k.$$

Exemples :

- si $k = 2$ les 2-nombres sont $1 - 2 = -1$ et $1 + 2 = 3$;
- si $k = 3$, les 3-nombres sont $1 - 2 - 3 = -4$, $1 + 2 - 3 = 0$, $1 - 2 + 3 = 2$ et $1 + 2 + 3 = 6$.

Dans cet exercice on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : $1+2+3+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

1. a. Donner la liste des 4-nombres rangés par ordre croissant.

b. Le nombre 11 est-il un 5-nombre ?

2. a. Exprimer, en fonction de k, le plus grand k-nombre et le plus petit k-nombre.

b. Quel est le plus petit entier $k \geq 2$ tel que 51 soit un k-nombre ?

3. a. Pour un entier $k \geq 2$ fixé, montrer que tous les k-nombres ont la même parité (tous pairs ou tous impairs).

b. Déterminer les entiers $k \geq 2$ pour lesquels les k-nombres sont impairs.

4. Pour $k = 2$ et $k = 3$ on peut remarquer que l'écriture de tout k-nombre N sous la forme $N = 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ldots \pm k$ est unique.

a. Préciser toutes les valeurs de k pour lesquelles cela est le cas.

b. Peut-on trouver un entier k pour lequel il existe un k-nombre N admettant au moins 2011 écritures différentes sous la forme $N = 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \ldots \pm k$? (on pourra évaluer, pour k fixé, le nombre d'écritures possibles donnant des k-nombres et par ailleurs majorer le nombre de k-nombres.)

1-g : Correction : le singe sauteur

1. Le nombre 4 est atteignable car $1 + 2 - 3 + 4 = 4$.
2. Le singe n'a pas le choix : $1 + 2 - 3 + 4$ et … il est bloqué !
3. Le nombre 9 est atteignable car on a $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 9$, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner

$1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 + 16$,

en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n - (n+1) + (n+2) - (n+3) + (n+4)\ldots\ldots\ldots - (n^2 - 1) + n^2 =$

$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = n^2$,

d'où n^2 est atteignable.

Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans [0 ; n^2].

5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou –1 tels que $1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots\ldots + (n-1)a_{n-1} = 0$.

Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=S_-$.

On calcule ensuite $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) = S_+ - S_- = 2S_+$, on en déduit que $\frac{(n-1)n}{2} = 2S_+$ soit $n(n-1) = 4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$. n est donc de la forme $4k$ ou $4k+1$: par exemple 18 n'est pas atteignable.

La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + – en – +, cela va ajouter 2 au nombre N.

Ensuite on complète par la suite $-(N+1) + (N+2) - (N+3) + (N+4)$ et on trouve $N+4$.

On note $S(i)$ la somme partielle des i premiers termes.

Remarquons que la séquence donnant N se termine par $-(N-1)+N$. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position $i+1$.

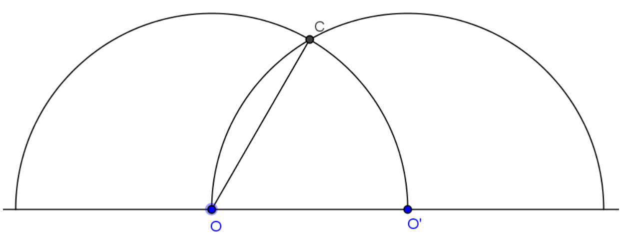
Alors $S(i-1) \geq i$ car $S(3) \geq 4$. On change alors la sous-séquence $i - (i+1)$ en $-i + (i+1)$, ce qui est possible.

On ajoute alors la séquence $-(N+1) + (N+2) - (N+3) + (N+4)$, ce qui assure que $N+4$ est atteignable.

1-h : Correction : les essuie-glaces

1. L'aire demandée en cm² est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.60^2 - \pi.15^2\right) = \frac{\pi}{2}15^2\left(4^2 - 1\right) = \frac{\pi}{2}.15^3 = 3375.\frac{\pi}{2}$, soit en valeur approchée 5301 cm².

2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:



$$A_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 .$$

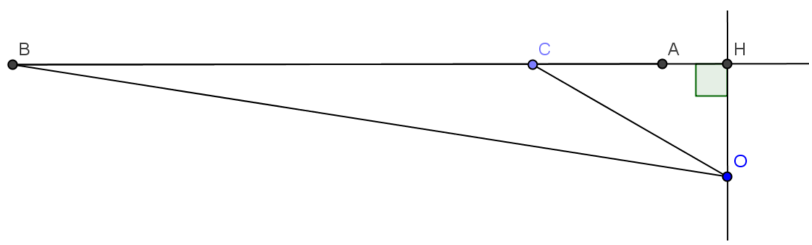
Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.

L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2\,A_2 - A_1$.

Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$. L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 \text{ et donc } \mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 .$$



3. a. $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$.

Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H on a :

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = \left(HC - CA\right)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2.$$

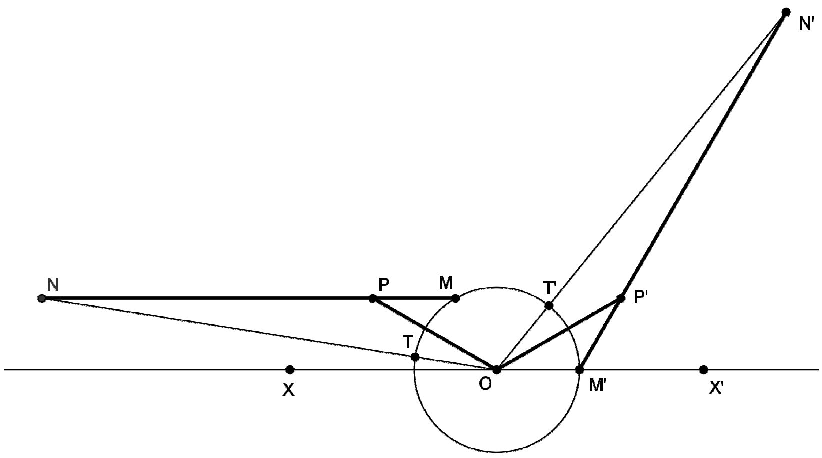
Ainsi $OA = OC$ et donc le triangle AOC est isocèle.

b. L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes-internes et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2 \times 30 = 60°$: l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180–60= 120°.

La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments $[MN]$ et $[M'N']$ et les arcs $\overset{\frown}{MM'}$ et $\overset{\frown}{NN'}$.

Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments $[ON]$ et $[ON']$.

Le cercle étant invariant par la rotation et le segment $[ON]$ ayant pour image $[ON']$, T a donc pour image T' ; les points M, T, N ont respectivement pour images M', T' et N' et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par $[MN]$, $[NT]$ et l'arc $\overset{\frown}{MT}$ a la même aire que celle limitée par $[M'N']$, $[N'T']$ et l'arc $\overset{\frown}{M'T'}$.



On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et $OM'P'$ sont isométriques.

Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments $[NT]$ et $[N'T']$ et les arcs de cercle $\overset{\frown}{NN'}$ et $\overset{\frown}{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$; or $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi a^2$, soit $\mathcal{A} = 10\pi a^2$.

2. Amiens

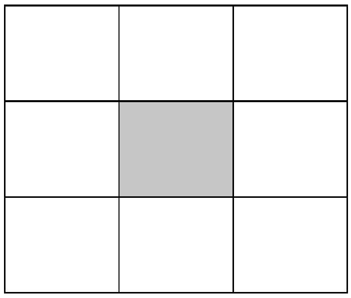
http://pedagogie.ac-amiens.fr/maths/culture/olympiades/

2-a : La carte au trésor (non S)

Une carte indique qu'un trésor est situé dans un terrain rectangulaire à 1260 m d'un coin, à 320 m du coin opposé et à 1120 m d'un troisième coin.

À quelle distance du quatrième coin se trouve-t-il ?

2-b : La famille Dupont (non S)



Au trente-septième étage d'une tour vivent vingt personnes réparties dans huit appartements disposés comme ci-contre :

Les heureux élus qui ont vue à l'Est, sur le stade, sont, hélas deux fois moins nombreux que ceux dont la vue, au sud, donne sur l'usine d'incinération, mais deux fois plus nombreux que ceux qui, au nord, font face à la prison.

Quant à ceux qui regardent à l'ouest, exactement le tiers de ceux qui font face au sud, ils peuvent se distraire avec l'animation du centre commercial.

Aucun appartement n'est vide ; en revanche, les Dupont, qui sont l'unique famille nombreuse de l'étage, se trouvent à l'étroit dans leur F4.

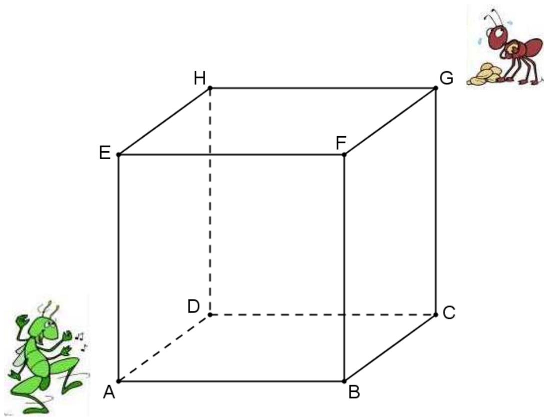
Au fait, quel appartement habitent les Dupont et combien sont-ils ?

2-c : On dérive, on dérive … (S)

Combien de solutions réelles négatives l'équation $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ possède-t-elle ?

On pourra étudier les variations d'une certaine fonction … et utiliser la calculatrice.

2-d : La cigale et la fourmi (S)



La Cigale, chantant tout l'été, part tous les matins du sommet A d'un cube (où elle habite) et se déplace d'un sommet à l'autre, en empruntant à chaque sommet, une autre arête au hasard.

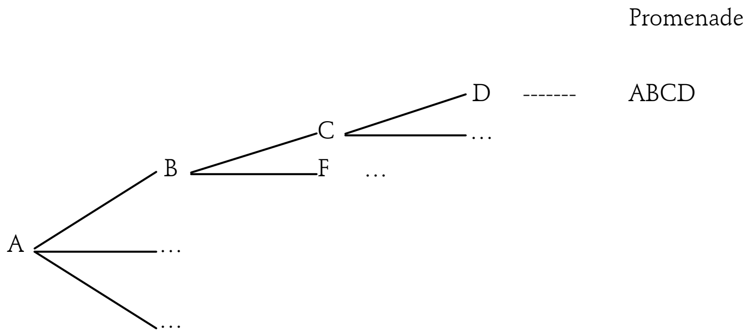
Pour varier ses inspirations musicales, la Cigale ne repasse jamais par une arête déjà empruntée (même dans le sens inverse), mais peut repasser par un sommet déjà emprunté.

Partie I : Une courte promenade d'été

On étudie le cheminement de la Cigale sur 4 sommets consécutifs.

Une promenade est codée par la donnée dans l'ordre des sommets atteints : ABCD, ADCG, …

1. Déterminer toutes les promenades possibles de la Cigale (on pourra s'aider d'un arbre).



2. a. Quelle est la probabilité qu'elle finisse sa promenade chez elle en A ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle finisse sa promenade chez sa voisine la Fourmi en G ?

Partie II : « La Cigale, ayant chanté tout l'été, se trouva fort dépourvue quand la bise fut venue :

Pas un seul petit morceau de mouche ou de vermisseau.

Elle alla crier famine chez la fourmi sa voisine (en G),

la priant de lui prêter quelque grain pour subsister jusqu'à la saison nouvelle … »

La Cigale (qui part de A) n'a pas le sens de l'orientation et se déplace toujours au hasard sur les arêtes du cube comme en été, sans emprunter un chemin par lequel elle est déjà passée.

Elle continue ainsi son chemin jusqu'à ce qu'elle arrive chez la Fourmi ou qu'elle se trouve bloquée …

1. Lors de son excursion sur le cube, la Cigale peut-elle passer trois fois par un même sommet ?

2. Dans la suite de l'exercice, on suppose que la Cigale commence par se rendre en B. Déterminer alors tous les chemins possibles de la Cigale.

3. La Cigale a-t-elle plus de chance de se retrouver bloquée sans pouvoir avancer ou de trouver la maison de la Fourmi en G ?

4. La bise soufflant, il faut une heure à la Cigale pour parcourir une arête d'un sommet à l'autre. Elle est donc arrivée en B en 1 heure. Quelle est la probabilité qu'elle arrive chez sa voisine :

a. en 4h exactement ?

b. en 5h exactement ?

c. en 6 heures ou plus ?

d. sans repasser par un sommet déjà emprunté ?

3. Besançon

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

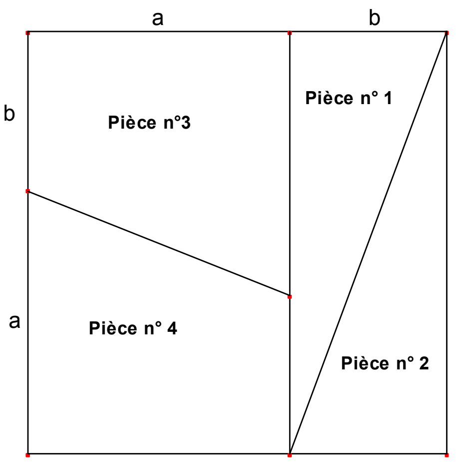
3-a : L'énigme du puzzle (S)

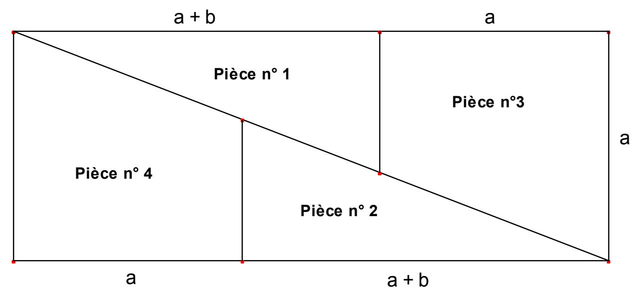
Dans un carré de côté c, on construit un puzzle de quatre pièces comme tracé ci-dessus.

On a donc $c = a + b$.

On essaie alors d'assembler les quatre pièces en un rectangle comme tracé ci-dessous.

Le rectangle souhaité aura donc pour longueur $L = 2a + b$ et pour largeur $l = a$.





1. a. Reproduire les deux dessins avec $a = 5$ cm et $b = 3$ cm.

b. Le puzzle est-il exact (c'est-à-dire à l'aide des pièces du carré initial, assemble-t-on exactement un rectangle) ? Justifiez votre réponse.

2. On suppose dans cette question que le puzzle est exact.

a. Trouver une relation liant a et b. On pourra raisonner sur l'aire du rectangle à reconstituer.

b. Déterminer quelle(s) valeur(s) peut alors prendre le quotient $\frac{a}{b}$.

Les mathématiciens ont montré qu'il n'existe pas de solution exacte au puzzle si on veut que les côtés soient tous des nombres entiers.

3. On recherche donc des couples (a, b) d'entiers pour lesquels le puzzle est satisfaisant visuellement sans être parfaitement exact.

Une solution (a, b) est dite « presque exacte » si $a^2 - ab - b^2$ vaut 1 ou -1.

a. Le puzzle réalisé en question 1.a. est-il presque exact ?

b. Démontrer que si (a, b) est une solution presque exacte, alors $(a + b, a)$ est aussi une solution presque exacte.

c. Trouver ainsi quelques solutions presque exactes.

3-b : Une corde tout autour de la Terre ! (S)

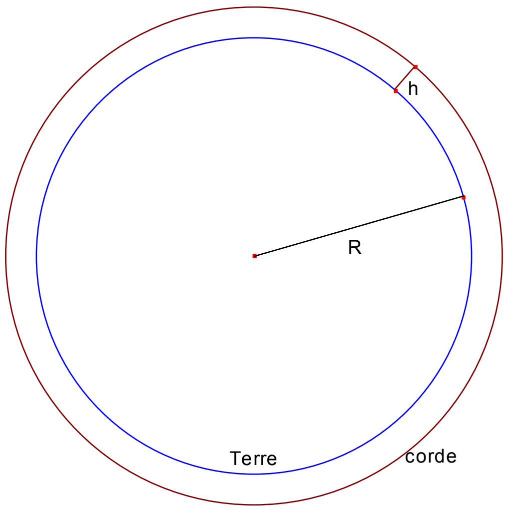


Figure 1

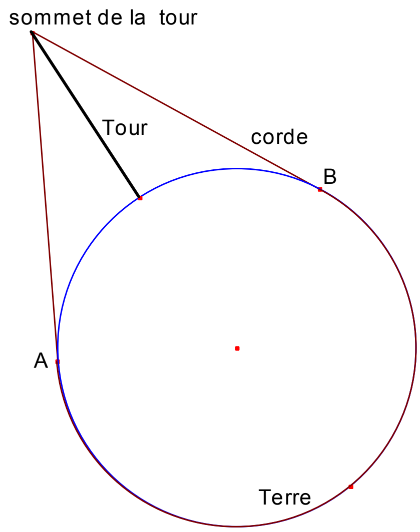


Figure 2

Dans cet exercice on estimera la circonférence de la Terre à 40 000 km.

On tend une corde tout autour de la Terre (celle-ci est supposée parfaitement sphérique).

Question 1 (cf. Figure 1)

De quelle longueur faut-il allonger la corde pour pouvoir à présent la fixer au sommet de piquets d'un mètre de haut répartis tout autour de la Terre (on suppose que la forme de la corde reste circulaire).

Question 2 (cf. Figure 2)

La corde ayant été ainsi rallongée, on décide de supprimer les piquets et de tendre à nouveau la corde autour de la Terre. On arrime alors la corde au sommet d'une tour.

Quelle est la hauteur de la tour, sachant qu'aux points de contact A et B, la corde est tangente au cercle ?

Indications pour la question 2 : noter O le centre du cercle, S le sommet de la tour et θ la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

a. Calculer la longueur de chacun des deux segments $[AS]$ et $[SB]$ en fonction de θ.

b. Calculer en fonction de θ la longueur de l'arc de cercle d'extrémités A et B où la corde reste en contact avec la Terre.

c. En déduire une équation vérifiée par l'angle θ.

d. On admettra que l'angle θ est suffisamment petit pour utiliser l'approximation : $\tan(\theta) - \theta \approx \frac{\theta^3}{3}$.

En déduire, à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée de l'angle θ et finir l'exercice.

4. Bordeaux

http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/elv/jeux/olymp/olymp.html

4-a : La Fourmi (tous)

(*inspiré du rallye de la fête des maths –Lyon1993*)

Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Une fourmi se promène sur ce plan de la façon suivante : lorsqu'elle repart d'un point de coordonnées $(x\,;y)$ où elle était arrêtée, elle marche en ligne droite jusqu'au point de coordonnées $(-3x-y\,;7x+ky)$ où k est un nombre entier fixé pour toute la promenade.

1. On prend $k = 1$.

a. La fourmi part du point A(1 ; 1) et fait trois déplacements. Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?

b. De quel point doit partir la fourmi pour arriver en trois déplacements sur le point B(16 ; 0) ?

2. Sur quel point doit se placer la fourmi pour ne pas bouger quelle que soit la valeur de k ?

3. On prend $k = 2$.

a. La fourmi part du point A(1 ; 1) et fait trois déplacements. Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?

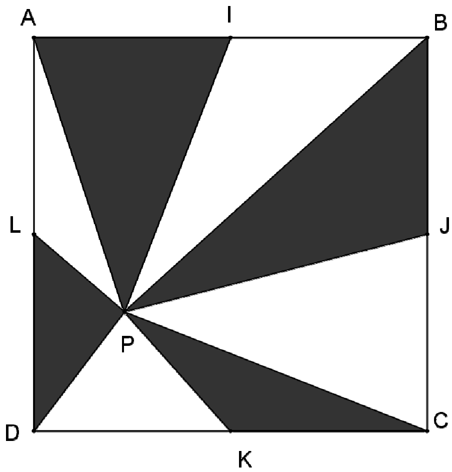
b. Est-ce que la fourmi revient toujours à son point de départ au bout de trois déplacements ?

4. Pour quelle(s) valeur(s) de k la fourmi se retrouve t-elle à son point de départ en trois déplacements quel que soit son point de départ ?

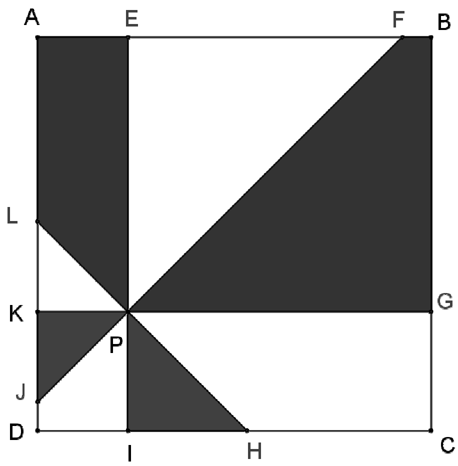
4-b : C'est gothique (non S)

Le professeur d'Arts Plastiques a demandé à ses élèves de dessiner une croix stylisée incluse dans un carré ABCD de 10 cm de côté.

On rappelle que l'aire d'un triangle est donnée par la formule $A=\dfrac{base \times hauteur}{2}$



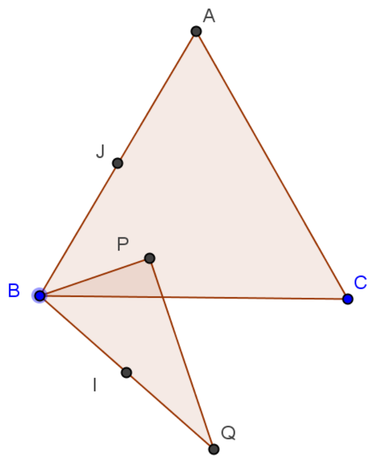
1. Olivia a choisi le motif suivant où I, J, K et L sont les milieux des côtés et P un point quelconque intérieur au carré que l'on a joint aux points A, I, B, J, C, K, D et L.
Calculer en cm^2 l'aire de la partie noire du dessin.



