Olympiades académiques de mathématiques

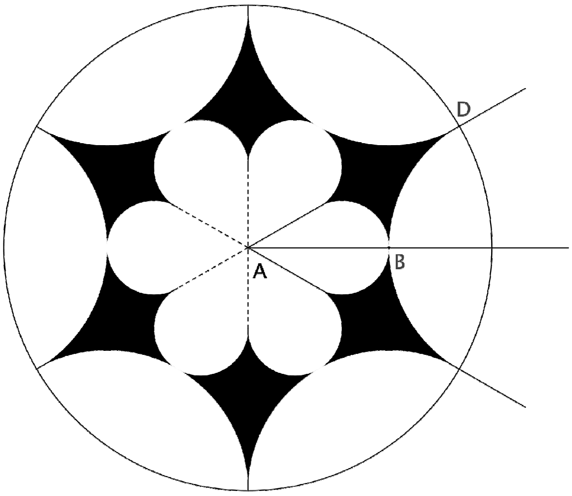
Les sujets des académies accompagnées de (*) ne me sont pas connus.

http://www.animath.fr/spip.php?rubrique206

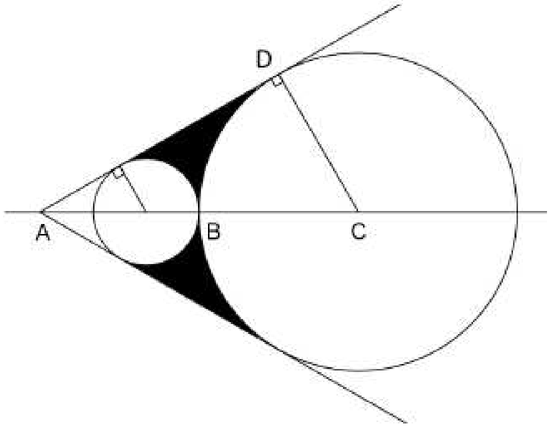
1. Exercices communs

1-a : La Rosace (c)

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.



Rosace



Motif

1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. a. Montrer que $AB = BC$.

b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Solution

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.

2. a. **Première méthode :**

Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D. La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30°$ et $\widehat{BCD} = 60°$. Puisque BC=DC, le triangle BCD est équilatéral.

Ensuite, $\widehat{BDA} = 30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où BD=BA. Finalement, on trouve bien AB=BC.

Deuxième méthode : On note R le rayon du grand cercle.

On applique une formule de trigonométrie : $\sin\widehat{DAC} = \frac{DC}{AC}$, d'où $\sin 30° = \frac{R}{AC} \Rightarrow AC = 2R$.

Or BC=R, d'où AB=R et finalement AB=BC.

b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.

En appliquant le résultat précédent, il vient que AE=$2r$, de plus EB=r. On a donc AB=$3r$, c'est-à-dire R=$3r$.

3. On doit avoir $AD = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow R\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow R = 3 \Rightarrow r = 1$.

4. Si $r = \frac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du petit triangle est $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

D'autre part, on a $R = 3r = \frac{3}{2}$ et l'autre côté du grand triangle vaut $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\frac{9\sqrt{3}}{8}$. La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{\mathrm{BEF}}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{\mathrm{BCD}}$.

Cette surface vaut donc $\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{3}\left(\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\sqrt{3}-\frac{11\pi}{24}$. Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3}-\frac{11\pi}{2}$.

1-b : À la recherche du « chaînonze » (c)

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :

« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11 ».

Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle chaînonze une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze. Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter à droite de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres. Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^e^ chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous ?

On appelle chaînonze fini un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.

On appelle chaînonze n-périodique un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de trois chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

a. Étudier le cas particulier « a a ».

b. Étudier le cas $b=a-1$.

c. Étudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

<u>Solution</u>

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on n'a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait que 2010 est divisible par 6, donc le 2010^e^ terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.

Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3+x-2=0$ et $3+x-2=11$ admettent comme solutions – 1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :

a. Si $b=a$, le prolongement est « a b 0 ».

b. Si $b=a-1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11-(a-b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.

c. Si $b<a-1$, on a le chaînonze « a b $(11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b<a-1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$.

d. Si $a < b$, « a b $(b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$.

Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$), soit unique.

5. 1^er^ cas : si $a = b$:

Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 … » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.

Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3. Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « a a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a a … » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

2ᵉ cas : $a = b + 1$: la chaîne se bloque et est de longueur 2.

3ᵉ cas : $a = 0$ et $b = 1$: « 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

4ᵉ cas : $0 < a < b$,

« a b $(b - a)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(11 + a - b)$ a b » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3, $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

5ᵉ cas : Si $b = 0$ et $a > 1$: le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

6ᵉ cas : Si $a > b + 1 > 1$: « a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figurent 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

2. Amiens

http://pedagogie.ac-amiens.fr/maths/culture/olympiades/

2-a : Un encadrement (c)

Série S

On considère un carré ABCD de côté 1.

On place des points E, F, G et H respectivement sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

On veut prouver que $2 \leq EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2$.

1. a. Montrer que, pour tous réels x et y positifs, $x^2 + y^2 \leq (x + y)^2$.

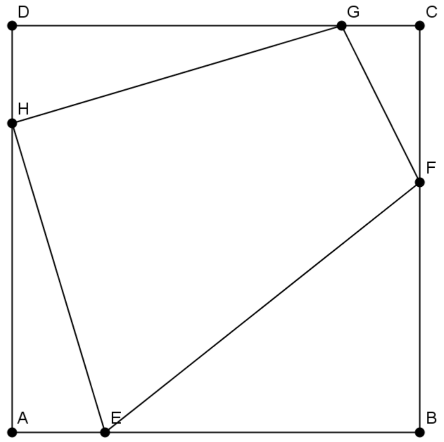
b. En déduire que $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \leq 4$ (penser à utiliser le théorème de Pythagore).

2. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, on a $2x^2 - 2x \geq -\frac{1}{2}$.

b. En remarquant que $EB = 1 - AE$, montrer que $AE^2 + EB^2 \geq \frac{1}{2}$.

c. En déduire que $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \geq 2$.

Solution



On veut prouver que $2 \le EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2$.

1. a. $x^2 + y^2 \le x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$ si x et y sont positifs.

b. On utilise Pythagore dans les quatre triangles rectangles :

$EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2$

$= EB^2 + BF^2 + FC^2 + CG^2 + GD^2 + DH^2 + HA^2 + AE^2 =$

$= (BF^2 + FC^2) + (CG^2 + GD^2) + (DH^2 + HA^2) + (AE^2 + EB^2)$

$\le (BF + FC)^2 + (CG + GD)^2 + \ldots = 4.$

2. a. $2x^2 - 2x \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \ge 0$, ce qui est toujours vrai…

b. Avec EB $= 1 -$ AE, on a $AE^2 + EB^2 = AE^2 + (1 - AE)^2 = 2AE^2 - 2AE + 1$, d'où en posant $x = AE$ on tire

$AE^2 + EB^2 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x \ge -\frac{1}{2}$, ce qui est vrai.

c. Ce qui est vrai pour le côté AB ($AE^2 + EB^2 \ge \frac{1}{2}$) l'est également pour les autres côtés :

$BF^2 + FC^2 \ge \frac{1}{2}$, $CG^2 + GD^2 \ge \frac{1}{2}$ et $DH^2 + HA^2 \ge \frac{1}{2}$; on a donc

$EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 = (BF^2 + FC^2) + \ldots \ge 4 \times \frac{1}{2} = 2$.