2. Ivan a préféré ce motif où :
- P est un point intérieur au carré,
- les droites (KG), (IE), (FJ) et (HL) passent toutes par P,
- (KG) est parallèle à (DC), (EI) est parallèle à (AD),
- (FJ) et (HL) sont les bissectrices des secteurs $\widehat{EPG}$ et $\widehat{EPK}$,
- DI < DK < 5.

On pose DI = x et DK = y.
Calculer en cm^2 l'aire de la partie noire du dessin.

4-c : Viva la Geometria… (S)



ABC est un triangle équilatéral.

On se propose de construire P intérieur au triangle tel que

$$PB=\frac{1}{2}PA \text{ et } PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA.$$

Première partie

On suppose que le point P placé sur la figure satisfait à ces deux conditions.

On désigne par r la rotation de centre C et d'angle 60°. Q est l'image de P par r.

1. Démontrer que le triangle BPQ est rectangle en P. En déduire que le triangle BQC est rectangle en Q, puis que le point P est sur le cercle de diamètre [AC].

2. I est le milieu de [BQ], J celui de [AB].

a. Démontrer que le triangle PIC est rectangle en P. En déduire l'alignement des points A, P et I.

b. Justifier que P est le centre de gravité du triangle ABQ. En déduire l'alignement des points Q, P et J.

c. Justifier que le point P est sur le cercle de diamètre [BJ].

Deuxième partie

ACB triangle équilatéral.

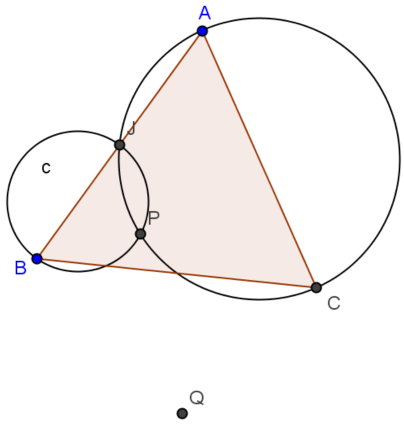
J est le milieu de [AB] ; P le point d'intersection, autre que J, des cercles de diamètre [AC] et [BJ]. Q est l'image de P par la rotation *r* de centre C et d'angle 60°.

On se propose de prouver que P vérifie bien les deux conditions $PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

1. Montrer que $\widehat{JPA}=30°$; en déduire $\widehat{BPA}$ et $\widehat{BPC}$. En déduire la nature du triangle BPQ.

2. Justifier que le triangle BQC est rectangle en Q. En déduire $\widehat{BQP}$.

3. En déduire que le point P vérifie les deux conditions requises.



5. Caen

http://maths.discip.ac-caen.fr/spip.php?rubrique24

5-a : Calculs en base 8 (S) +

Yohann , d'un naturel original, aime écrire les entiers sans utiliser les chiffres 8 et 9. Pour cela, il a l'habitude de décomposer un nombre en utilisant les puissances de 8.

Exemple : 1659 = $3\times8^3 + 1\times8^2 + 7\times8 + 3$.

On dit que le nombre 1659 a pour écriture $\overline{3173}$ en base 8 (1659 est son écriture en base 10).

De même 508 = $7\times8^2 + 7\times8 + 4$ donc le nombre 508 a pour écriture $\overline{774}$ en base 8.

Réciproquement le nombre $\overline{131}$ écrit en base 8 devient $1\times8^2 + 3\times8 + 1 = 89$ en base 10.

D'une manière générale, dire que l'entier x a pour écriture $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ en base 8 signifie que $x=a_0+a_1\times8+a_2\times8^2+\dots+a_{n-1}\times8^{n-1}+a_n\times8^n$ où a_0, a_1, …, a_n sont des entiers naturels strictement inférieurs à 8.

1. a. Déterminer l'écriture en base 8 du nombre 1044.

b. Déterminer l'écriture en base 10 du nombre $\overline{5432}$.

2. A la manière de Yohann, poser et effectuer les calculs suivants en base 8 : $\overline{131}+\overline{774}$, $\overline{131}-\overline{774}$, $\overline{131}\times\overline{774}$.

3. a. N est un entier naturel dont l'écriture en base 8 est $\overline{12345676543210}$. N est-il divisible par 8 ?

b. Soit x un entier naturel et $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ son écriture en base 8.

Quelles sont les valeurs possibles de a_0 pour que x soit divisible par 4 ?

c. Le nombre N défini à la question 3. a. est-il divisible par 4 ?

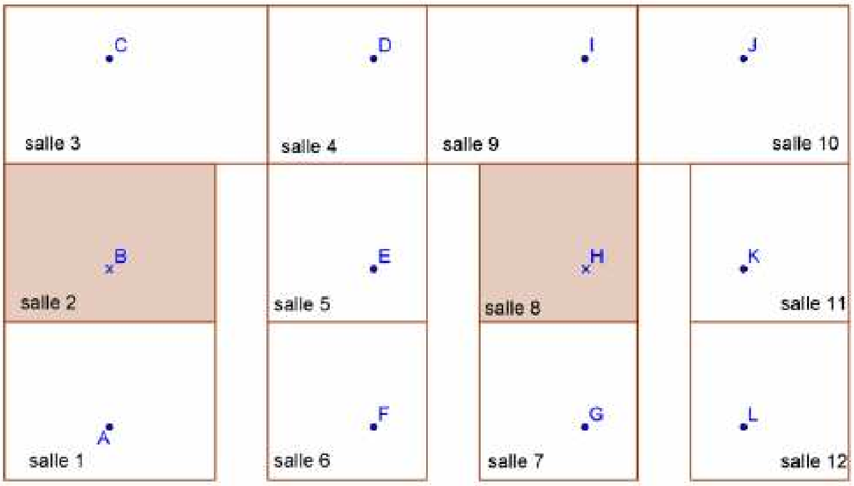
4. a. En remarquant que pour tout entier $k \geq 1$, le reste dans la division par 7 de 8^k est toujours 1, déterminer un critère de divisibilité par 7 d'un entier naturel x écrit en base 8.

b. Le nombre N défini à la question 3. a. est-il divisible par 7 ?

5-b : Le réseau informatique (autres que S) +

Inspiré de « Graphes à deux voix », APMEP.

Le plan d'un bâtiment comportant douze salles se présente de la façon suivante :



Le réseau informatique existant est quelque peu désordonné et, de ce fait, nécessite de relier les ordinateurs en un étrange « poste à poste ». Il a les caractéristiques suivantes :

- Des prises (symbolisées par des lettres) sont installées dans toutes les salles et toutes les prises sont opérationnelles sauf les prises B et H que l'on vient d'installer respectivement dans les salles 2 et 8, salles que l'on souhaite connecter entre elles.

- Des gaines contenant des câbles relient entre elles certaines salles de classes par les faux-plafonds ou par le sous-sol. Dans l'état actuel des choses, les salles 1 et 3 sont reliées et on note AC (ou bien CA) la liaison existante. De même, existent et fonctionnent les liaisons AD, AF, CD, CF, DE, DI, EF, EK, GI, GL, IJ, JK, KL.

- Pour l'instant, les salles 2 et 8 ne sont connectées à aucune autre. Afin de les connecter entre elles, on va devoir faire passer de nouveaux câbles dans des gaines existantes. De plus, on ne peut raccorder directement la prise B qu'à la prise A ou bien à la prise C. De même, on ne peut raccorder la prise H qu'à la prise G ou bien à la prise I.

Une entreprise a évalué le coût (main d'oeuvre et fourniture) de chaque liaison intermédiaire pour le passage de nouveaux câbles :

Liaison	AB	AC	AD	AF	BC	CD	CF	DE	DI
Coût	1000 €	800 €	1200 €	700 €	1300 €	600 €	500 €	800 €	1900 €

Liaison	EF	EK	GH	GI	GL	HI	IJ	JK	KL
Coût	400 €	1100 €	900 €	1000 €	500 €	1500 €	700 €	300 €	500 €

Comment l'entreprise doit-elle procéder pour relier les salles 2 et 8 afin d'effectuer les travaux à moindre coût ?

5-c : Mélange de cartes (tous)

Le principe du « mélange parfait », en magie des cartes, consiste tout d'abord à couper le jeu en 2 paquets contenant le même nombre de cartes ; on procède ensuite au mélange en intercalant exactement les cartes de chacun des paquets (c'est un geste extrêmement difficile qui nécessite, bien évidemment, beaucoup de pratique...).

Exemple de « mélange parfait » avec un jeu de 6 cartes (la 1ère est l'as de pique et la 6ème est le 6 de pique) :

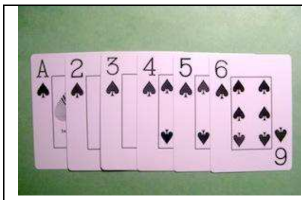
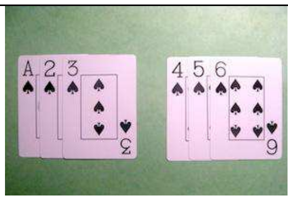
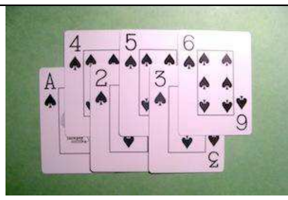
		

Fig 1 : Jeu de départ	Fig 2 : Division en deux paquets de 3 Cartes	Fig 3 : Cartes intercalées	Fig 4 : Fin du mélange

1. a. Quelle sera la position des 6 cartes de l'exemple précédent après un deuxième mélange parfait ?

b. En combien de mélanges identiques les cartes reviendront-elles à leur position initiale ?

On utilisera pour la suite la notation suivante : $U_k(x)$ est l'entier indiquant la position, après k mélanges, de la carte située en $x^{\text{ième}}$ position du jeu de départ.

Ainsi, dans le mélange de 6 cartes de la question précédente $U_1(2)=3$ signifie que la carte en $2^{\text{ième}}$ position en comptant à partir de la gauche du jeu de départ (le 2 de pique, Fig 1) est, après un mélange parfait, en $3^{\text{ième}}$ position (Fig 4).

2. Dans cette question, on considère que le magicien a un jeu de 16 cartes.

a. Que vaut $U_1(2)$? $U_2(2)$?

b. Quelle est la valeur minimum de l'entier k strictement positif pour que $U_k(2)=2$?

3. Dans cette question, on considère un jeu de $2n$ cartes, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a. Après un mélange, à quelles positions se retrouvent la première et la dernière carte du jeu ?

b. Quelle sera la position $U_1(x)$, après un mélange parfait, d'une carte située à la position x au départ ? Indication : on pourra raisonner sur 2 paquets (premier paquet avec $1 \leq x \leq n$, second paquet avec $n+1 \leq x \leq 2n$).

c. Vérifier les réponses obtenues à la question 3.a.

4. Dans cette question, on utilise un jeu de 8 cartes.

On étudie les positions successives de la carte située en $2^{\text{ième}}$ position au départ.

a. En combien de mélanges revient-elle à sa position initiale ?

b. Vérifier que le même nombre de mélanges ramène également la carte située au départ en $3^{\text{ème}}$ position, à sa position initiale.

5. Nous admettrons que si la carte en position 2 revient après M mélanges à sa position initiale, alors toutes les cartes du jeu sont revenues dans leur position initiale après ces M mélanges parfaits.

Écrire un algorithme permettant de savoir combien le magicien utilisera de mélanges parfaits pour revenir à l'état initial d'un jeu de 52 cartes.

Note : pour en savoir plus sur ce sujet, vous pourrez consulter le site internet du CNRS « Images des Mathématiques » http://images.maths.cnrs.fr/Melange-de-cartes-et.html

6. Clermont Ferrand

http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/sampleolymp1.php

6-a : Code confidentiel (tous)

On appelle **code** un nombre à quatre chiffres choisis dans la liste {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, chaque chiffre pouvant être répété à l'intérieur d'un même code.

Par exemple 1903 et 8855 sont des codes possibles, l'écriture générale étant $\overline{abcd}$ (on met un trait au dessus pour ne pas confondre l'écriture du nombre avec le produit $a \times b \times c \times d$)

À ce code est associée une clé C calculée à l'aide de l'algorithme suivant :

Entrée	:	N est le code à quatre chiffres
Initialisation	:	Affecter à P la valeur de N
		Affecter à S la valeur 0
Traitement	:	Pour K de 1 à 4, faire :
		Affecter à U le chiffre des unités de P
		Si K est pair
		alors affecter à S la valeur $S + (K + 3) \times U$
		sinon affecter à S la valeur $S + (K + 1) \times U$

		Fin si
		Affecter à P la valeur $\dfrac{P-U}{10}$
		Fin faire
		Affecter à R le reste de la division euclidienne de S par 9
		Affecter à C la valeur $9-R$
Sortie	:	Afficher C

Le code et sa clé constituent un identifiant permettant l'ouverture d'une salle confidentielle.

1. Faire fonctionner l'algorithme avec $N = 2282$ et vérifier que la clé qui lui correspond est 6.

2. Une personne s'identifie en entrant le code 4732 suivi de la clé 4. L'accès à la salle lui est refusé.

La personne est sûre des trois derniers chiffres du code et de la clé, l'erreur porte sur le premier chiffre du code (qui n'est donc pas égal à 4). Quel est ce premier chiffre ?

3. Est-il vrai que toutes les personnes ayant un code de la forme $\overline{abba}$ ont pour clé 9 ? (a et b sont des entiers tels que $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$)

4. Déterminer les couples (c ; d) d'entiers tels que les codes de la forme $\overline{ccdd}$ soient associés à la clé 4. (c et d sont des entiers tels que $0 \leq c \leq 9$ et $0 \leq d \leq 9$)

6-b : L'élection du consul de l'Empereur (S)

Sur la planète Xycha, le Grand Conseil se réunit pour élire, en son sein, le consul de l'Empereur : plusieurs prétendants, d'âges deux à deux distincts, sont en présence. Chaque conseiller vote pour un prétendant et un seul : il n'y a ni abstention, ni bulletin blanc.

Un prétendant est élu au premier tour lorsqu'il obtient au moins 50 % des voix. En cas d'égalité le plus jeune est élu. Sinon un second tour sera nécessaire.

1. **Vrai ou faux** : dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a. Si un seul prétendant se présente alors un second tour n'est pas nécessaire.

b. Si deux prétendants se présentent alors un second tour n'est pas nécessaire.

c. Si trois prétendants se présentent alors un second tour n'est pas nécessaire.

On suppose désormais que le nombre de prétendants en présence est supérieur ou égal à **trois**.

2. Chaque prétendant en présence au premier tour réunit exactement deux fois moins de voix que celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?

3. Chaque prétendant en présence réunit exactement les trois quarts des voix de celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?

On pourra utiliser la formule : si $q \neq 1$ et n est entier, $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

6-c : Tous divisibles par 222 … ou plus (non S)

1. En utilisant une seule fois chacun des trois chiffres 1, 2 et 3, écrire tous les nombres entiers naturels possibles de trois chiffres : 123 ; 132 ;…etc.

- Faire la somme S de tous les nombres obtenus.
- Vérifier que cette somme S est un multiple de 222.

2. Reprendre la question avec trois chiffres non nuls et distincts deux à deux de votre choix.

3. La propriété découverte à la question 1. reste-t-elle vraie quels que soient les trois chiffres non nuls distincts deux à deux choisis ? Justifier votre réponse.

4. On considère maintenant quatre chiffres non nuls et distincts deux à deux. Énoncer et démontrer une propriété analogue.

7. Corse

http://www.ac-corse.fr/math/Olympiades-2010_a83.html

7-a : Les carrés « Hénatéleutes »

(*du Grec hen = un et téleute = la fin*)

Dans cet exercice on s'intéresse, parmi les carrés de nombres entiers, à ceux dont le chiffre des unités dans l'écriture décimale est 1 : 1, 81, 121, …841, … .On note E la liste ordonnée en ordre croissant de tous ces carrés.

1. Quel est le nombre suivant 841 dans la liste E ?

2. Démontrer que la différence de deux nombres quelconques de E est un multiple de 40.

3. Quel est le 2011$^{\text{ème}}$ nombre de la liste E.

4. Existe-il des nombres de E se terminant par 11, c'est-à-dire dont les chiffre des dizaines et des unités sont égaux à 1 ?

Solution

1. $841=29^2$, le nombre suivant sera donc 31^2 soit 961.

2. Les nombres dont le carré a 1 pour chiffre des unités ont eux mêmes 1 ou bien 9 pour chiffre des unités ; ce sont donc les nombres entiers de la forme $(10n+1)^2$ ou de la forme $(10n+9)^2$, ou n désigne un entier naturel.

Considérons la différence de deux carrés de ce type consécutifs.

S'ils sont dans la même dizaine :

$$(10n+9)^2-(10n+1)^2=(10n+9-10n-1)(10n+9+10n+1)=8(20n+10)=80(2n+1)$$

S'ils ne sont pas dans la même dizaine :

$$(10n+11)^2-(10n+9)^2=2(10n+11+10n+9)=2(20n+20)=40(n+1)$$

Ainsi la différence de deux éléments de E est une somme de multiples de 40 donc elle-même un multiple de 40.

3. Il y a 2 nombres dont le carré se termine par 1 dans une dizaine de $10n$ à $10n+9$.

$2010=2\times 1005$. Donc dans les 1005 premières dizaines il y a 2010 nombres dont le carré se termine par 1. Le 2010$^{\text{ème}}$ est $10\times 1004+9=10049$. Le 2011$^{\text{ème}}$ est 10051. Le 2011$^{\text{ème}}$ élément de E est donc 10051^2

4. Nous cherchons les carrés se terminant par 11. Ils sont de la forme $100N+11$ où N est un entier naturel. Supposons qu'il existe des entiers n et N tels que

$$(10n+1)^2=100N+11 \text{ ou } (10n+9)^2=100N+11$$

$$(10n+1)^2=100N+11 \Leftrightarrow 100n^2+20n+1=100N+11 \Leftrightarrow 10n^2+2n-10N=1$$

$$(10n+9)^2=100N+11 \Leftrightarrow 100n^2+180n+1=100N+11 \Leftrightarrow 10n^2+18n-10N=1$$

On aboutit a une absurdité, 1 n'étant pas pair.

Il n'existe donc pas d'entiers de E se terminant par 11.

7-b : Chasse au trésor

Sur un terrain, symbolisé par quadrillage se trouve caché un trésor. Un chasseur de trésor fouille le terrain pour découvrir un trésor de pièces métalliques, enterré dans une des case (marquée d'un x sur l'exemple) à l'aide d'un détecteur à métaux.

Soit le détecteur est placé sur la bonne case et indique la présence du trésor dans celle-ci, soit s'il est placé sur une case où le trésor ne se trouve pas, il indique par des signaux sonores différents trois types de renseignements (voir figure 1)

- il indique la présence du trésor dans la « zone α » si celui-ci se trouve sur une des huit cases directement adjacentes.

- ou bien il indique la présence du trésor dans la « zone β » si celui-ci se trouve deux cases plus loin (voir l'exemple).

- ou bien il n'indique rien si le trésor est encore plus loin, et nous dirons alors qu'il est dans la « zone γ ».

Ainsi lorsqu'il est au dessus d'une case le détecteur a quatre états possibles.

β	β	β	β	β		
β	α	α	α	β		
β	α	x	α	β		
β	α	α	α	β		
β	β	β	β	β		

Fig. 1

Exemple sur un terrain de 7×7 cases où x *désigne la position du trésor*

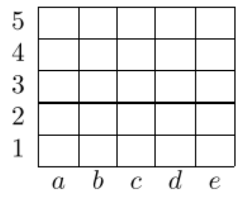


Fig. 2

On cherche une stratégie permettant au chasseur de déterrer à coup sûr le trésor en un nombre de tentatives minimum.

1. On commence par un terrain carré de dimension 5×5 cases et on repère les cases où les lettres indiquent les colonnes et les nombres indiquent les lignes (voir Figure 2).

a. Reproduire et compléter le tableau suivant (Figure 3), dans lequel on note, pour chaque case du terrain indiquée sur la première colonne du tableau, le nombre de cases se trouvant respectivement dans les zones α, β et γ.

Par exemple, la zone α de la case $a1$ est constituée des cases $a2$, $b1$ et $b2$ qui sont donc au nombre de trois.

b. On entoure, sur chaque ligne, le plus grand des trois entiers.

On appelle ***choix raisonnable*** la case du terrain 5×5 pour laquelle l'entier entouré est le plus petit possible.

Quel est l'unique choix raisonnable du tableau précédent ?

	α	β	γ
$a1$	3	5	16
$b1$			
$c1$			
$b2$			
$c2$			
$c3$			

Fig. 3

c. Expliquer pourquoi il est alors possible de déterminer sans tableau supplémentaire toutes les cases du terrain 5×5 qui sont des choix raisonnables, et colorier sur le quadrillage 5×5 les choix raisonnables.

2. On décide, à la première tentative, de fouiller la case $b2$ et on suppose que le détecteur indique la présence du trésor dans la zone α.

	α	β	γ
$c2$	4	3	0
$c3$			
$d2$			
$d3$			
$d4$			

Fig. 4

a. Compléter le tableau suivant (Figure 4), construit sur le même modèle que le précédent, mais dans lequel on ne compte plus que les cases, dans chaque zone, **susceptibles de contenir le trésor**.

b. Indiquer dans ce cas un choix raisonnable pour la deuxième étape.

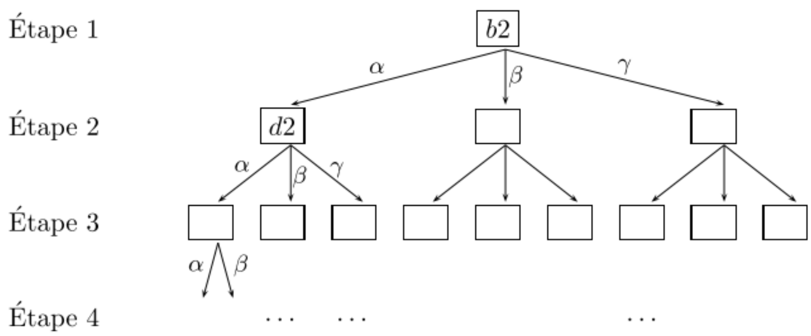
Y a-t-il un seul choix raisonnable ?

c. Poursuivre l'étude de ce cas et montrer ainsi que le trésor sera découvert en quatre tentatives maximum, quelque soit son emplacement.

3. A la première tentative, on fouille la case $b2$ et on suppose désormais que le trésor se trouve dans la zone γ.

Mener une étude similaire (on pourra construire un tableau contenant les cases $c5$, $d5$, $e5$, $b4$, $c4$ et $d4$) et en conclure à nouveau que la stratégie du choix raisonnable permet de découvrir le trésor en quatre tentatives maximum.

4. Terminer l'étude de la case $b2$ comme premier choix. On pourra présenter la stratégie complète dans un arbre à quatre lignes :



5. Est-il possible de déterrer le trésor à coup sûr en quatre tentatives si on commence par fouiller la case $c2$?

6. On considère désormais un terrain de taille $n \times n$, et on note T_n le nombre de tentatives nécessaires pour déterrer à coup sûr le trésor sur ce terrain (par exemple $T_5 = 4$).

a. Montrer que : $161765 \leq T_{2011} \leq 162410$.

b. *Question pour les premières S uniquement*

A l'aide d'inégalités, montrer que la suite $\frac{T_n}{n^2}$ tend vers $1/25$ lorsque n tend vers l'infini.

8. Créteil

http://maths.ac-creteil.fr/spip/spip.php?rubrique59

8-a : Partages quasi-équitables (non S)

Adrien veut partager ses billes entre plusieurs de ses amis (au moins deux), lui n'en gardant aucune. Il considère qu'un partage est quasi équitable si les nombres de billes reçus par deux amis quelconques ne diffèrent jamais de plus d'une unité. On appellera de tels partages des **partages quasi équitables**.

Ainsi, s'il a sept billes et les partage entre deux de ses amis, le partage quasi équitable se fera obligatoirement en 3 + 4. S'il les partage entre trois amis, le partage quasi équitable se fera en 2 + 2 + 3.

On considère comme identiques les partages 3+2+2 ; 2+3+2 et 2+2+3 et on écrira désormais chaque partage sous la forme d'une somme dont les termes sont rangés en ordre croissant.

1. Écrivez les **partages quasi équitables** possibles des sept billes entre quatre amis, cinq amis, six amis, sept amis.

2. Combien existe-t-il de **partages quasi équitables** possibles s'il veut donner 8 billes, 9 billes, 10 billes ?

3. Combien existe-t-il de **partages quasi équitables** possibles pour 2011 billes ? Justifier votre réponse par une démonstration précise.

8-b : Les trois dés (tous)

On lance trois fois de suite un dé non truqué dont les six faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

Une issue de cette expérience aléatoire est donc un triplet (a, b, c) où a est le résultat obtenu au premier lancer, b le résultat obtenu au second lancer et c le résultat obtenu au troisième lancer.

1. Déterminer le nombre d'issues possibles pour cette expérience aléatoire.

2. Si le résultat des trois lancers est le triplet (a, b, c), on considère l'équation $ax^2+bx+c=0$, d'inconnue x.

Par exemple, si le résultat des trois lancers est (3, 5, 3)*, on considère l'équation* $3x^2+5x+3=0$.

a. 0 peut-il être une solution d'une équation $ax^2+bx+c=0$?

b. Justifier que quelque soit le triplet (a, b, c), l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucun nombre réel positif ou nul pour solution.

c. Existe-t-il un triplet (a, b, c) pour lequel le nombre –1 soit une solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$? Si oui donner un tel triplet (a, b, c).

Quelle est la probabilité de l'événement « –1 est solution de l'équation obtenue après le lancer des trois dés » ?

3. On souhaite construire maintenant avec le triplet (a, b, c) obtenu le triangle (éventuellement aplati) dont les trois côtés ont pour mesures respectives a, b et c (le triplet (b, c, a) donne un autre triangle).

a. Parmi les résultats suivants, indiquer dans chaque cas si une telle construction est possible :

1. $(3,5,3)$
2. $(2,5,2)$
3. $(4,2,6)$
4. $(6,3,5)$
5. $(6,1,4)$

On admet qu'il y a 156 triplets (a, b, c) permettant de réaliser la construction d'un triangle, et on suppose par la suite cette condition réalisée.

b. Quelle est la probabilité que le triangle construit soit équilatéral ?

c. Quelle est la probabilité que le triangle construit soit rectangle ?

d. Pierre pense qu'il est plus probable que le triangle obtenu soit isocèle plutôt que non isocèle. A-t-il raison ?

8-c : Racines millésimées (S)

On appelle partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x, c'est-à-dire que l'on a :

pour tout réel x, $E(x) \le x < E(x)+1$.

Par exemple : $E(2,4)=2$; $E(-2,4)=-3$; $E(\sqrt{2})=1$; $E(5)=5$ et $E(-\pi)=-4$.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 46E(x) + 13$.

L'objet de cet exercice est la résolution de l'équation $f(x) = 0$ notée (1).

1. Déterminer la partie entière de $\sqrt{2057}$ puis vérifier que ce réel est solution de l'équation $f(x) = 0$.

2. a. Montrer que le réel 1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.

b. Montrer que si $x < 1$ (dans ce cas $E(x) \leq 0$), l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

On note p le trinôme défini pour tout réel x par $p(x) = x^2 - 46x + 13$.

3. a. En utilisant l'inégalité $E(x) \leq x$, montrer que, pour tout réel x, $p(x) \leq f(x)$.

b. En déduire que si x est un réel vérifiant : $p(x) > 0$, alors le réel x n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.

4. Pour tout réel x, donner sous forme de tableau le signe de $p(x)$.

En déduire que toute solution de $f(x) = 0$ est strictement inférieure à 46.

5. a. Déduire de l'inégalité $x - 1 < E(x)$ que, pour tout réel x, $f(x) < p(x) + 46$.

b. Montrer alors que toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est strictement supérieure à 44.

6. a. Quelles sont les valeurs possibles pour la partie entière des solutions de l'équation $f(x) = 0$?

b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, $\sqrt{2057}$ et une autre α dont on précisera la valeur exacte.

9. Dijon

http://mathematiques.ac-dijon.fr/

9-a : Des complices (tous)

On dit que deux entiers naturels a et b sont **complices** s'il existe un entier naturel n tel que $ab + 1 = n^2$.

Dans ce cas, on dit que l'entier n est *associé* au couple de complices (a, b).

1. Complices d'un entier.

a. Déterminer tous les couples d'entiers complices compris, au sens large, entre 0 et 10.

b. L'entier 2011 admet 2009 comme complice. Citer deux autres complices de 2011.

c. Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 3 admet au moins trois complices.

2. Couples de complices associés à un entier donné.

L'entier 100 admet plusieurs couples d'entiers complices qui lui sont associés.

Ainsi, les couples (9 ; 1111) et (11 ; 909) sont des couples d'entiers complices associés au nombre 100.

a. Démontrer que tout entier naturel n non nul admet au moins un couple de complices $(a ; b)$ associé, c'est-à-dire tel que $ab + 1 = n^2$.

b. Déterminer tous les couples d'entiers complices associés au nombre 2011.

9-b : Théorème de Pick - Polygones entiers (S)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1 cm, on dit qu'un point est *entier* si ses coordonnées sont des nombres entiers ; on dit qu'un polygone est *entier* si ce polygone est convexe (c'est-à-dire « sans creux ») et si tous ses sommets sont des points entiers.

Pour un polygone entier (P) on note A l'aire en cm^2 de ce polygone, C le nombre de points entiers situés sur les côtés du polygone (sommets compris), et I le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur du polygone.

Le but de l'exercice est de déterminer une relation entre les nombres A, C et I.

1. Déterminer les nombres A, C et I dans les cas suivants :

a. (P) est le rectangle de sommet les points (0 ; 0), (10 ; 0), (10 ; 7), (0 ; 7).

b. (P) est le triangle de sommets les points (0 ; 0), (5 ; 2), (2 ; 4).

c. (P) est le pentagone de sommets les points (2 ; 0), (7 ; 1), (5 ; 5), (2 ; 5), (1 ; 4).

2. Dans cette question (P) est un rectangle entier dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, et dont les dimensions (en cm) sont notées n et p ($n \geq 1$ et $p \geq 1$).

Exprimer les nombres A, C et I en fonction de n et p.

En déduire une relation entre A, C et I indépendante de n et p.

3. Dans cette question (P) est un triangle rectangle entier dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées.

Démontrer que la relation entre A, C et I trouvée à la question 2. est encore valable pour ce triangle.

4. Montrer que si la formule précédente est valable pour deux polygones entiers ayant une frontière commune, elle est encore valable pour le polygone obtenu en éliminant entre eux cette frontière commune, à condition que ce nouveau polygone soit lui aussi convexe.

5. En déduire que la relation trouvée à la question 2 demeure vraie pour tout polygone entier.

9-c : Jardin à la française (autres que S)

La figure ci -contre représente le plan d'un jardin ABCD de forme carrée.

24 arbustes sont plantés sur le pourtour, un en chaque sommet, cinq autres sur chaque côté, régulièrement espacés.

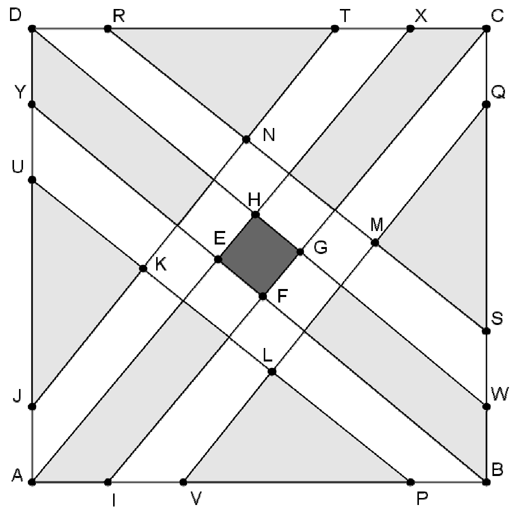
Chaque ligne du plan est rectiligne, et a pour extrémité deux arbustes, comme sur le dessin.

Les zones blanches sont les allées, les zones sablées sont des parterres de fleurs, le quadrilatère central EFGH (en grisé) représente un bassin.

1. Les lignes (AX) et (JT) qui bordent l'une des allées sont-elles parallèles ?

2. Le bassin EFGH est il carré ?

3. Les points K, E, M sont-ils alignés ?



10. Grenoble

http://www.ac-grenoble.fr/maths/

10-a : Promenade dans les aires (tous)

Une formule simple était utilisée par les arpenteurs Egyptiens pour évaluer l'aire d'un quadrilatère :

« calculer le produit des moyennes des longueurs des côtés opposés » (formule A).

Une autre formule demande de

« calculer le demi produit des longueurs des diagonales » (formule B).

Il s'agit dans cet exercice d'étudier la validité de ces formules.

1. Pensez-vous qu'il soit possible de calculer la valeur exacte de l'aire d'un quadrilatère quelconque à l'aide des seules mesures de ses côtés ? Justifier.

2. Trouver un quadrilatère pour lequel la formule A est exacte et un quadrilatère pour lequel elle ne l'est pas. Justifier les réponses.

3. Même question pour la formule B.

4. Quels sont les rectangles pour lesquels les deux formules donnent le même résultat ?

5. Montrer que l'aire du quadrilatère est toujours inférieure ou égale au résultat trouvé à l'aide de la formule B. Dans quels cas l'égalité a-t-elle lieu ?

6. Soient Q un quadrilatère quelconque et Q' le quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés de Q.

a. Quelle est la nature du quadrilatère Q' ? Démontrer ce résultat.

b. Comparer l'aire du quadrilatère Q' à celle de Q.

c. En déduire que l'aire du quadrilatère Q est toujours inférieure ou égale au résultat trouvé à l'aide de la formule A. Dans quels cas l'égalité a-t-elle lieu ?

10-b : Quel dé choisir ? (non S)

Dans ce jeu, qui se joue à deux, les joueurs choisissent à tour de rôle un dé à six faces parmi les trois dés proposés ci-dessous puis les lancent en même temps.

Le gagnant est celui des deux joueurs qui obtient le résultat le plus élevé.

Dé Rouge : six faces numérotées 4 – 4 – 4 – 4 – 4 - 4

Dé Bleu : six faces numérotées 2 – 2 – 2 – 2 – 8 – 8

Dé Vert : six faces numérotées 0 – 0 – 6 – 6 – 6 – 6

Ces trois dés sont supposés équilibrés.

Le maître du jeu dit que la numérotation des faces a été faite de façon à ce que le jeu soit équitable puisque la moyenne des chiffres inscrits sur les faces est la même quelque soit le dé choisi.

Il prétend même vous avantager en vous demandant de faire votre choix en premier.

1. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le dé Rouge ?

2. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le dé Vert ?

3. Le maître du jeu vous demande de choisir un dé puis choisit le sien.

a. Montrer que quelque soit votre choix, il a plus de chance de gagner que vous.

b. La participation au jeu coûte 1 € et vous recevez 2,50 € en cas de gain. Ce jeu vous est-il favorable ?

4. Le jeu est modifié de la façon suivante : le dé vert vous est attribué et le maître du jeu tire au hasard l'un des deux dés restants.

Qui a maintenant le plus de chances de gagner ?

10-c : Des nombres qui volent - Conjecture de Syracuse (S)

Soit N un nombre entier naturel non nul. On s'intéresse à la liste de nombres, numérotés u_0, u_1, u_2, u_3, …, construite de la façon suivante :

$u_0 = N$. Si un élément a de la liste est pair, son suivant est $\frac{a}{2}$ et s'il est impair son suivant est $3a + 1$.

Ainsi, on a pour $N = 5$: $u_0 = 5$, $u_1 = 16$, $u_2 = 8$, $u_3 = 4$, $u_4 = 2$, $u_5 = 1$, $u_6 = 4$, $u_7 = 2$ …

et pour $N = 7$: $u_0 = 7$, $u_1 = 22$, $u_2 = 11$, $u_3 = 34$, $u_4 = 17$, $u_5 = 52$, $u_6 = 26$, $u_7 = 13$, $u_8 = 40$, …

1. On suppose que $N = 3$.

a. Déterminer les cinq premiers termes de la liste associée à ce nombre.

b. Quel est le plus petit entier m tel que $u_m = 1$?

c. Que peut-on dire des termes suivants ?

2. On suppose que $N = 7$.

a. Déterminer le plus petit entier m tel que $u_m = 1$. On dit que m est la **durée de vol** du nombre N.

b. Représenter graphiquement les 20 premiers termes de la liste.

On portera en abscisse l'entier i et en ordonnée le nombre u_i.

c. Quel est le plus grand terme de cette liste ? Il s'agit de l'**altitude maximale** du vol du nombre N.

d. Quel est le plus petit entier i tel que $u_{i+1} < N$? i est la **durée de vol** de N en altitude. Illustrer sur votre graphique.

3. On suppose que $N = 11$.

a. Quelle est sa durée de vol ?

b. Quelle est sa durée de vol en altitude ?

c. Quelle est l'altitude maximale de son vol ?

Si N est un entier naturel non nul, on dit que sa durée de vol est finie s'il existe un entier naturel m tel que $u_m = 1$.

La *conjecture de Syracuse* affirme que tout nombre a une durée de vol finie. Elle n'a pas été complètement démontrée à ce jour (il existe quelques nombres pour lesquels un doute subsiste).

4. On suppose que le nombre N a une durée de vol finie. Écrire un algorithme qui permette de calculer sa durée de vol.

5. Montrer que pour tout entier naturel non nul p, il existe au moins un entier N ayant une durée de vol égale à p.

6. Quels sont les nombres ayant une durée de vol en altitude nulle ?

7. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2 ayant une durée de vol finie. Justifier qu'il a une durée de vol en altitude finie.

8. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2, tel que :

- tout nombre entier inférieur à N a une durée de vol finie,
- N a une durée de vol en altitude finie.

Montrer que N a une durée de vol finie.

9. On peut écrire tout nombre entier naturel N sous l'une des formes $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ avec k entier positif.

a. Montrer pour trois de ces quatre cas que le nombre N a une durée de vol en altitude finie.

b. Quels sont les nombres entiers naturels non nuls ayant une durée de vol en altitude égale à 2 ?

On démontre (ce résultat est ici admis) à partir des questions 8 et 9, que si N est un entier naturel non nul quelconque, les affirmations suivantes sont équivalentes :

a. Tout nombre inférieur ou égal à N a une durée de vol finie.

b. Tout nombre inférieur ou égal à N a une durée de vol en altitude finie.

10. a. Expliquer pourquoi, pour vérifier que les 10 000 premiers nombres entiers non nuls ont une durée de vol finie, il suffit de faire des calculs pour 2 500 nombres.

b. Écrire un algorithme qui permette, en effectuant le moins de calculs possibles, de déterminer l'entier naturel non nul inférieur ou égal à 10 000 ayant la durée de vol en altitude la plus longue. Justifier votre choix.

11. Proposer une méthode qui permette de limiter encore de façon significative les calculs à faire pour vérifier si les 10 000 premiers nombres entiers non nuls ont une durée de vol finie.

11. Guadeloupe

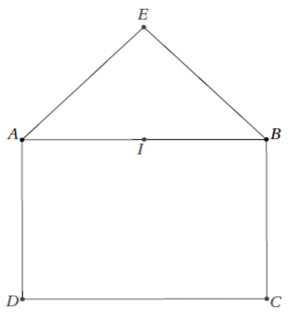
http://pedagogie.ac-guadeloupe.fr/mathematiques

11-a : Le retour du naturel

Dans cet exercice le mot entier désigne un entier naturel.

1. Le nombre 2011 peut-il s'écrire comme le produit de deux entiers consécutifs ?
2. Vérifier que 2070 est le produit de deux entiers consécutifs.
3. Quels sont les chiffres possibles pour le chiffre des unités du produit de deux entiers consécutifs ?
4. Combien y a t-il d'entiers inférieurs à 100, qui sont le produit de deux entiers consécutifs ?
5. Quels sont les entiers compris entre 2000 et 2100 qui sont le produit de deux entiers consécutifs ?
6. Montrer que le nombre a n'est un entier produit de deux entiers consécutifs que si $\sqrt{1+4a}$ est un entier impair.

11-b : Géométrie élémentaire



Dans la figure ci-contre I est le milieu de $[AB]$, le triangle ABE est rectangle et isocèle en E, le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle tel que $BC=BE$.

On désigne par M le point de concours des droites (IC) et (BD).

1. Quelle est la nature du quadrilatère $IEBC$?
2. Que vaut le rapport $\dfrac{BM}{BD}$?
3. Quelle est la nature du triangle IMB ?

12. Guyane

12-a : Les mots transformés

Une transformation sur les mots consiste à enlever les deux dernières lettres pour les placer devant dans l'ordre inverse. Ainsi par exemple, le mot JEU devient UEJ et le mot MATHS devient SHMAT.

On notera alors les résultats de ces transformations de la façon suivante :

JEU → UEJ et MATHS → SHMAT

Après un certain nombre de transformations successives, toutes les lettres reprennent leur place initiale dans le mot. Par exemple :

• Après 2 transformations, les lettres du mot JEU reprennent leur place initiale : JEU → UEJ → JEU.

• Après 6 transformations, les lettres du mot MATHS reprennent leur place initiale :

MATHS → SHMAT → TASHM → MHTAS → SAMHT → THSAM → MATHS.

1. Déterminer le nombre minimum de transformations successives nécessaire pour que les lettres des deux mots suivants reprennent leur place initiale :

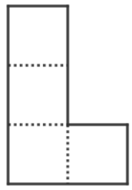
a. Le mot MATHEUX

b. le mot OLYMPIADE.

2. Qu'obtient-on lorsqu'on a transformé 2011 fois successivement le mot MATHEMATIQUES ?

12-b : Assemblages

Quatre petits carrés sont assemblés pour former une pièce en forme de L (*voir dessin ci-contre*).



Les côtés des carrés formant le contour de la pièce sont appelés les **arêtes**.

Cette pièce a donc 10 arêtes.

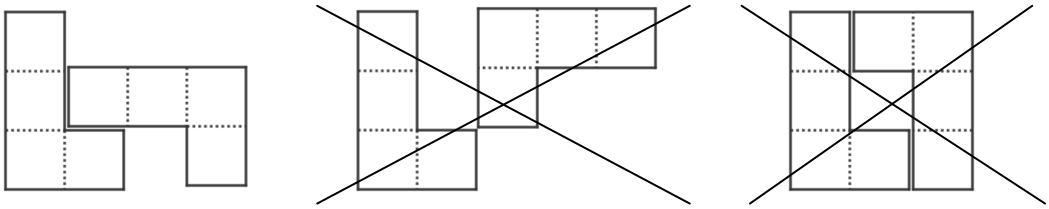
Le jeu consiste à assembler plusieurs pièces identiques en respectant les deux règles suivantes :

Règle 1 : Deux pièces doivent avoir au moins une arête commune.

Règle 2 : L'assemblage ne doit pas avoir de « trou ».

Les pièces peuvent naturellement être retournées.

Exemples



Autorisé *Non autorisé (Règle 1)* *Non autorisé (Règle 2)*

On appelle périmètre de l'assemblage, le nombre d'arêtes formant le contour extérieur de cet assemblage. Par exemple, l'assemblage de deux pièces autorisé ci-dessus a pour périmètre 16.

Dans les questions 1 à 3, il n'est demandé aucune justification.

1. Dessiner un assemblage de périmètre 16 avec 3 pièces.

2. Dessiner un assemblage de périmètre 18 avec :

a. 2 pièces.

b. 3 pièces.

c. 4 pièces.

3. Dessiner un assemblage de périmètre 22 avec :

a. Le moins de pièces possible.

b. Le plus de pièces possible.

4. Montrer qu'il est possible de faire un assemblage de périmètre 100.

5. Quels sont les entiers qui peuvent être le périmètre d'un assemblage de telles pièces ?

13. La Réunion

http://maths.ac-reunion.fr/Concours-et-Rallyes/Olympiades-de-Mathematiques/

13-a : Carrés réunionnais ? (tous)

On écrit des entiers dans toutes les cases d'un tableau, de façon à ce qu'il y ait parmi eux **au moins un entier pair et au moins un entier impair.**

Exemple :

3	1	0
9	17	2
1	3	6

On dit que deux cases sont voisines si elles ont un côté commun : par exemple la case contenant le 17 est voisine de celle contenant le 9, mais pas de celle contenant le 6.

On fabrique ensuite un deuxième tableau à partir du premier de la façon suivante : on additionne les nombres écrits dans les cases voisines d'une case du tableau initial, et on écrit cette somme dans la case correspondante du nouveau tableau. On fait de même avec les huit autres cases.

Exemple : à partir du tableau donné dans l'exemple précédent, on obtient le nouveau tableau :

10	20	3
21	15	23
12	24	5

1. Donner le tableau obtenu à partir du tableau initial suivant :

1	8	7
3	4	22
13	9	5

2. On s'intéresse aux tableaux à trois lignes et trois colonnes. Avec les conditions données au départ, peut-on obtenir :

a. Un tableau dont les cases contiennent toutes des nombres pairs ?

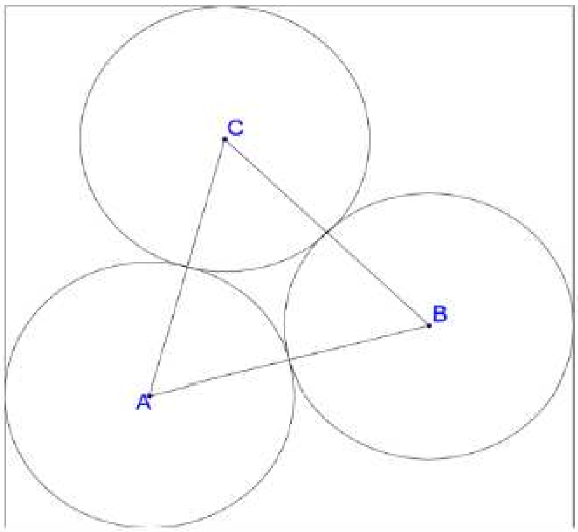
b. Un tableau dont les cases contiennent toutes des nombres impairs ?

3. ***A traiter par les élèves de la série S uniquement***

On s'intéresse aux tableaux à trois lignes et quatre colonnes. Avec les conditions données au départ, peut-on obtenir un tableau dont les cases contiennent toutes des nombres pairs ?

13-b : Cercles tangents (S)

Dans la figure suivante, on souhaite déterminer le côté du carré, sachant que les trois cercles ont pour rayon 1.



On pourra utiliser l'une des deux méthodes ci-dessous.

Méthode 1

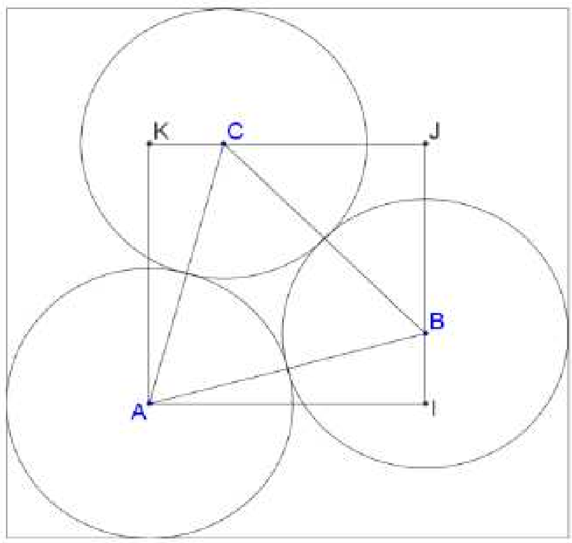
1. Déterminer de manière exacte $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant la formule suivante : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

2. En déduire la valeur du côté du carré.

Méthode 2

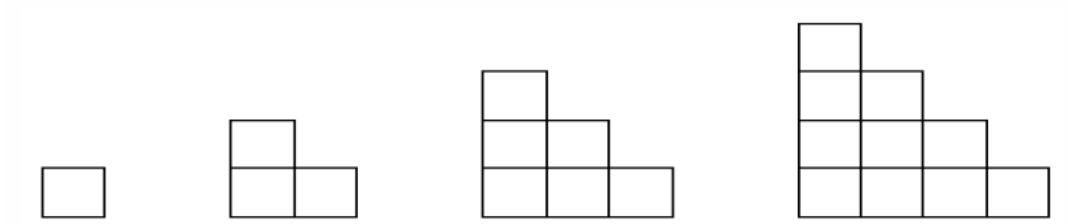
On pose . AI = x.

Déterminer de deux manières différentes l'aire du carré AIJK et en déduire la valeur de x. Donner alors la valeur du côté du carré. AIJK.



13-c : Nombres triangulaires (non S)

Les mathématiciens grecs représentaient certains nombres géométriquement, comme ici les nombres triangulaires.



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

On pose $T_0 = 0$.

1. Que valent et T_5 et T_6 ?

2. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	4	5	6	7	8
T_n	0	1	3	10				

3. On souhaite calculer T_{2011}.

Plusieurs démarches sont possibles pour parvenir à ce résultat. Chacune des aides présentées ci-dessous correspond à une démarche possible. Chaque candidat choisira au maximum l'une de ces trois aides pour répondre à la question.

Aide 1

Aide 2 : Algorithme

Aide 3 : Représentation graphique utilisant le tableau de la question 2.

14. Lille

http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/premS.html

14-a : Au bowling (non S)+

Une partie de bowling comporte 10 jeux. Chaque jeu consiste à abattre les dix quilles placées en bout de piste.

Pour cela, le joueur dispose, au maximum, de deux lancers d'une boule. À l'issue de chaque jeu, le nombre de points marqués correspond au nombre de quilles tombées, avec des bonus lorsque le joueur réalise un Spare ou un Strike qui sont définis ci-dessous :

Spare : Le joueur qui, dans un jeu, fait tomber les dix quilles en deux lancers de boules d'un même jeu réalise un Spare. Dans ce cas le bonus accordé est égal au nombre de quilles abattues lors du lancer suivant.

Strike : Le joueur qui, dans un jeu, fait tomber les dix quilles au premier lancer (Il ne joue donc qu'une fois pour ce jeu) réalise un Strike. Dans ce cas le bonus accordé est égal au nombre de quilles abattues lors des deux lancers suivants.

Enfin, au dixième jeu :

- Si le joueur réalise un Spare, il bénéficie d'un lancer supplémentaire qui donnera le bonus accordé pour ce Spare.

- Si le joueur réalise un Strike, il bénéficie de deux lancers supplémentaires qui donneront le bonus accordé pour ce Strike.

Par exemple, le score de la partie suivante est 134 points.

Numéro du jeu	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10			
Quilles abattues	5	1	8	2	7	1	10		5	3	10		10		8	1	4	2	8	2	5	Total
Points	6		10		8		10		8		10		10		9		6		10			87
Bonus			7				8				18		9						5			47

Ayant réalisé un spare au dixième jeu, le joueur a bénéficié d'un lancer supplémentaire. Les 5 quilles abattues lui ont rapporté 5 points de bonus, soit un score final de 134 points.

1. Déterminer le bonus maximal lorsqu'un joueur réalise un Spare.

2. Déterminer le bonus maximal lorsqu'un joueur réalise un Strike.

3. En complétant les cases adéquates du tableau suivant, montrer que la partie correspondante amène à un score de 183 points.

Numéro du jeu	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10			
Quilles abattues	4	6	10		7	3	10		10		10		8	2	0	10	3	1	10	5	3	Total
Points																						
Bonus																						

4. Montrer que le score maximal d'une partie est égal à 300 points.

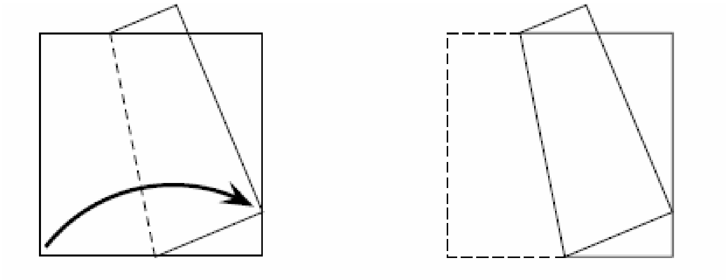
5. Sous la forme d'un tableau semblable à celui de l'exemple du début de l'énoncé, déterminer une partie aboutissant à un score de 150 points.

6. Jacques est très régulier. Lorsqu'il lance une boule, il fait toujours tomber le même nombre de quilles sans jamais réaliser de Strike mais en en renversant toujours au moins une. Quel est le plus petit score qu'il puisse réaliser? Quel est le plus grand score qu'il puisse réaliser?

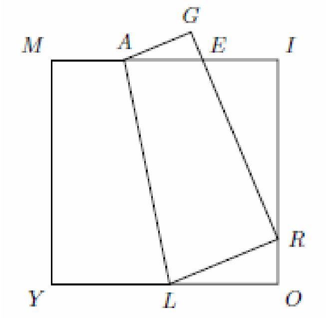
7. Au terme des neuf premiers jeux, Michel a obtenu le score partiel de 80 points, François en est à 89 points. Sachant que les deux joueurs ne disposent alors d'aucun bonus possible et que François ne réussit jamais à abattre les dix quilles en un seul lancer, dans quel(s) cas, Michel peut-il espérer faire mieux que François, indépendamment du score que fera François lors du dernier jeu ?

14-b : Les triangles de Lorie Gamy (S)+

Lorie Gamy adore plier des feuilles de papier. Aujourd'hui elle a plié une feuille carrée (de côté 1) en amenant un sommet sur un point d'un côté opposé, comme indiqué sur la figure.



Lorie nomme alors chaque sommet en utilisant les lettres de son nom et de son prénom, puis s'intéresse aux deux triangles LOR et RIE.



1. Démontrer que les deux triangles de Lorie ont leurs angles de même mesure.

2. Lorie amène le sommet nommé Y sur le milieu de [OI].

a. Faire une figure. R doit être situé au milieu de [OI].

b. Quelle est alors la position de E sur [MI] ? On pourra poser OL = x.

3. Où doit-être situé le point R sur le segment [OI] pour que E soit le milieu de [MI] ? On pourra poser IR = y.

4. Lorie est curieuse de savoir comment le périmètre du triangle RIE varie quand R parcourt le segment [OI]. Pouvez-vous l'aider à répondre à cette question ?

14-c : Des couples parfaits (tous) +

Le couple d'entiers (25 ; 36) possède deux propriétés remarquables :

- Ce sont des carrés parfaits.

- Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

Partie I

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il d'autres couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?

2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard propose l'algorithme suivant.

Pour i allant de 10 à 88
Si $\sqrt{i}$ est un entier et $\sqrt{i+11}$ est un entier
Alors écrire i et i + 11
Fin du Si
Fin du Pour

Cécile propose l'algorithme suivant.

Pour i allant de 4 à 9

Si $\sqrt{i^2+11}$ est un entier
Alors écrire i^2 et i^2 + 11
Fin du Si
Fin du Pour

Pour chaque algorithme, on appellera **temps** de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (Si) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

a. Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représente la variable i.

b. Quel est le temps de l'algorithme de Cécile ?

Partie II

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (donc compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

1. Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ? Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?

2. Quelle est la réponse au problème posé ?

3. René ne sait pas écrire d'algorithme. Comment peut-il résoudre le problème malgré tout ?

Partie III

Dans le cas des couples d'entiers à trois chiffres (compris entre 100 et 999), que vont donner les algorithmes adaptés de Bernard et Cécile ?

Quelle est la réponse au problème posé ?

15. Limoges

15-a : Grille logique ! (tous)

Remplir la grille suivante à l'aide des nombres de 1 à 25 en respectant les critères donnés et la règle suivante :

(R) deux nombres consécutifs ne peuvent pas être placés dans deux cases voisines *(par le côté ou par le sommet)*.

	A	B	C	D	E
a					
b					
c					
d					
e		1			

A : les nombres sont ordonnés *(du plus petit au plus grand ou du plus grand au plus petit)*.

B : la différence entre le plus grand et le plus petit vaut 23.

C : les nombres sont multiples de trois.

D : la somme de deux premiers nombres égale celle des deux derniers.

E : les nombres sont multiples de cinq.

a : la somme des nombres vaut 110.

d : le produit des nombres vaut 15015.

e : les nombres sont des carrés d'entier.

Décrire le remplissage de la grille en justifiant chaque étape

15-b : Auto-référence (S)

Le tableau ci-dessous est *auto-référent*. La dernière ligne se décrit elle-même.

Nombre	0	1	2	3
Apparitions du nombre sur cette ligne	1	2	1	0

On peut effectivement constater que la dernière ligne contient :

- 1 fois le nombre 0,
- 2 fois le nombre 1,
- 1 fois le nombre 2,
- 0 fois le nombre 3.

On appelle *tableau auto-référent d'ordre n* un tableau auto-référent qui contient sur la première ligne tous les entiers de 0 à n. Le tableau précédent est donc d'ordre 3.

1. Proposer un deuxième tableau auto-référent d'ordre 3.

Nombre	0	1	2	3
Apparitions du nombre sur cette ligne				

Existe-t-il un troisième tableau auto-référent d'ordre 3 ?

2. Quelle est nécessairement la somme des nombres de la dernière ligne pour un tableau auto-référent d'ordre 3 ?

Et pour un tableau auto-référent d'ordre n ?

3. Proposer un tableau auto-référent d'ordre 4.

Nombre	0	1	2	3	4
Apparitions du nombre sur cette ligne					

Existe-t-il un autre tableau auto-référent d'ordre 4 ?

4. Montrer qu'on ne peut pas construire un tableau auto-référent d'ordre 5.

5. Proposer un tableau auto-référent d'ordre 6.

Nombre	0	1	2	3	4	5	6
Apparitions du nombre sur cette ligne							

6. Sur le modèle du tableau précédent, montrer qu'on peut construire un tableau auto-référent d'ordre n pour tout entier n supérieur ou égal à 6.

15-c : Les nombres belges (non S)

On choisit un nombre à deux chiffres.

On construit alors une suite de nombres en partant de zéro et en ajoutant tour à tour le chiffre des dizaines puis le chiffre des unités du nombre choisi.

Exemples :

On choisit 25 : on construit alors la suite 0 ; 2 ; 7 ; 9 ; 14 ; 16 ; 21 ; 23 ; 28 ; …, etc.

On choisit 13 : on construit alors la suite 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 8 ; 9 ; 12 ; 13 ; 16 ; 17 ; …, etc.

Définition : on dit qu'un nombre est un *nombre belge* s'il figure dans la suite qu'il permet de construire.

Ainsi 13 est un nombre belge, alors que 25 ne l'est pas.

1. 27 est-il un nombre belge ?

2. Quel est le plus petit nombre à deux chiffres qui n'est pas belge ?

Soit M = 'ab' un nombre à deux chiffres où a désigne le chiffre des dizaines et b celui des unités.

3. Montrer que si M est multiple de $a + b$ alors M est belge.

4. Montrer que si $M - a$ est multiple de $a + b$ alors M est belge.

5. Est-il possible de trouver un nombre belge à deux chiffres qui ne vérifie pas l'une des deux conditions précédentes ? Si oui, donner le plus petit et si non, expliquer pourquoi.

6. Établir la liste des 10 premiers nombres belges à 2 chiffres.

Nombres à trois chiffres : on reprend la même définition mais on construit la suite associée en ajoutant cette fois tour à tour le chiffre des centaines puis celui des dizaines et enfin celui des unités du nombre choisi.

7. Montrer que 112 est belge.

Trouver le plus petit nombre belge supérieur ou égal à 113.

À quelle(s) condition(s) un nombre à trois chiffres M = 'abc' est-il un nombre belge ?

16. Lyon

http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/spip.php?article258

16-a : Carrés et cubes (tous)

Un, deux, trois ou quatre côtés d'un carré de côté n (n entier naturel supérieur ou égal à 2) sont peints en rouge.

On découpe ce carré en n^2 petits carrés de côté 1.

1. Dans cette question $n = 5$. Pour chaque façon, que l'on précisera, de peindre les côtés du carré, déterminer le nombre de petits carrés ayant au moins un côté rouge.

2. Julie a obtenu 28 petits carrés ayant au moins un côté rouge. Que peut valoir n ?

On peint maintenant en rouge une, deux, trois, quatre, cinq ou six faces d'un cube dont l'arête mesure n.

On coupe ce cube en n^3 petits cubes d'arête 1.

3. Dans cette question $n = 5$. Pour chaque façon, que l'on précisera, de peindre les faces du cube, déterminer le nombre de petits cubes ayant au moins une face rouge.

4. Exprimer en fonction de n, pour chaque façon de peindre le cube, le nombre de petits cubes ayant au moins une face peinte.

5. En peignant les six faces du cube, Julie a trouvé 728 petits cubes ayant au moins une face peinte.

Existe-t-il une autre configuration (une, deux, trois, quatre ou cinq faces peintes) donnant également 728 petits cubes ayant au moins une face peinte ?

16-b : Le café de Julie (tous)

Julie aime le café et se sert toujours une tasse de 200 ml.

Hier elle a bu son café de la manière suivante : elle a bu la moitié de son café, puis le tiers de ce qu'il restait, puis le quart de ce qu'il restait, et ainsi de suite jusqu'à boire le centième de ce qu'il restait.

Aujourd'hui, le café est très chaud. Julie boit le centième du café, puis le quatre-vingt-dix-neuvième de ce qu'il reste, et ainsi de suite jusqu'à boire la moitié de ce qu'il reste.

1. Montrer qu'aujourd'hui, Julie a bu 198 ml de café.

2. Déterminer la quantité de café qui restait dans la tasse hier, et démontrer que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{99\times 100}=\frac{99}{100}.$$

3. Au lieu de boire $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …, $\frac{1}{100}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{2^k}$, $\frac{1}{3^k}$, …, $\frac{1}{100^k}$ de son café, où k est un nombre entier naturel non nul.

Quelle quantité de café a-t-elle bu si $k = 2$?

4. Au lieu de boire $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{99}$, …, $\frac{1}{2}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{100^k}$, $\frac{1}{99^k}$, …, $\frac{1}{2^k}$ de son café.

Quelle quantité de café a-t-elle bu si $k = 2$?

5. Pour k quelconque, a-t-elle bu plus, moins ou autant de café si elle commence par boire $\frac{1}{2^k}$ ou $\frac{1}{100^k}$ de son café ?

17. Marseille

http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/olymp-an.htm

17-a : Des travaux coûteux (tous)+

Voici un énoncé proposé à des lycéens en France :

> « Pour 6 kilogrammes de vernis et 4 litres de cire, on paie 95 euros.
> Pour 3 kilogrammes de vernis et 3 litres de cire, on paie 55,50 euros.
> Combien paie-t-on pour 4 kilogrammes de vernis et 5 litres de cire ? »

Voici un énoncé proposé à des lycéens en Olympie des Mathématiques :

> « Pour 3 pots de peinture, 7 rouleaux de papier peint et 2 pots de colle, on paie 95 euros.
> Pour 2 pots de peinture, 7 rouleaux de papier peint et 6 pots de colle, on paie 82 euros.
> Combien paie-t-on pour 5 pots de peinture, 12 rouleaux de papier peint et 4 pots de colle ? »

Saurez-vous résoudre, tel un Olympien, ces deux exercices ?

17-b : Le solitaire (S)

Deux configurations du **jeu de solitaire** sont disponibles dans le commerce.

Nous allons montrer que l'une des deux configurations ne permet jamais de gagner la partie !

Opérations sur des dominos à 4 faces

On appelle dans cet exercice **4-Domino** (ou **4-D**) une pièce de bois carrée séparée en quatre parties égales contenant chacune un nombre égal à 0 ou à 1. On peut multiplier ou additionner les 4-D en utilisant les règles suivantes :

R1 :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z & t \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline x' & y' \\ \hline z' & t' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline xx'+yz' & xy'+yt' \\ \hline zx'+tz' & zy'+tt' \\ \hline \end{array}$$

R2 :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z & t \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline x' & y' \\ \hline z' & t' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline x+x'' & y+y' \\ \hline z+z' & t+t' \\ \hline \end{array}$$

R3 : Un nombre pair est remplacé par 0 et un nombre impair par 1.

Premiers calculs

On considère les 4-D nommés $E = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ et $F = \begin{array}{|c|c|}\hline x' & y' \\ \hline z' & t' \\ \hline \end{array}$

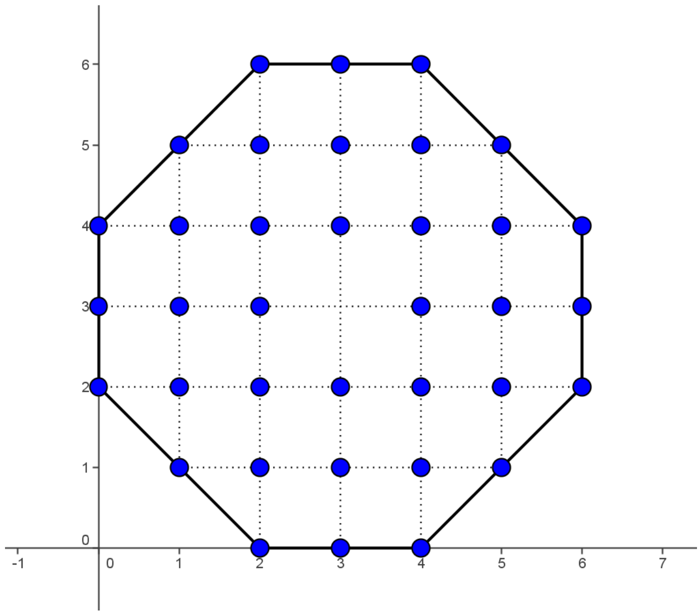
1. Montrer que : $F^2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$

2. Montrer que $E = F^3$, que $E \times F = F \times E = F$ et que $E + F = F^2$.

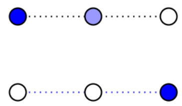
3. En déduire que $F^2 + F^3 = F^4$ et que $F^4 + F^5 = F^3$.

Une application au jeu du solitaire

On considère la configuration ci-contre du jeu du solitaire, où chaque disque représente une bille (il n'y a pas de bille en $(3\,;3)$).



L'objectif du jeu est de « manger » les billes les une après les autres en utilisant uniquement des déplacements horizontaux ou verticaux: on présente sur la figure ci-dessous un déplacement horizontal (où on dira que la bille centrale grisée a été « **mangée** »).



Avant déplacement (étape t)

Après déplacement (étape t+1)

Appelons **configuration** la donnée d'un ensemble de cases qui sont occupées par une bille. Cet ensemble est donc constitué d'un certain nombre de points de coordonnées respectives $(x_1\,;y_1)$, …, $(x_n\,;y_n)$.

On associe alors à chaque configuration le 4-D : $G = F^{x_1+y_1} + ... + F^{x_n+y_n}$.

À chaque étape t du jeu nous pouvons donc considérer l'ensemble des cases occupées et calculer le 4-D noté G_t.

L'étape initiale $(t=0)$ correspond à la figure donnée ci-dessus où toutes les cases (sauf la case centrale $(3\,;3)$ sont occupées.

On dira que la partie est **gagnée** quand le joueur arrive, étape après étape, à manger toutes les billes et termine avec une seule bille sur le plateau.

4. Quand le joueur passe de l'étape t à l'étape $t+1$, combien de cases modifie-t-il exactement ?

5. On suppose que le joueur a déjà effectué t étapes avec succès et que la $(t+1)$-ième étape consistera à manger la bille placée dans la case $(x\,;y)$.

a. On étudie tout d'abord le cas où $(x\,;\,y) = (2\,;\,2)$.

i) On suppose que le coup réalisé se fait horizontalement. Montrer que $G_{t+1} = G_t$.

ii) On suppose que le coup réalisé se fait verticalement. Montrer que $G_{t+1} = G_t$.

b. i) Examiner les différentes situations correspondant à $x \le 3$ et $y \le x$. On admettra que toute configuration peut se ramener à un de ces cas.

ii) Que peut-on en déduire sur l'évolution du 4-D G_t pendant la durée du jeu ?

6. Peut-on gagner ? *(On pourra utiliser le fait que la somme de trois puissances consécutives de F s'annule)*

17-c : L'algorithme de Prabekhar (autres que S) +

1. À partir d'un nombre donné, on construit une suite de nombres de la façon suivante : chaque nombre est la somme des carrés des chiffres du nombre précédent.

Ainsi, si le premier nombre est 2 332 011, le deuxième nombre est $2^2+3^2+3^2+2^2+0^2+1^2+1^2=28$, le troisième nombre est 2^2+8^2 et ainsi de suite…

Calculer le 2011ème nombre de cette suite.

2. Calculer le 2011ème nombre de la suite obtenue en partant du nombre 1248.

18. Martinique

http://cms.ac-martinique.fr/discipline/mathematiques/

18-a : Jeux de cubes

On construit un grand cube au moyen de 64 petits cubes de 1cm de côté.

1. Quelle est la longueur du côté du grand cube ?

2. On peint le grand cube obtenu précédemment, puis on le démonte. On observe alors le nombre de faces peintes sur les petits cubes.

a. Y a-t-il des petits cubes ayant 3 faces peintes ? Si oui, combien ?

b. Indiquer toutes les possibilités, et pour chacune d'elles, donner le nombre de petits cubes concernés.

3. On reconstruit le grand cube et on note O son centre.

Combien de petits cubes sont entièrement contenus à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon 2 cm ?

4. On rajoute à ce grand cube des petits cubes de 1 cm de côté de façon à obtenir un nouveau grand cube de 6 cm de côté.

a. Combien de petits cubes doit-on rajouter ?

b. Combien de petits cubes sont entièrement contenus dans la sphère centrée au centre du nouveau grand cube et de diamètre 6 cm ?

18-b : Jeu de billes

Un jeu oppose deux joueurs A et B.

Partie A

On dispose d'un tas de billes contenant n billes rouges et p billes bleues.

Chaque joueur choisit à tour de rôle une couleur et retire du tas un certain nombre de billes de cette couleur (au moins une). Le joueur qui retire la dernière bille du jeu a perdu.

L'état des effectifs des billes dans le tas est représenté par un couple $(n\,;p)$ appelé configuration : le premier nombre indiquant le nombre de billes rouges, et le deuxième le nombre de billes bleues.

Par exemple, si le tas compte 3 billes rouges et 5 billes bleues, on note cette configuration (3 ; 5).

Une configuration est dite **gagnante** si le joueur devant jouer à partir d'elle est sûr de gagner quelles que soient les défenses de son adversaire. Elle est dite **perdante** si le joueur devant jouer à partir d'elle est sûr de perdre quels que soient ses choix si son adversaire agit au mieux.

1. Donner une configuration simple toujours gagnante ayant au moins une bille de chaque couleur.

2. La configuration (2 ; 2) est-elle gagnante ?

3. Que peut-on dire de la configuration $(n\,;n)$ pour $n \geq 3$?

Partie B

On dispose d'un tas de billes contenant n billes rouges, p billes bleues et q billes jaunes. On garde la même règle du jeu.

L'état des effectifs des billes dans le tas est représenté par un triplet $(n\,;p\,;q)$ appelé configuration : le premier nombre indique le nombre de billes rouges, le deuxième le nombre de billes bleues et le troisième le nombre de billes jaunes.

1. Donner une configuration simple toujours gagnante et une autre toujours perdante, ayant au moins une bille de chaque couleur.

2. Que peut-on dire des configurations (1 ; 2 ; 3) et (2 ; 4 ; 5) ? Justifiez vos réponses.

19. Montpellier

http://webpeda.ac-montpellier.fr/mathematiques/spip.php?article37

19-a : L'argent de poche (S)+

Au cours d'un repas, Camille revendique une augmentation de son argent de poche auprès de ses parents.

Son père, un peu excédé et amusé à la fois, lui répond : « Tu auras une augmentation de ton argent de poche si tu gagnes deux parties de tennis consécutives sur les trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. »

Camille sait que son père joue mieux que sa mère. De plus, l'étude des résultats des matchs précédents lui permet d'affirmer que la probabilité de vaincre son père est un nombre a et que celle de vaincre sa mère est b.

Quelle doit être la stratégie de Camille : jouer d'abord contre son père ou contre sa mère ?

19-b : La parabole et le triangle rectangle (S)+

Le nombre a est un réel strictement positif et C_a désigne la parabole d'équation $y=-a\left(x^2-1\right)$. Les points $\mathrm{A}\left(-1\,;0\right)$ et $\mathrm{B}\left(1\,;0\right)$ sont les points d'intersection de la parabole C_a et de l'axe des abscisses.

1. On cherche à déterminer l'existence de points M de la parabole C_a tels que le triangle MAB soit rectangle en M.

a. Montrer que si $a=2$, il existe deux points M de la parabole C_a répondant à la question. Faire une figure et déterminer, en la justifiant, une mesure des angles aigus des triangles rectangles obtenus.

b. Pour quelles valeurs du réel a existent-ils deux points M de la parabole C_a tels que le triangle MAB soit rectangle en M ?

2. Comment choisir le réel a pour qu'il existe au moins un point M de la parabole C_a tel que le triangle MAB soit rectangle en M et qu'un des angles aigus du triangle MAB ait pour mesure $\dfrac{\pi}{6}$ radians.

3. Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{4}\right[$.

Déterminer en fonction de α le réel a pour qu'il existe au moins un point M de la parabole C_a tel que le triangle MAB soit rectangle en M et qu'un des angles aigus du triangle MAB ait pour mesure α radians. Que peut-on dire lorsque α tend vers 0 ?

19-c : L'argent de poche (autres que S)

Au cours d'un repas, Camille revendique une augmentation de son argent de poche auprès de ses parents. Son père, un peu excédé et amusé à la fois, lui répond : « Tu auras une augmentation de ton argent de poche si tu gagnes deux parties de tennis consécutives sur les trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. »

Camille sait que son père joue mieux que sa mère. De plus, l'étude des résultats des matchs précédents lui permet d'affirmer que la probabilité de vaincre son père est 0,3 et que celle de vaincre sa mère est 0,5.

Quelle doit être la stratégie de Camille : jouer d'abord contre son père ou contre sa mère ?

19-d : Les cartes (autres que S)

Partie A

Une magicienne vous présente les cinq cartes représentées ci-dessous et que l'on a, par commodité, appelées A, B, C, D et E :

A	1	3	5	7
	9	11	13	15
	7	19	21	23
	25	27	29	31

B	2	3	6	7
	10	11	14	15
	18	19	22	23
	26	27	30	31

C	4	5	6	7
	12	13	14	15
	20	21	22	23
	28	29	30	31

D	8	9	10	11
	12	13	14	15
	24	25	26	27
	28	29	30	31

E	16	17	18	19
	20	21	22	23
	24	25	26	27
	28	29	30	31

Elle vous demande de choisir un nombre parmi ceux notés sur l'une de ses cartes sans le lui révéler. Elle vous demande ensuite de lui montrer toutes les cartes sur lesquelles ce nombre est écrit. Elle vous donne alors la valeur de votre nombre secret ! Comment fait-elle ?

Partie B

Pourriez-vous fabriquer le même jeu avec six cartes et des nombres entiers compris entre 1 et 63 ?

20. Nancy-Metz

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/olympiad.htm

20-a : Petites boîtes (tous)

1. a. On a décomposé un rectangle de longueur 40 cm et de largeur 24 cm en carrés tous identiques dont le côté est le plus grand entier possible, sans perte.

Combien mesure le côté des carrés ?

b. On a disposé plusieurs rectangles du type précédent (40 cm x 24 cm), assemblés bord à bord, tous disposés dans le même sens, pour former un carré le plus petit possible.

Combien mesure le côté de ce carré ?

2. Soit B_1 une boîte en forme de pavé droit. Sa base est un carré de côté $a = 120$ cm et sa hauteur est un nombre h de cm. Soit B_2 une boîte en forme de pavé droit de dimensions 24 cm, 40 cm et 12 cm. On veut remplir entièrement (sans espaces vides) la boîte B_1 avec des boîtes identiques B_2.

a. Montrer que si h est un multiple de 12, alors le remplissage de B_1 par des boîtes B_2 est possible.

b. On prend $h = 100$. Montrer que le remplissage est encore possible.

3. Dans cette question, on prend $h = 96$. On veut remplir entièrement la boîte B_1 avec des boîtes cubiques B_3, toutes identiques.

Soit x la longueur de l'arête de B_3. Sachant que chaque boîte B_3 doit contenir au moins 25 et au plus 30 boîtes cubiques B_4, toutes identiques, d'arête y, quelles sont les valeurs entières possibles de x et de y ?

20-b : Fonctions (S)

L'objectif de l'exercice est de déterminer une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifie les deux conditions ($\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels) :

- $f(1)=1$

- pour tous les entiers naturels m et n, $f(m+n)=f(n)\times f(m)+f(n)+f(m)$

1. On suppose qu'une telle fonction f existe.

a. Calculer $f(0)$. (On pourra poser $n = 0$ et $m = 1$)

b. Calculer $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) = 2f(n)+1$

3. On pose pour tout entier naturel n, $g(n)=f(n)+1$.

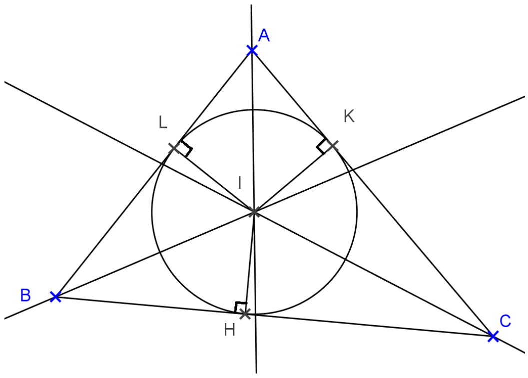
Montrer que, pour tous les entiers naturels m et n : $g(n+m)=g(n)\times g(m)$.

4. Donner une fonction f qui réponde au problème.

20-c : Les bassins (non S)

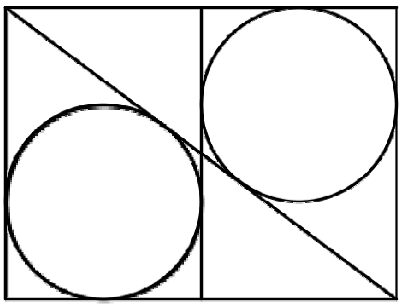
On rappelle que dans tout triangle les trois bissectrices des angles sont concourantes en un point.

Ce point est le centre du cercle inscrit au triangle.



1. a. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit r le rayon du cercle inscrit. Soient H, L et K les points des segments [CB], [AB] et [CA] tels que r = IH = IL = IK.

Calculer l'aire du triangle IAB en fonction de AB et de r.



b. Soit S l'aire du triangle ABC.

Démontrer l'égalité : $(AB+BC+AC)\times r=2S$.

2. Dans un jardin rectangulaire deux bassins circulaires sont tangents à deux côtés, à une diagonale du rectangle ainsi qu'au segment joignant les milieux de deux côtés comme l'indique la figure ci-contre.

Sachant que le rayon de chacun des bassins mesure 2 mètres, calculer la longueur et la largeur du jardin.

21. Nantes

http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/49496062/0/fiche___pagelibre/&RH=1160080235671

21-a : Terminaison (S)

Dans tout l'exercice N et n désignent deux entiers naturels avec n non nul.

On appelle **terminaison à *n* chiffres** d'un nombre entier N (ayant au moins n chiffres) le nombre formé par les n derniers chiffres de N.

Exemple : 52 est la terminaison à 2 chiffres de 35 752.

L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques cas où les nombres N et N^2 ont la même terminaison.

1. Quels sont les nombres entiers naturels égaux à leur propre carré ?

2. Terminaison à un chiffre.

On suppose dans cette question que N et N^2 ont la même terminaison à un chiffre. Quelles sont les valeurs possibles pour ce chiffre ?

3. Terminaison à deux chiffres (N a au moins deux chiffres).

a. Montrer que tout produit de deux nombres admettant 25 pour terminaison admet également 25 pour terminaison.

b. On suppose dans cette question que N et N^2 ont la même terminaison à deux chiffres. Trouver toutes les valeurs possibles pour cette terminaison.

4. Terminaison à trois chiffres (N a au moins trois chiffres).

a. Déterminer tous les chiffres k, tels que les nombres $100k + 25$ et $(100k + 25)^2$ aient la même terminaison à trois chiffres.

b. Donner un exemple d'un nombre N à quatre chiffres tel que N et N^2 aient la même terminaison à trois chiffres.

c. On suppose que N et N^2 ont la même terminaison à trois chiffres.

Trouver toutes les terminaisons à trois chiffres de N.

5. Et plus... (N a au moins cinq chiffres).

Trouver une terminaison à cinq chiffres (autre que 00000 et 00001) telle que N et N^2 aient la même terminaison à cinq chiffres.

6. Au cube (N a au moins trois chiffres).

Trouver toutes les terminaisons à trois chiffres telles que le nombre N et son cube N^3 aient la même terminaison à trois chiffres.

21-b : Paradoxe de Bertrand (S)+

Dans tout l'exercice ABC est un triangle équilatéral dont le cercle circonscrit Γ_1 de centre O est de rayon 1.

On appelle corde de Γ_1 tout segment dont les extrémités sont deux points de Γ_1.

Le but de l'exercice est de comparer différentes façons de calculer, lorsqu'on trace au hasard une corde de Γ_1, la probabilité que sa longueur soit supérieure ou égale à BC.

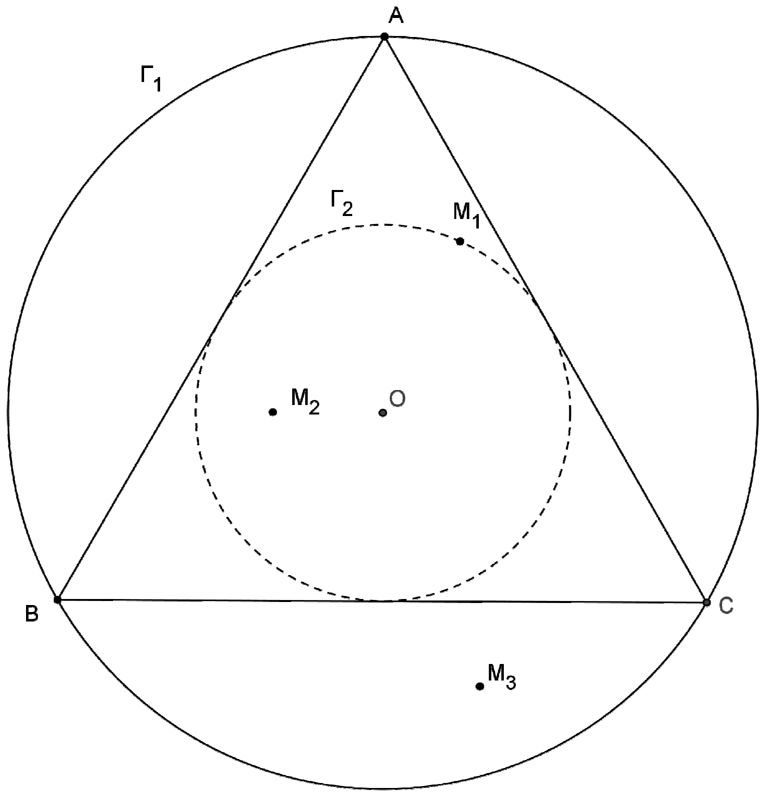
1. Déterminer la longueur BC.

2. a. Montrer que pour tout point M, distinct de O, situé à l'intérieur du cercle Γ_1, il existe une unique corde de Γ_1 ayant M pour milieu.

b. Soit Γ_2 le cercle inscrit dans le triangle ABC. M_1, M_2 et M_3 sont trois points à l'intérieur de Γ_1 tels que : M_1 est un point situé sur Γ_2, M_2 et M_3 sont respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de Γ_2.

Sur la figure ci-contre, construire les cordes de Γ_1 ayant pour milieux respectifs M_1, M_2 et M_3.

Comparer la longueur de chacune de ces trois cordes avec la longueur BC.



c. On choisit au hasard un point M distinct de O et à l'intérieur du cercle Γ_1. Quelle est la probabilité que la corde de milieu M ait une longueur supérieure ou égale à la longueur BC ?

3. *Cordes et un premier algorithme*

On considère l'algorithme (**1**) ci-dessous : soit D le symétrique de A par rapport au centre O de Γ_1.

Algorithme (**1**)

Initialisation : $k = 0$; $n = 10$

Traitement :

Pour i allant de 1 à n,

placer le point M_i tel que $\overrightarrow{AM_i} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AD}$;

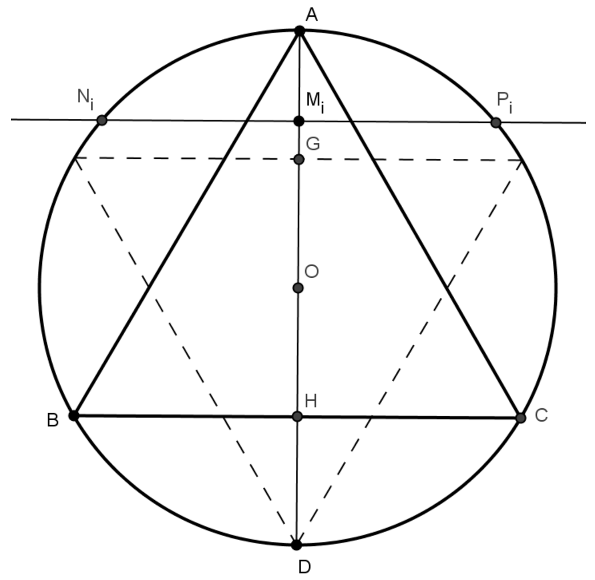
tracer la corde $[N_iP_i]$ passant par M_i et perpendiculaire à (AD) ;

calculer la distance N_iP_i ;

si $N_iP_i \geq BC$ alors k prend pour valeur $k+1$;

fin Pour

Sortie : afficher $\frac{k}{n}$.



a. Quel nombre affichera cet algorithme ?

b. On modifie l'algorithme en remplaçant l'instruction « $n = 10$ » par « $n = 100$ », puis par « $n = 1000$ », enfin par « $n = 1\,000\,000$ ». Quel nombre affichera cet algorithme dans chacun de ces cas ?

c. On place au hasard un point M sur [AD] et on trace la corde de Γ_1 de milieu M et perpendiculaire à (AD). Quelle est la probabilité p que cette corde soit de longueur supérieure ou égale à BC ?

4. *Cordes et un second algorithme*

Dans cette question la droite (AT) est tangente au cercle Γ_1. On considère l'algorithme (**2**) ci-dessous :

Algorithme (**2**).

Initialisation : $k = 0$.

Traitement :

Pour i allant de 1 à 99,

placer le point M_i de Γ_1 tel que

$\widehat{TAM_i} = \frac{i}{180} \times 180°$;

calculer la distance AM_i ;

si $AM_i \geq BC$ alors k prend pour valeur $k+1$;

fin Pour

Sortie : afficher $\frac{k}{99}$.

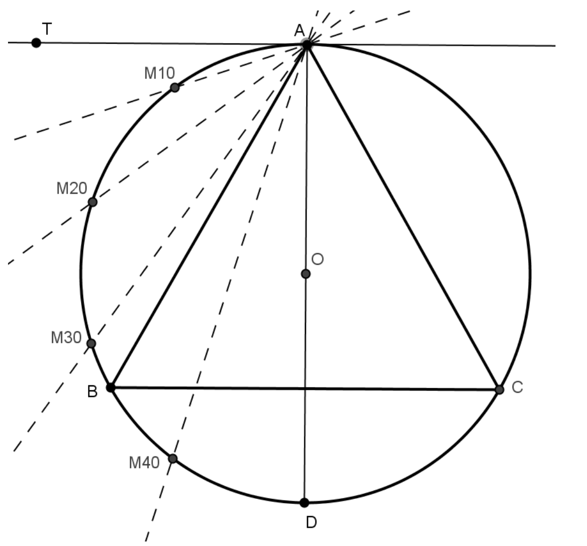


Figure 2

a. Quel nombre affichera cet algorithme ?

b. On choisit au hasard un point M sur le cercle Γ_1. Quelle est la probabilité que la longueur AM soit supérieure ou égale à BC ?

5. *Conclusion*

Peut-on définir la probabilité de choisir, parmi toutes les cordes d'un cercle, une corde de longueur supérieure ou égale à celle du côté du triangle inscrit dans ce cercle ?

21-c : Nombres sympas (non S)

On dit qu'un nombre entier naturel est **sympathique** si tous ses chiffres sont différents et s'il est multiple de la somme de ses chiffres.

Par exemple, 24 est sympathique car $24 = 4 \times (2 + 4)$, mais 14 ne l'est pas car 14 n'est pas multiple de $1 + 4$.

1. Recopier le tableau ci-dessous et entourer tous les nombres sympathiques qui y sont présents.

10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29
30	31	32	33	34

2. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'aux nombres entiers à trois chiffres.

a. Quel est le plus petit nombre sympathique à trois chiffres ? Le plus grand ?

b. Quels sont les nombres sympathiques à trois chiffres dont la somme des chiffres est 6 ?

c. On considère un nombre à trois chiffres distincts, multiple de 9. Quelles sont les valeurs possibles de la somme de ses chiffres ? Ce nombre est-il sympathique ?

3. Nombres sympathiques à quatre, cinq ou dix chiffres.

a. Peut-on avoir un nombre sympathique à quatre chiffres pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4 ?

b. Peut-on avoir un nombre sympathique à cinq chiffres pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ?

c. Quels sont les nombres sympathiques à dix chiffres ?

4. On choisit au hasard un nombre sympathique à trois chiffres et on le divise par la somme de ses chiffres. Quelle est la plus grande valeur possible du quotient obtenu ?

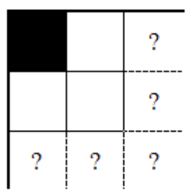
21-d : Grilles (non S)

Soit c un entier naturel supérieur ou égal à 3. Une grille $c \times c$ est un carré constitué de c^2 cases que l'on recouvre de carreaux noirs ou blancs en suivant les règles ci-dessous :

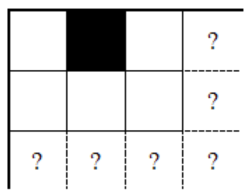
- R_1 : chaque case de la grille doit être recouverte d'un seul carreau (à choisir entre noir et blanc) ;
- R_2 : deux carreaux noirs ne peuvent être en contact que ce soit par un côté ou par un sommet ;
- R_3 : un carreau blanc doit toujours être en contact avec un et un seul carreau noir (par un côté ou par un sommet).

On considère les trois configurations suivantes :

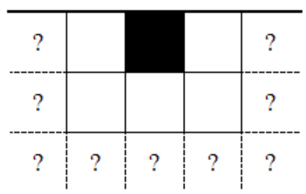
- Carreau noir en coin. Par exemple :



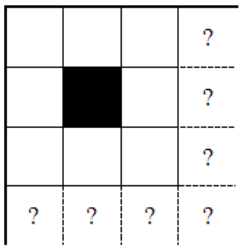
- Carreau noir en bordure (et pas en coin). Par exemple :



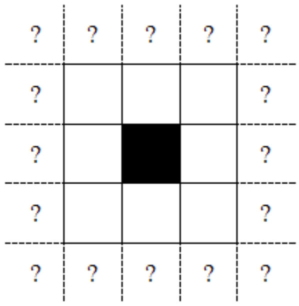
ou



- Carreau noir immergé. Par exemple :



ou



1. Grille 5×5.

On propose ci-dessous trois dispositions :

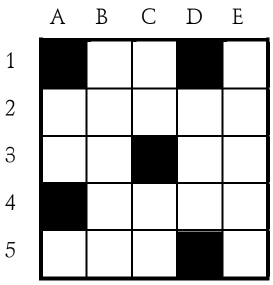


Figure 1

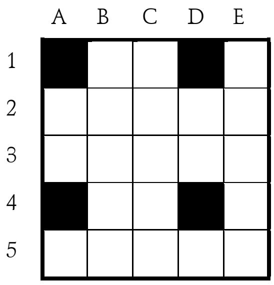


Figure 2

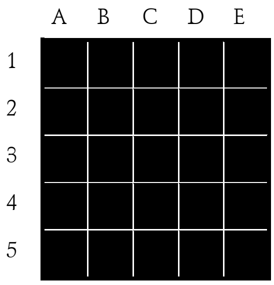


Figure 3

Indiquer pour chaque figure représentée si elle respecte les règles énoncées et préciser, lorsque ce n'est pas le cas, la règle non respectée.

2. Grille 3×3.

Représenter toutes les dispositions possibles permettant de recouvrir une grille 3×3.

3. Grille 7×7.

Le nombre de carreaux noirs en coin utilisés pour recouvrir la grille 7×7 est noté n, celui des carreaux noirs en bordure est noté p et celui des carreaux noirs immergés est noté q.

Le but de cette partie est de déterminer les triplets $(n\ ;p\ ;q)$ qui permettent de recouvrir la grille donnée.

a. Justifier que : $4n + 6p + 9q = 49$.

b. Démontrer que les cas $n = 0$, $n = 2$ et $n = 3$ sont impossibles.

c. En déduire les triplets d'entiers naturels $(n\ ;p\ ;q)$ solutions de l'équation: $4n + 6p + 9q = 49$.

d. Montrer qu'il n'existe qu'un seul triplet permettant de résoudre le problème. Illustrer ce cas par une figure.

22. Nice

http://www.ac-nice.fr/maths/

22-a : Algorithme (S) +

Rappel : N désigne la **partie entière** d'un nombre réel positif x :

- Si $x < N + 0,5$ alors l'arrondi à l'unité de x est N ;
- Si $x \geq N + 0,5$ alors l'arrondi à l'unité de x est $N + 1$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\{n\}$ le nombre d'entiers p tels que l'arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$ soit égal à n.

Exemples :

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4
$\{n\}$	$\{1\}=2$		$\{2\}=4$				$\{3\}=6$						…

1. Calculer $\{4\}$.

2. Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur la valeur de n puis qui affiche le nombre $\{n\}$.

On utilisera les fonctions suivantes :

round(x)	Retourne l'arrondi à l'unité du nombre x
sqrt(x)	Retourne la racine carrée du nombre x

3. En faisant fonctionner cet algorithme pour plusieurs valeurs de n, on obtient :

n	5	6	10
$\{n\}$	10	12	20

Que peut-on conjecturer sur la valeur de $\{n\}$ en fonction de n ?

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Justifier qu'il n'existe aucun entier naturel p tel que $\sqrt{p} = n + 0,5$.

On admet que de la même façon, il n'existe aucun entier naturel p tel que $\sqrt{p} = n - 0,5$.

b. Combien y a-t-il d'entiers p qui vérifient $n - 0,5 < \sqrt{p} < n$?

c. Combien y a-t-il d'entiers p qui vérifient $n < \sqrt{p} < n + 0,5$?

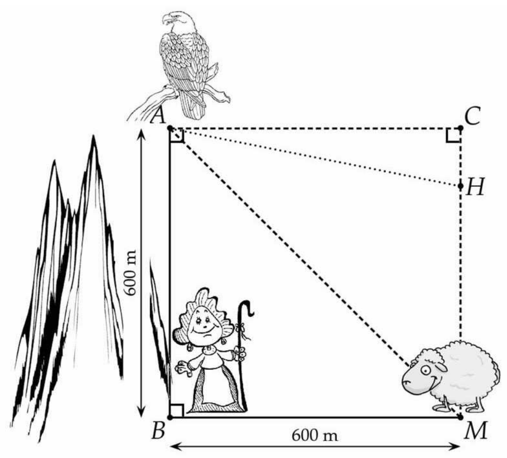
d. Déduire de ce qui précède la valeur de $\{n\}$.

5. Pour tout entier naturel non nul p, on note $R(p)$ l'arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$.

On considère tous les nombres entiers p tels que $R(p) = 10$.

Que vaut la somme de tous ces entiers ?

22-b : The Sheep and the Eagle (tous) +



Un aigle se trouve dans son nid (point A) sur un piton rocheux à 600 m au-dessus d'une prairie.

Un mouton (point M) se trouve dans la prairie à 600 m de la verticale du rocher (point B).

L'aigle peut progresser de deux manières :

- en chute libre à la verticale à la vitesse de 156 km/h ;
- en piqué direct sur un point fixé dans n'importe quelle direction, mais pas à la verticale, à la vitesse de 60 km/h.

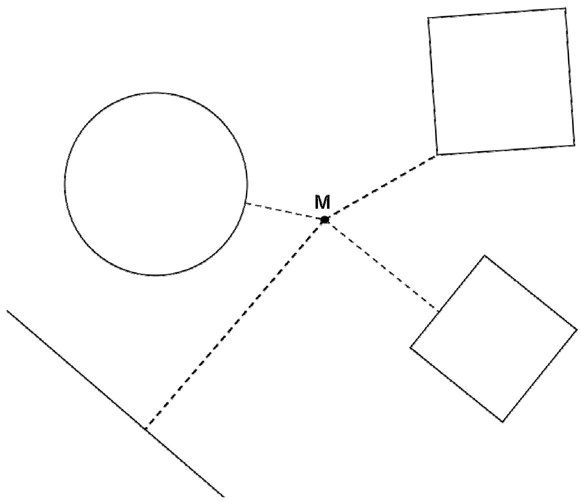
L'aigle peut attaquer de plusieurs façons :

- soit piquer directement en M ;
- soit voler directement jusqu'en C, puis en chute libre, tomber sur le mouton ;
- soit encore piquer jusqu'en H, point du segment [CM] et ensuite tomber en chute libre sur le mouton.

La bergère (au point B) qui a vu le danger peut se rendre près du mouton avec sa mobylette en 48 secondes. Pourra-t-elle à coup sûr sauver son mouton ?

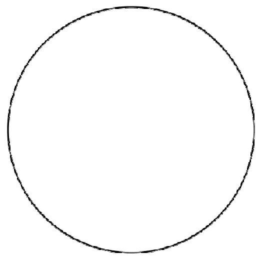
22-c : Distances (autres que S)

Le dessin ci-dessous donne quatre exemples de distances d'un point M à une figure :

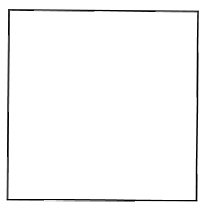


Représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

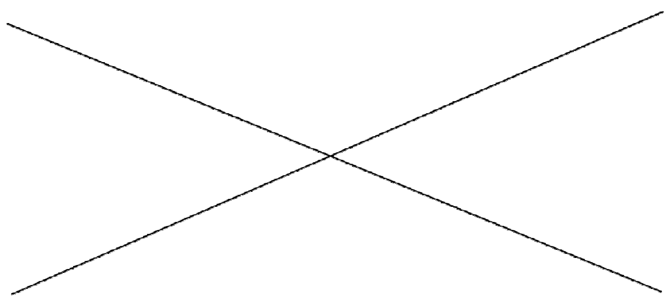
a. La distance du point M au cercle ci-contre est constamment égale à 0,5 cm :



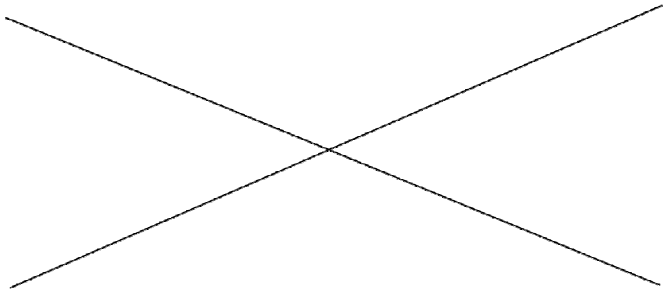
b. La distance du point M au carré ci-contre est constamment égale à 0,5 cm :



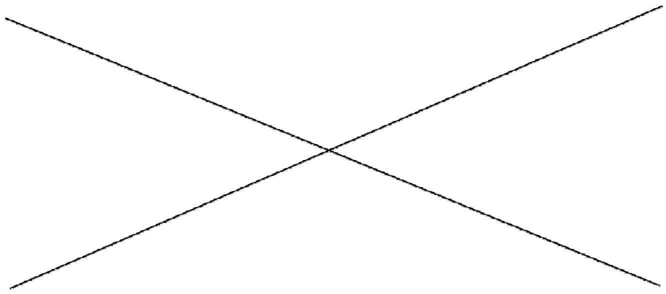
c. Les distances du point M aux deux droites sécantes ci-dessous sont égales :



d. La somme des distances du point M à chacune des deux droites séances ci-dessous est constamment égale à 2 cm :



e. La différence des distances du point M à chacune des deux droites sécantes ci-dessous est constamment égale à 2 cm :



23. Orléans Tours

http://maths.tice.ac-orleans-tours.fr/php5/spip.php?rubrique40

23-a : Marelle cyclique (tous)

Léo compose un tableau de la manière suivante :

- Sur la première ligne, il écrit deux chiffres pris parmi les dix entiers 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9 (ces deux chiffres pouvant être égaux).

- Ensuite il pose alternativement des lignes à trois ou deux cases.

- Pour remplir une case :

* Il calcule la somme des deux chiffres placés juste au-dessus et écrit dans la case le chiffre des unités de cette somme.

* S'il n'y a qu'un seul chiffre au-dessus de la case à remplir, il répète ce chiffre.

Exemple :

3	9		ligne 1
3	2	9	ligne 2
5	1		ligne 3
5	6	1	ligne 4

etc…

Partie A

1. a. Compléter le tableau ci-dessus (appelé « **marelle** ») jusqu'à la ligne 9.

Quelle serait la 2011$^{\text{ème}}$ ligne de cette figure ?

b. Construire jusqu'à la ligne 9 la marelle dont la première ligne est formée des chiffres 3 et 2.

c. Recommencer en prenant les chiffres 7 et 3 sur la première ligne.

d. Quelle conjecture peut-on faire sur les lignes 1 et 9 d'une marelle ?

2. Démontrer que toute marelle possède la propriété observée à la question 1.d. On pourra noter x et y les entiers choisis sur la première ligne.

Dans les deux parties suivantes, on garde la notation $(x ; y)$ pour les deux nombres de la première ligne.

Partie B

1. Démontrer que la première ligne est identique à la troisième si et seulement si $x + y$ est un multiple de 10 et en déduire toutes les valeurs possibles pour $(x ; y)$.

2. Donner toutes les valeurs de $(x ; y)$ pour lesquelles la première ligne est identique à la cinquième sans être identique à la troisième ligne.

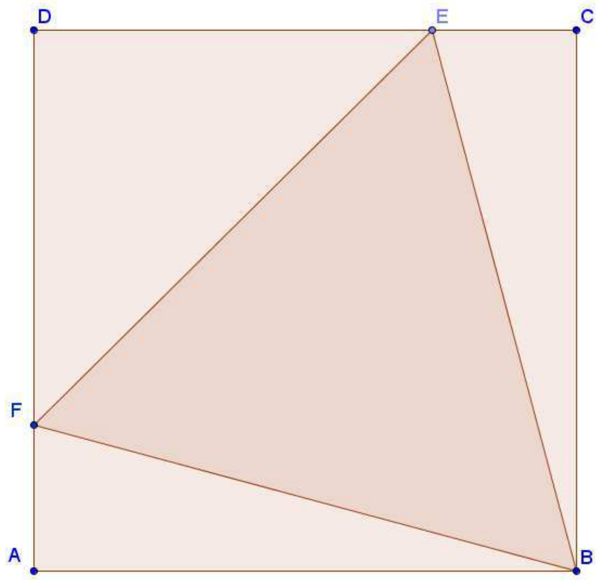
3. Peut-on donner des valeurs à $(x ; y)$ pour que la première ligne soit identique à la septième sans être identique à la troisième ligne ? Si oui, donner un exemple.

Partie C

Peut-on trouver une marelle dans laquelle apparaissent les 10 chiffres de 0 à 9 ?

Si oui, donner un exemple. Sinon, justifier l'impossibilité de construire une telle marelle.

23-b : Un triangle équilatéral inscrit …(tous)



Partie A : Un triangle équilatéral inscrit dans un carré

ABCD est un carré de côté 10 cm. On a construit un triangle équilatéral BEF tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD].

1. Démontrer que les segments [CE] et [AF] sont de même longueur et déterminer la valeur exacte de cette longueur.

2. Démontrer que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.

Partie B : Un triangle équilatéral inscrit dans un rectangle

ABCD est désormais un rectangle et on considère un triangle équilatéral BEF tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD].

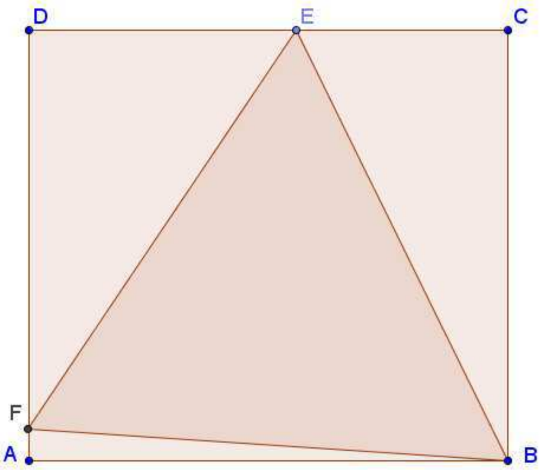
1. Dans cette question, on suppose qu'un tel triangle équilatéral existe et on se propose de démontrer alors que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.

On pose a = AB, b = AD, x = AF et y = CE.

a. Démontrer que

$$x^2 - 2bx - 2ay + a^2 = 0 \text{ et } y^2 - 2bx - 2ay + b^2 = 0 .$$

b. En déduire que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.



Pour cela, on pourra utiliser l'égalité suivante, après l'avoir vérifiée :

$$\left(x^2 - 2bx - 2ay + a^2\right)by + \left(y^2 - 2bx - 2ay + b^2\right)ax = \left[\left(b - x\right)\left(a - y\right) - ax - by\right] \times \left(ay + bx\right).$$

2. On s'intéresse maintenant à l'existence d'un triangle équilatéral inscrit dans le rectangle ABCD.

a. On se place dans le cas où le rectangle ABCD a pour dimensions AB = 10 cm et AD = 9 cm.

Construire un triangle BEF équilatéral tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD]. Expliquer la démarche et laisser apparents les traits de construction.

b. Examiner le cas où le rectangle ABCD a pour dimensions AB = 10 cm et AD = 8 cm.

24. Paris

http://mathematiques.ac-paris.fr/

24-a : Des bâtons et des pavés (tous)

En une dimension : soit N un entier naturel non nul.

On appelle **bâton** tout intervalle inclus dans $[0, N]$, non réduit à un point, dont les bornes sont des nombres entiers.

Question n°1 : Combien existe-t-il de tels bâtons ?

En trois dimensions : on dispose de cubes de même taille portant tous des numéros distincts.

On appelle boîte tout assemblage de ces cubes formant un pavé (parallélépipède rectangle) plein. Deux boîtes contenant des cubes différents sont considérées distinctes. Une boîte B comporte 385 cubes.

Question n°2 : Quelles sont les dimensions de B sachant qu'elles sont toutes strictement supérieures à un ?

Question n°3 : Combien de boîtes distinctes la boîte B contient-elle ?

On enlève 7 des 8 cubes situés au sommet de B pour former le solide S.

Question n°4 : Combien de boîtes distinctes le solide S contient-il ?

24-b : À la baguette (tous)

Une baguette est cassée en trois morceaux ; les points de fracture sont situés au hasard.

Déterminer la probabilité que l'on puisse construire un triangle non aplati avec ces trois morceaux.

25. Poitiers

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?rubrique26

25-a : Racines (tous)

Bob : « Salut Alice ! Tiens, c'est un trinôme du second degré que tu as écrit dans la marge de ta feuille. Quelles en sont les racines ? »

Alice : « Ce sont deux entiers positifs. L'une des racines est mon âge, et l'autre est l'âge de mon petit frère Clément. »

Bob : « C'est amusant ! Voyons, si je peux deviner quel âge vous avez, Clément et toi.

Cela ne devrait pas être trop difficile, puisque les coefficients sont entiers.

Je crois deviner ton âge, il me suffit de vérifier en remplaçant x par ce nombre… Zut ! Cela donne -55 au lieu de 0. »

Alice : « C'est que je n'ai pas cet âge là !… »

Bob : « Sans doute. À propos si je remplace x par 1 j'obtiens la somme des coefficients. »

Alice : « Effectivement ! Il faut aussi que tu saches que cette somme est égale à mon âge moins un. »

David qui a tout entendu, donne alors l'âge de Clément et celui d'Alice.

a. Prouver que Clément est âgé de 2 ans.

b. Déterminer l'âge d'Alice, sachant qu'elle a entre 10 et 50 ans.

25-b : Isocoupes (tous)

Pour jouer au jeu de l'isocoupe, il faut deux participants, une feuille de papier de forme polygonale et une paire de ciseaux.

Pour réaliser une isocoupe, il faut couper la feuille en deux morceaux en partant de l'un des sommets. Cette découpe doit suivre une ligne droite et l'un des deux morceaux obtenus doit être un triangle isocèle.

Le premier joueur réalise une isocoupe à partir de la feuille de départ, il jette le triangle isocèle obtenu et passe l'autre morceau au second joueur qui doit à son tour réaliser une isocoupe, et ainsi de suite…

Un joueur a gagné s'il réussit, après son isocoupe, à former une figure ayant exactement la même forme, mais bien sûr, en plus petit, que le morceau qu'il a reçu.

Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux joueurs a gagné.

A et B jouent ensemble. **Ce sont deux joueurs confirmés**, ils réalisent toujours l'isocoupe la plus astucieuse.

A coupe le premier.

1. A prend une feuille carrée. Qui va gagner ?
2. A prend une feuille rectangulaire, deux fois plus longue que large. Qui va gagner ?
3. A prend une feuille rectangulaire, n fois plus longue que large (n entier). Qui va gagner ?

4. A et C jouent ensemble. **C est un joueur débutant**. A prend une feuille carrée et coupe le premier, C coupe à son tour, mais ne réalise pas l'isocoupe la plus astucieuse, alors A coupe et gagne.

Comment coupe-t-il?

5. Certaines feuilles triangulaires permettent au joueur qui les reçoit de gagner immédiatement. Ce sont les « triangles gagnants ».

À quelles conditions un triangle sera-t-il gagnant?

6. Avec l'un des triangles gagnants, il est même impossible de perdre. Quelle forme a ce triangle immanquable ?

7. Avec un autre de ces triangles gagnants, il est possible de gagner immédiatement de deux façons différentes, en coupant à partir du même sommet. Quels sont ses angles ?

26. Reims (*)

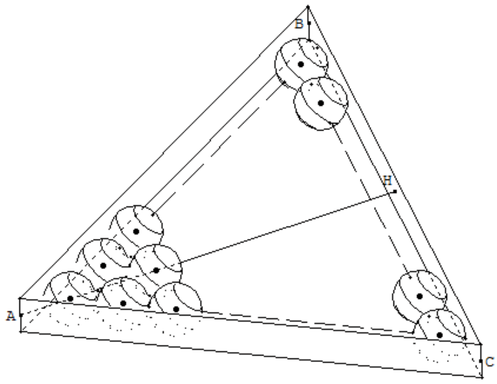
http://www.ac-reims.fr/editice/index.php?option=com_k2&view=item&layout=item&id=507&Itemid=602

26-a : Remplissage par un gel (tous)

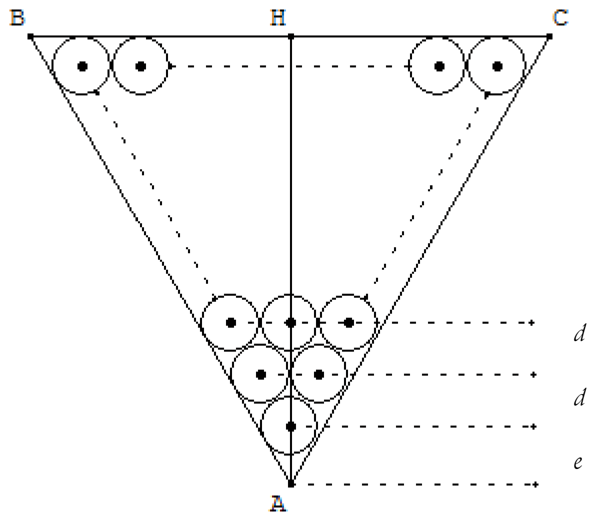
Une boite en forme de prisme droit dont la base est un triangle équilatéral, est remplie par des billes, dont le diamètre est la hauteur du prisme, bien insérées comme ci-dessous.

On veut remplir ce qui reste du prisme par un gel.

Perspective



Vue de dessus



On connaît le diamètre des billes 20 mm et la hauteur AH = 203,3 mm au dixième près par excès.

1° Déterminer la distance d de deux rangées de billes.

2° Déterminer la distance e entre la pointe de la boîte et le centre de la première bille.

3° En déduire le nombre de rangées de billes.

4° Quel volume de gel faut-il ? (résultat en cm^3 arrondi à 10^{-1} près). Volume d'une sphère de rayon r : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

26-b : Carré grécolatin (non S)

Un **carré latin** d'ordre n est un carré de n^2 cases remplies par les n premiers nombres 1, 2, ..., n, de telle façon que chaque nombre n'apparait qu'une et une seule fois par ligne et par colonne.

Ainsi, un exemple de carré latin d'ordre 6 est :

1	2	3	4	5	6
2	3	1	6	4	5
3	6	5	2	1	4
4	1	2	5	6	3
5	4	6	1	3	2

6	5	4	3	2	1

Un **carré grécolatin** d'ordre n est un carré de n^2 cases remplies par des couples de nombres et de lettres de telle façon que :

Chaque lettre n'apparait qu'une et une seule fois par ligne et par colonne.

Chaque nombre n'apparait qu'une et une seule fois par ligne et par colonne.

Chaque couple Lettre/Nombre n'apparait qu'une et une seule fois dans l'ensemble du carré.

Exemple de carré grécolatin d'ordre 5 :

A 1	B 5	C 3	D 2	E 4
B 3	C 2	D 4	E 1	A 5
C 4	D 1	E 5	A 3	B 2
D 5	E 3	A 2	B 4	C 1
E 2	A 4	B 1	C 5	D 3

1. Le carré suivant est-il un carré grécolatin d'ordre 6 ?

A 1	B 2	C 3	D 4	E 5	F 6
B 2	A 3	F 1	C 6	D 4	E 5
C 3	E 6	B 5	A 2	F 1	D 4
F 4	D 1	A 2	E 5	B 6	C 3
D 5	C 4	E 6	F 1	A 3	B 2
E 6	F 5	D 4	B 3	C 2	A 1

2. Peut-on trouver des carrés grécolatins d'ordre 2 ? Justifier.

3. Rechercher tous les carrés grécolatins d'ordre 3 dont la première ligne est A 1, B 2, C 3.

A 1	B 2	C 3

4. En déduire le nombre total de carrés grécolatins d'ordre 3.

5. Construire un carré grécolatin d'ordre 4 ayant pour première ligne A 1, B 2, C 3 et D 4.

6. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'aux carrés **latins**.

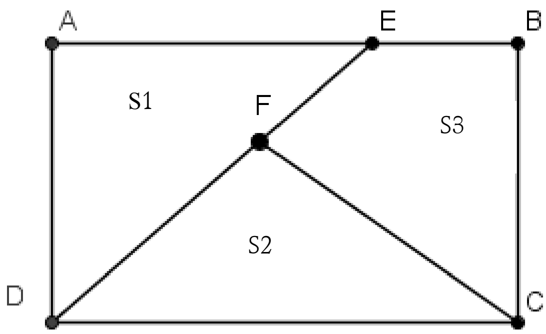
a. On sait qu'il y a 24 carrés latins d'ordre 4 qui ont pour première ligne 1, 2, 3, 4. Combien y a-t-il de carrés latins d'ordre 4 en tout ?

b. Soit q le nombre de carrés latins d'ordre n dont la première ligne est 1, 2, 3, ... ,n. Combien y a-t-il de carrés latins d'ordre n en tout ? (on attend une formule avec q et n.)

Nota : Le carré grécolatin d'ordre 6 n'existe pas. Ce problème est souvent appelé « problème des 36 officiers » et a été posé par Euler en 1782 et démontré par Gaston Tarry en 1901. On a longtemps cru qu'il n'existait pas de carrés grécolatins pour $n \geq 10$. En 1959, Parker établit un carré grécolatin d'ordre 10 puis démontre qu'il en existe pour tout ordre $n \geq 10$. Le carré d'ordre 10 de Parker a servi de base dans des tableaux ainsi que dans l'écriture du roman « La vie mode d'emploi » de Georges Perec.

26-c : Découpage d'un rectangle (S)

Sur la figure jointe, ABCD est un rectangle ; la longueur du côté AB est L, celle du côté BC est l, avec $L > l$. On place sur le côté AB le point E tel que AE = xL, $(0 < x < 1)$, et sur le segment DE le point F tel que DF = yDE, $(0 < y < 1)$.



Préliminaire : Montrer que la hauteur issue de F dans le triangle DFC a pour longueur *yl*.
On note S1 l'aire du triangle AED, S2 l'aire du triangle DFC , et S3 l'aire du quadrilatère EBCF.

1) Déterminer les valeurs de x et y pour que S1 = S2 = S3 .
2) Déterminer les valeurs de x et y pour que les trois nombres S1 , S2 , S3 , dans cet ordre ou un autre, soient en progression arithmétique.

On commencera par exemple en supposant que S1 $\leq$ S2 $\leq$ S3 , puis on étudiera tous les autres cas.

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions (x, y) ainsi déterminées.

3) Est-il possible de trouver un rectangle avec l et L entiers, tel que S1 = 1, S2 = 2, S3 =3 ?

27. Rennes

http://espaceeducatif.ac-rennes.fr/jahia/Jahia/lang/fr/pid/16941

27-a : Les Desirus Algebricus (tous) +

Les *Desirus Algebricus* sont des mammifères très rares que l'on trouve uniquement sur une petite île de l'Atlantique, Enezus Sunus.

En ce qui concerne cette espèce, les *Desirus Algebricus* sont fidèles en couple et les naissances se déroulent de la façon suivante :

- Après la naissance d'un mâle, la femelle meurt.

- Si elle n'est pas morte suite à la naissance d'un mâle, la femelle meurt après la quatrième naissance.

De plus :

- Une femelle *Desirus Algebricus* a autant de chances de donner naissance à un mâle qu'à une femelle.

- Une femelle *Desirus Algebricus* n'est jamais stérile mais ne donne naissance qu'à un seul petit à la fois (il n'y a pas de jumeaux, triplés, …).

- Lorsque la femelle disparaît, le mâle se laisse dépérir et meurt peu après.

Un comptage de ces mammifères en janvier 2010 a dénombré autant de mâles que de femelles.

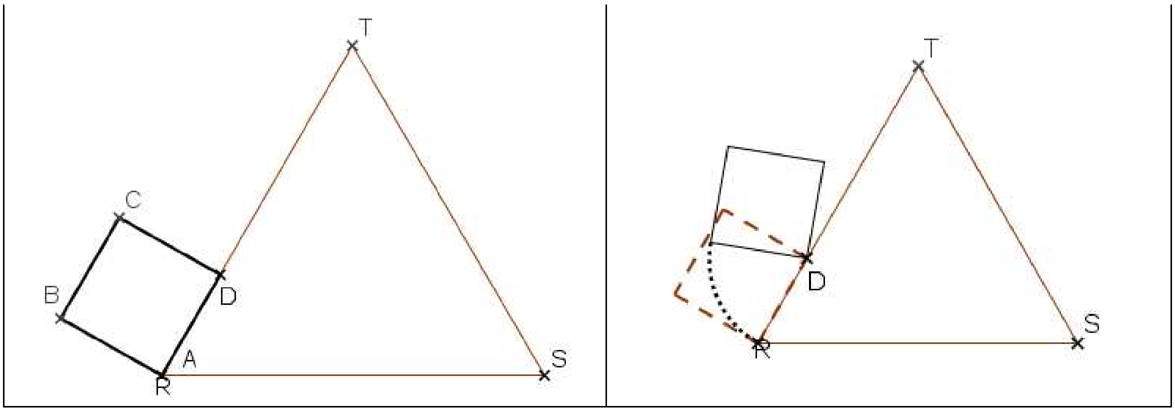
Pensez-vous que ces particularités quant à la reproduction chez les *Desirus Algebricus* vont amener à une population qui va être constituée majoritairement de mâles ? de femelles ? ou bien à parts égales de mâles et de femelles ?

27-b : Le jeu de Bruno (S)

Inspiré de « EVAPM »

Le petit Bruno possède un jeu en bois composé des deux pièces suivantes : un cube et un prisme dont la base est un triangle équilatéral. Il pose la base du prisme à plat sur une table et s'amuse avec ce jeu en faisant « tourner le cube autour du prisme », sans glissement, de la façon suivante :

Position initiale (points A et R confondus)	Première manipulation de Bruno



Ce qui conduit jusqu'au sommet où le cube bascule.

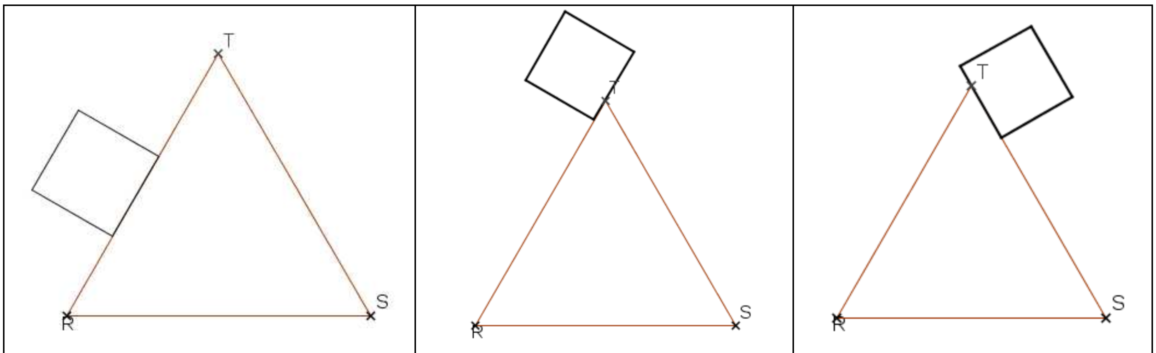


Figure 3 Figure 4 Figure 5

Et ainsi de suite…

On sait que :

- ABCD est un carré.
- RST est un triangle équilatéral de cote 80 cm.
- Au départ du jeu, le carré est posé sur le côté [RT] du triangle, le sommet A coïncide avec le point R et le carré pivote autour de D.

1. Bruno constate qu'il peut faire tourner le cube deux fois sur le côté [RT] mais qu'il bascule durant le troisième tour (figures 4 et 5). Que peut-il en déduire sur la mesure de l'arête du cube ?

2. Bruno remarque ensuite que, lorsque son cube a fait un tour complet du prisme, il revient au même endroit qu'au départ.

a. Quelles sont alors la ou les valeur(s) exacte(s) possible(s) pour la mesure de l'arête du cube de Bruno ?

b. Pour cette ou ces valeurs, tracer alors la trajectoire du point A et calculer la longueur de la trajectoire correspondante (arrondie au millimètre).

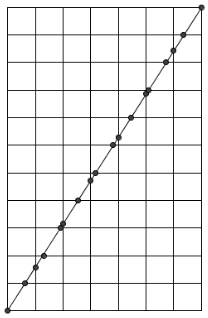
28. Rouen

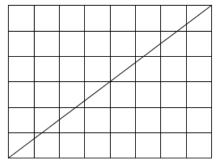
http://maths.spip.ac-rouen.fr/spip.php?rubrique86

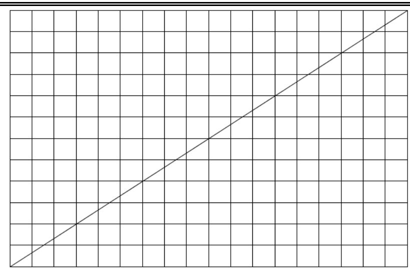
28-a : Plage et parasols (S)

1. On donne un quadrillage constitué de carrés identiques à l'intérieur d'un rectangle.

On considère une diagonale du rectangle. En s'inspirant de l'exemple ci-dessous, recopier et compléter, pour les rectangles 1 et 2, les tableaux suivants :

Exemple	
Dimensions (en nombre de carrés)	7 carrés sur 11
Nombre de sommets rencontrés	2 (les extrémités de la diagonale)
Nombre de carrés traversés	17

Rectangle 1	
Dimensions (en nombre de carrés)	
Nombre de sommets rencontrés	
Nombre de carrés traversés	

Rectangle 2	
Dimensions (en nombre de carrés)	
Nombre de sommets rencontrés	
Nombre de carrés traversés	

2. Un club de vacances souhaite aménager la plage artificielle qui borde sa piscine.

La plage, qui peut-être découpée en 2009 parcelles carrées de côté 1 unité de longueur, forme un rectangle BEAU.

a. Déterminer les dimensions possibles du rectangle constitué par la plage.

b. Un marchand ambulant souhaite parcourir la plage en ligne droite du point A au point B.

Lorsque son trajet ne rencontre pas une parcelle ou ne la rencontre qu'en un sommet, on considère que le marchand ne traverse pas cette parcelle.

Dans le cas de ce rectangle BEAU, combien de parcelles sera-t-il amené à traverser ?

c. La plagiste souhaite disposer un parasol à chaque sommet des parcelles formant la plage, à l'exception du point A. Les parasols sont tous de la même forme et plantés de la même façon.

c.1. Combien faut-il de parasols pour une plage de 2009 parcelles ?

c.2. La plagiste se tient debout au point A.

Elle voit tous les parasols de la plage, sauf ceux qui sont parfaitement plantés sur la diagonale partant de A et cachés derrière le premier parasol visible de la diagonale.

Combien voit-elle de parasols ?

28-b : Fort de café (tous)

Tous les matins, Maël boit un café à la gare dans un gobelet en carton recyclé.

1. Le stand de boissons auprès duquel il se fournit possède une machine à café capricieuse.

Chaque jour, Maël relève la qualité du café qui lui a été distribué par cette machine.

Au bout de 100 visites, il obtient les résultats suivants :

- les cafés sont trop chauds dans 20 % des cas.
- 1 fois sur 20, du marc de café s'est infiltré dans le gobelet.
- dans 23 % des cas, cette machine distribue un café qui déplait à Maël c'est-à-dire trop chaud ou contenant du marc.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Café	Température convenable	Café trop chaud	Total
Contient du marc			

Ne contient pas de marc			
Total			100

b. Maël considère que cet échantillon de 100 cafés permet de modéliser la production de cette machine.

On suppose que le choix d'un café se fait dans une situation d'équiprobabilité.

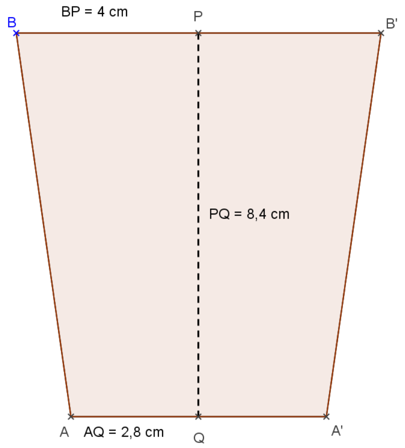
Quand Maël trouve du marc dans un café trop chaud, il décide de ne pas le boire.

Quelle est la probabilité que Maël ne boive pas son café ?

2. Ce matin, Maël a décidé de ne pas boire son café. Il s'intéresse alors au gobelet qu'il tient entre les mains.

Ce gobelet est un cône tronqué. Il mesure 8,4 cm de haut et les cercles qui le délimitent ont pour rayons respectifs 4 cm pour l'ouverture du haut, 2,8 cm pour le fond. On estime à 20 cl le volume de café versé par la machine dans ce gobelet.

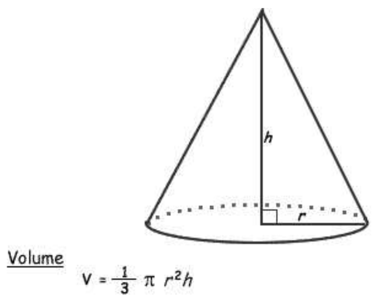
Calculer le pourcentage du volume du gobelet qu'occupe le café.



Gobelet vu de face

Rappels

- volume d'un cône



- un décimètre cube équivaut à 1 litre.

28-c : Nombres égyptiens (non S)

Un nombre entier naturel est dit « *égyptien* » si on peut le décomposer en une somme d'entiers naturels (qui peuvent être égaux) tels que la somme de leurs inverses est égale à 1.

Par exemple, 11 est *égyptien* car 11 = 2 + 3 + 6 et $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

1. 5 est-il un nombre *égyptien* ?

2. Montrer que 9 est *égyptien* puis en déduire que 20 est *égyptien*.

3. On considère un nombre entier naturel N.

a. Démontrer que si N est *égyptien* alors $2N + 2$ est également *égyptien*.

b. Démontrer que si N est *égyptien* alors $2N + 9$ est également *égyptien*.

4. 2010 est-il un nombre *égyptien* ? Si oui, préciser sa décomposition.

29. Strasbourg

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php?frame=.%2Fcompet%2Fsujets.php&m0=comp&m1=oly&m2=suj&categ=olymp

29-a : Partir de 1 (S)

Claire et Charles jouent à un jeu dont les règles sont les suivantes.

Chacun part du nombre 1 et veut atteindre un nombre fixé par l'organisateur de la compétition.

À chaque étape, Claire a le choix soit d'ajouter 2 au nombre précédent, soit de le multiplier par 9.

Charles quant à lui, a la possibilité soit d'ajouter 9 au nombre précédent, soit de le multiplier par 2.

1. Proposez pour chacun des joueurs une stratégie gagnante pour atteindre 2011.

2. Le gagnant est à présent celui qui atteint 2011 avec le moins d'étapes possibles. Qui est-ce ?

3. L'organisateur choisit cette fois le nombre 2010. Que se passe-t-il ?

4. Et si il choisit 2012 ?

5. L'organisateur dispose d'un prix de valeur à remettre. Quels sont les nombres qu'il peut choisir pour être sûr de remettre son lot ?

29-b : Un tour de magie (S)

Armelle a écrit sur 5 morceaux de papier des nombres entiers distincts compris entre 1 et 9.

Les yeux bandés elle demande à Jean-Marc de tirer deux papiers et de lire à haute voix la somme des deux nombres qui y figurent. Armelle doit ensuite annoncer les deux nombres tirés et y réussit à chaque fois.

1. Donner une combinaison de 5 nombres permettant ce tour de magie.

2. Le tour serait-il possible avec 6 papiers de nombres toujours compris entre 1 et 9.

29-c : Code de CB (non S)

Jean-Marc a une carte bleue avec un code à quatre chiffres.

Il se souvient que ce code commence par 1 et se termine par 5.

Il se souvient aussi que les deux autres chiffres ne sont pas les mêmes.

1. Combien y-a-t-il de tels codes possibles ?

2. Il se souvient de plus que la somme des quatre chiffres fait 8. Il prétend alors qu'en deux tentatives il est sûr de retrouver son code. A-t-il raison ?

29-d : Coloriages, carré et quadrillage (non S)

Dans un carré quadrillé, deux cases sont dites voisines si elles se touchent par un côté ou simplement par un sommet.

On veut colorier certaines cases en noir de façon que toute case intérieure au carré possède cinq voisines blanches si elle est noire, quatre voisines noires si elle est blanche

1. Réaliser un tel coloriage sur une grille 3x3.

2. Réaliser un tel coloriage sur une grille 9x9.

3. Dans le cas d'une grille 9x9, quel est le nombre minimal de cases noires d'un tel coloriage ?

30. Toulouse

http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades/

30-a : L'immeuble (non S)+

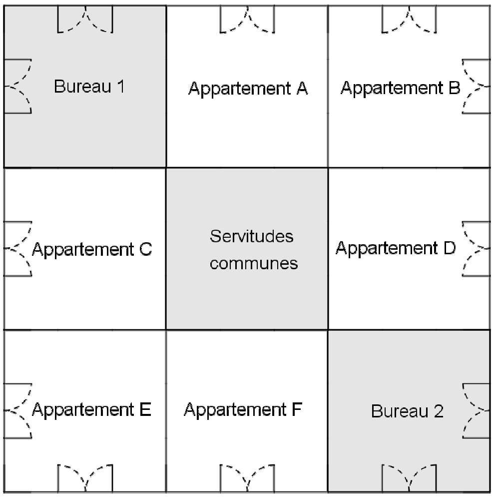
1. Six familles vivent au premier étage d'un immeuble dans les appartements A, B, C, D, E, F disposés selon le plan ci-contre.

En tout vingt personnes habitent ces six appartements et il y a au moins deux personnes dans chaque appartement.

De plus, la famille occupant l'appartement A compte deux fois moins de membres que la famille occupant l'appartement F, et si on réunit ces deux familles, on obtient un nombre impair de personnes.

La famille BRUHAT est la famille la plus nombreuse parmi celles habitant l'étage.

Quel appartement habitent les BRUHAT ? Combien sont-ils ?



2. Au deuxième étage de ce même immeuble vivent également vingt personnes réparties dans huit appartements disposés selon le plan ci-contre.

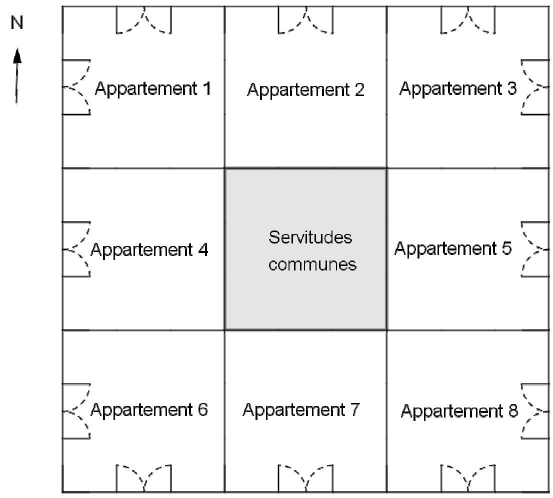
Les heureux élus qui ont vue à l'Est, sur le stade, sont, hélas deux fois moins nombreux que ceux dont la vue, au Sud, donne sur l'usine d'incinération, mais deux fois plus nombreux que ceux qui, au Nord, font face à la prison.

Quant à ceux qui regardent l'Ouest, exactement le tiers de ceux qui font face au Sud, ils peuvent se distraire avec l'animation du centre commercial.

Aucun appartement n'est vide.

L'appartement comptant le plus grand nombre d'occupants est habité par la famille TITS.

Au fait, quel appartement habitent les TITS et combien sont-ils ?



30-b : Le Mathothon en Borelie (non S) +

On organise chaque année en Borelie un Mathothon télévisé : des émissions mettant en valeur les nombreuses facettes de l'activité mathématique sont diffusées tout au long d'un week-end et les foyers qui le souhaitent peuvent promettre d'effectuer un don unique de 30 euros. Ils ne tiennent pas nécessairement leur promesse par la suite, hélas. Heureusement, certains des foyers n'ayant rien promis effectuent, eux, un don de 30 euros.

L'objectif du Mathothon est de récolter des fonds pour financer des projets scientifiques.

1. En 2010 on dénombrait 772 000 foyers en Borelie. Lors du Mathothon de cette année là, 36 % des foyers ont fait une promesse de don (on les appelle les « prometteurs »).

a. Cela avait-il permis d'espérer une recette d'au moins 8 000 000 euros ? Pourquoi ?

b. On a récolté en tout 7 954 560 euros ; on estime alors que 30 % des promesses n'ont pas été tenues, alors que des foyers n'ayant rien promis (on les appelle les « non prometteurs ») se sont résolus à donner.

Quel a été, en 2010, le pourcentage de donateurs parmi les foyers « non prometteurs » ? Arrondir la réponse au dixième près.

2. Lors du Mathothon 2011, le nombre de foyers s'élève à 784 000 et 34 % d'entre eux ont fait une promesse de don. On attend d'un moment à l'autre les résultats définitifs du Mathothon 2011.

a. Cela permet-il d'espérer une recette d'au moins 8 000 000 euros ? Pourquoi ?

b. Les résultats viennent de tomber : la somme effectivement récoltée en 2011 est de 7 962 540 euros.

On considère que le pourcentage des « prometteurs » n'ayant pas fait de don est le double de celui des « non-prometteurs » qui en ont fait un. Déterminer ces pourcentages (arrondir la réponse au dixième près).

30-c : Interdiction de doubler (S)

Un ensemble A de nombres réels est dit « sans double »' (ou SANDO en abrégé) quand aucun élément de A n'est le double d'un élément de A.

Un SANDORI est un SANDO constitué d'une réunion d'intervalles inclus dans l'intervalle $[0\,;1]$ sans élément commun. Par exemple : $[0{,}11\,;0{,}22[\ \cup\ [0{,}45\,;0{,}9[$ est un SANDORI.

La longueur d'un SANDORI est la somme des longueurs des intervalles qui le constituent.

Par exemple : $[0{,}11\,;0{,}22[\cup\ [0{,}45\,;0{,}9[$ est un SANDORI de longueur 0,56.

On cherche les SANDORI les plus longs possibles.

1. a. Justifier soigneusement que $[0{,}11\,;0{,}22[\ \cup\ [0{,}45\,;0{,}9[$ est bien un SANDORI de longueur 0,56.

b. Trouver un SANDORI de la forme $[0{,}11\,;a[\ \cup\ [b\,;c[$ avec $a<b<c$, dont la longueur est supérieure ou égale à 0,61.

2. a. S'il existe un SANDORI de longueur L, montrer qu'il existe un autre SANDORI de longueur supérieure ou égale à L contenant l'intervalle $]0{,}5\,;1]$.

b. En déduire que les SANDORI les plus longs possibles ont une longueur comprise entre 0,5 et 0,75.

3. S'il existe un SANDORI de longueur L, contenant l'intervalle $]0{,}5\,;1]$, montrer qu'il existe un autre SANDORI de longueur supérieure ou égale à L contenant les intervalles $]0{,}5\,;1]$ et $]0{,}125\,;0{,}25]$.

En déduire un nouvel encadrement de la longueur des SANDORI les plus longs.

4. Déterminer un SANDORI dont la longueur dépasse 0,65.

5. Déterminer une valeur approchée au centième près de la longueur des SANDORI les plus longs.

30-d : Tableaux de Hadamard (S)

On désire remplir un tableau de n lignes et de n colonnes (avec n entier strictement supérieur à 1) avec des « 1 » ou des « –1 » ; on appelle coefficients les nombres figurant dans un tel tableau.

On dira que deux colonnes du tableau sont orthogonales quand, en effectuant la somme des produits de leurs coefficients successifs, on obtient 0.

Voici à titre d'exemples des colonnes orthogonales ou non orthogonales :

1	1	→		1×1
–1	1	→	+	-1×1
1	1	→	+	1×1
1	–1	→	+	1×-1
			=	0

Deux colonnes orthogonales de quatre lignes

1	1	→		1×1
–1	1	→	+	-1×1
1	–1	→	+	1×1
1	–1	→	+	1×-1
			=	–2

Deux colonnes non-orthogonales de quatre lignes

On étudie s'il est possible de remplir un tableau de n lignes et de n colonnes (avec $n > 1$) avec des « 1 » ou des « –1 » de façon à ce que les colonnes du tableau soient **deux à deux** orthogonales.

Un tel tableau est appelé « **un tableau de Hadamard** » de taille n.

–1	1	–1	1
1	1	1	1
1	1	–1	–1
1	–1	–1	1

1. a. Le tableau ci-contre est un tableau de Hadamard. Expliquer pourquoi.

b. Dresser la liste de tous les tableaux de Hadamard de taille $n = 2$.

c. Peut-on trouver des tableaux de Hadamard de taille $n = 3$? Expliquer.

2. On suppose que l'entier n est strictement supérieur à 3 et qu'il existe un tableau de Hadamard H_1 de taille n.

a. Expliquer pourquoi n est pair.

b. Si le premier coefficient de la première colonne de H_1 est « –1 », expliquer comment modifier les coefficients de la première ligne de H_1 pour obtenir un tableau de Hadamard dont le premier coefficient de la première colonne soit « 1 ».

c. Expliquer comment on peut obtenir, à partir de H_1, un tableau de Hadamard dont tous les coefficients de la première colonne sont des « 1 ».

3. On suppose toujours que l'entier n est est strictement supérieur à 3 et qu'il existe un tableau de Hadamard H_1 de taille n ; par conséquent n est pair et on pose $n = 2p$.

a. Montrer qu'on peut construire un tableau de Hadamard H_2 dont la première colonne ne contient que des « 1 » et dont la deuxième colonne contient des « 1 » aux p premières lignes et des « –1 » aux lignes suivantes (voir schéma ci-contre).

b. En déduire que s'il existe un tableau de Hadamard de taille n ($n > 3$), alors n est un multiple de 4.

Soit, en seconde colonne, en descendant :

1	1	
…	…	p valeurs « 1 »
…	…	
1	1	
1	–1	
…	…	p valeurs « –1 ».
…	…	
1	–1	

4. Comment peut-on, à partir du tableau du 1. a., construire un tableau de Hadamard de taille 8 ?

5. Faire le bilan des questions précédentes en indiquant :

- quelles sont les valeurs de l'entier n pour lesquelles on sait qu'il existe un tableau de Hadamard,
- quelles sont les valeurs de l'entier n pour lesquelles on sait qu'il n'en existe pas,
- un exemple de valeur de l'entier n pour laquelle on ne sait pas s'il existe un tableau de Hadamard.

Remarques : Jacques HADAMARD (1865-1963) est un mathématicien français. D'une part, la « conjecture de Hadamard » est un problème mathématique toujours ouvert à l'heure actuelle. Elle s'énonce ainsi : « il existe un tableau de Hadamard de taille $4k$ pour tout entier $k > 0$. »

Depuis la construction d'un tableau de Hadamard de taille 428 en 2004, le premier entier pour lequel on ne sait pas s'il en existe est $n = 668$. D'autre part ces tableaux interviennent en Mathématiques appliquées : lors d'une expérimentation pour acquérir de nouvelles connaissances en contrôlant plusieurs paramètres d'entrée, il est précieux de parvenir à réduire le nombre d'essais ; ces tableaux interviennent dans la théorie des plans d'expérience dont le propos est précisément d'optimiser la suite ordonnée d'essais d'une expérimentation.

31. Versailles

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades.htm

31-a : Fabrique de triplets (S-STI) +

Préliminaires

1. Soient x et y deux nombres réels strictement inférieurs à 1. On note S leur somme et P leur produit.
Montrer que $S < P + 1$.

2. Quel est le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-\frac{1}{x}$?

Recherche de triplets

On s'intéresse aux triplets (a,b,c) tels que $0<a\leq b\leq c$, $abc>1$ et $a+b+c<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

3. Montrer que, pour un tel triplet, $a < 1$.

4. Se peut-il que $b < 1$? *On pourra utiliser les préliminaires.*

5. Se peut-il que $b = 1$?

6. Alice affirme : « Si $a<1<b$ et $b\leq\frac{1}{\sqrt{a}}$, alors on peut trouver un réel c tel que le triplet (a,b,c) soit solution ».

A-t-elle raison ?

7. Bob ajoute : « Ces conditions ne sont pas nécessaires ». A-t-il raison ?

31-b : Billard dans un angle (S-STI)

Pour faciliter la lecture des copies, la mesure d'angle utilisée dans cet exercice est le degré.

On considère deux demi-droites [Ox) et [Oy) et un point A de la demi-droite [Ox) tel que OA = 1.

On note θ une mesure de l'angle $\widehat{xOy}$.

Étant donné un point B sur la demi-droite [Oy), on construit, si possible, le point C du segment [OA] tel que CA = CB.

1. On note α une mesure de l'angle $\widehat{\text{OAB}}$. Pour quelles valeurs de α peut-on construire le point C ?

2. On suppose qu'on a pu construire le point C. On construit alors, si possible, un point D du segment [OB] tel que DB = DC. Pour quelles valeurs de α peut-on construire le point D ?

3. On continue le processus précédent, construisant ainsi tant qu'il est possible et alternativement des points sur [OA] ou [OB].
Si M et M' sont deux points construits (dans cet ordre) et si on construit le point suivant M'', point du segment [OM] tel que M''M = M''M', on note a et a' les mesures des angles $\widehat{\text{OMM'}}$ et $\widehat{\text{OM'M''}}$.
Pour quelle valeur de a a-t-on $a' = a$?

4. On suppose dorénavant qu'on peut construire autant de points que l'on veut. Pour quelles valeurs de α cela est-il possible ?

5. Quelle relation existe-t-il alors entre la longueur de la ligne formée par les segments joignant A à B, B à C, C à D, …, M à M', M' à M'', etc. et le périmètre du triangle ABC ?
Si le périmètre du triangle ABC vaut $1+\sqrt{2}$, combien vaut θ ?

31-c : Loto (non S-STI)

On dispose de 101 jetons, numérotés de 1 à 101. On les répartit en deux tas, A et B.

Le jeton numéro 40 se trouve dans le tas A. On le prend et on le met dans le tas B. De ce fait, la moyenne des numéros des jetons du tas A augmente de 0,25 et la moyenne des jetons du tas B augmente elle aussi de 0,25.

Combien y avait-il de jetons dans le tas A ?

31-d : Somme et produit se ressemblent (non S-STI)+

Au tableau sont écrits 16 nombres entiers positifs consécutifs. On note respectivement S et P la somme et le produit de ces nombres.

1. a. Justifier que P est un multiple de 16.

b. Justifier que P est un multiple de 125.

c. Quels sont les trois derniers chiffres de P ?

2. a. Exprimer S en fonction du plus petit nombre n des 16 nombres écrits.

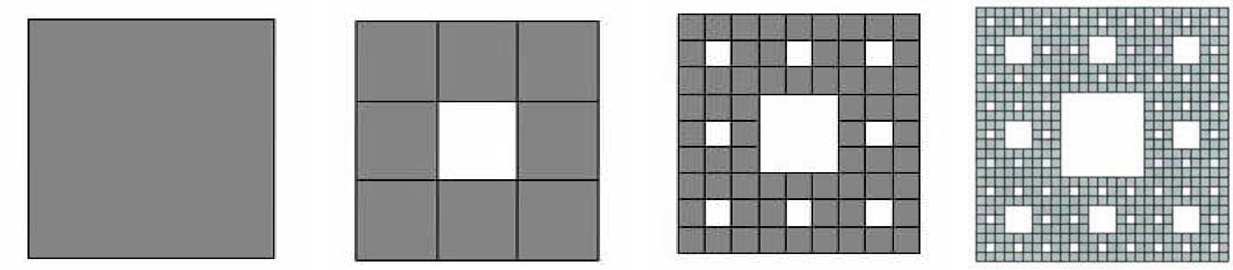
b. Donner un exemple de série de 16 nombres entiers consécutifs dont les trois derniers chiffres de la somme sont les mêmes que les trois derniers chiffres du produit.

3. Prouver que, quels que soient les 16 entiers consécutifs écrits, il est impossible que les quatre derniers chiffres de leur somme soient égaux aux quatre derniers chiffres de leur produit.

31-e : Creusez (Olympiades quatrième)

1. La carpette de Sierpinski

On considère un carré de côté 27. À chaque étape, on enlève le carré central de chaque carré gris.

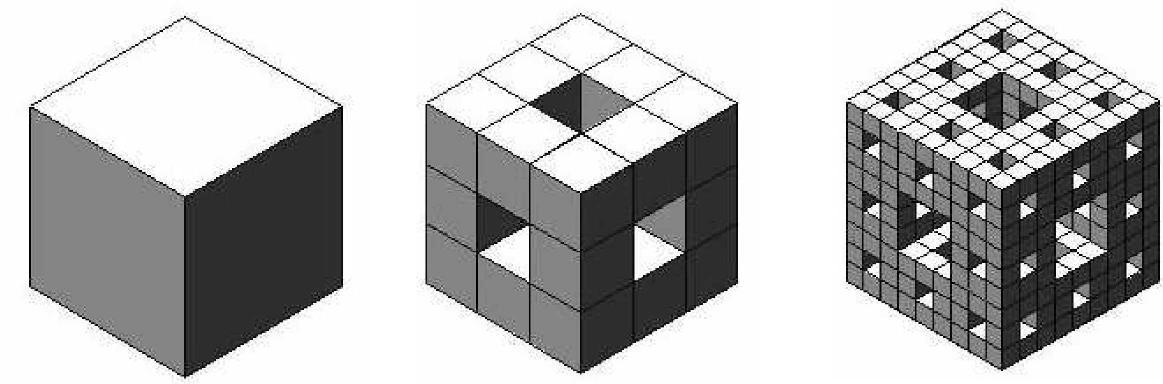


étape 0 étape 1 étape 2 étape 3

À quelle étape l'aire de la carpette devient-elle inférieure à la moitié de l'aire initiale ?

2. L'éponge de Menger

On considère à présent un cube d'arête a. À chaque étape, on évide chaque cube de sept petits cubes à l'intérieur comme ci-dessous.



étape 0 étape 1 étape 2

À quelle étape le volume de l'éponge devient-il inférieur à la moitié du volume initial ?