2-b : Le soupirail (c)

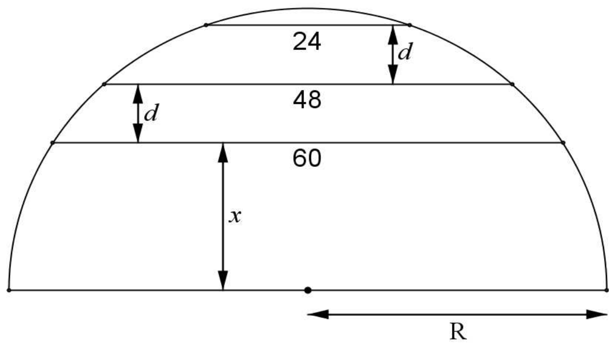
Série S

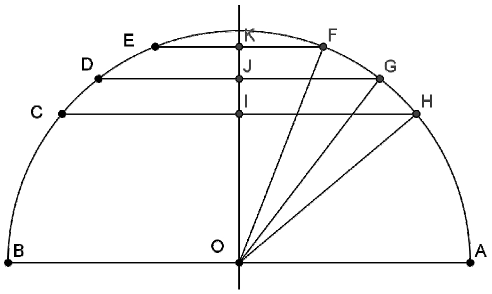
Un soupirail a la forme d'un demi-cercle.

À partir d'une certaine hauteur x, on installe trois barres de sécurité de longueur 24, 48 et 60 cm espacées de la même distance d.

1. Calculer le rayon R du soupirail.

2. On souhaite ajouter une quatrième barre sous la barre de 60 cm, toujours à la distance d. Quelle longueur doit-on prendre ?





Solution

1. Appliquons Pythagore 3 fois :

dans OIH, $R^2 = x^2 + 30^2$;

dans OJG, $R^2 = (x+d)^2 + 24^2$

et dans OKF, $R^2 = (x+2d)^2 + 12^2$.

En supprimant R^2, on a

$$\begin{cases} x^2 + 2xd + d^2 + 24^2 = x^2 + 30^2 \\ x^2 + 4xd + 4d^2 + 12^2 = x^2 + 30^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xd + d^2 = 30^2 - 24^2 \\ 4xd + 4d^2 = 30^2 - 12^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xd + 2d^2 = 2(30^2 - 24^2) \\ 4xd + 4d^2 = 30^2 - 12^2 \end{cases},$$

d'où enfin $2d^2 = 30^2 - 12^2 - 2(30^2 - 24^2) = 108 \Leftrightarrow d^2 = 54 \Rightarrow d = 3\sqrt{6}$ et $x = \frac{30^2 - 24^2 - 54}{2 \times 3\sqrt{6}} = \frac{15\sqrt{6}}{2}$; on en déduit R :

$R^2 = x^2 + 30^2 = \frac{2475}{2} \Rightarrow R = \frac{15\sqrt{22}}{2}$.

2. $\left(x-d\right)^2+l^2=R^2 \Leftrightarrow l^2=\frac{225\times 22}{4}-\left(\frac{15\sqrt{6}}{2}-3\sqrt{6}\right)^2=\frac{225\times 22-81\times 6}{4}=36\times 31 \Rightarrow l=6\sqrt{31} \Rightarrow 2l=12\sqrt{31}\approx 66,81$.

2-c : La citerne (c)

Série STI/STL

On dispose de trois robinets A, B et C pour remplir une citerne.

Lorsque A et B coulent ensemble, ils mettent 2h.

Lorsque B et C coulent ensemble, ils mettent 1h30.

Et lorsque C et A coulent ensemble, ils mettent 2h30.

Quel temps mettraient-ils s'ils coulaient tous les trois ensemble ? Chacun séparément ?

Solution

Attention, deux robinets coulant ensemble mettent moins de temps qu'un robinet coulant seul… Il faut faire intervenir les débits des robinets : d_A, d_B et d_C qui peuvent s'ajouter. Posons alors V le volume de la citerne, t_A, t_B et t_C les temps mis par chacun séparément et T le temps mis par les trois simultanément : on a par exemple $t_{A+B}d_{A+B}=V$ d'où on obtient $d_A+d_B=d_{A+B} \Leftrightarrow \frac{V}{t_A}+\frac{V}{t_B}=\frac{V}{t_{A+B}} \Leftrightarrow \frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}=\frac{1}{2}$; de même $d_B+d_C=d_{B+C} \Leftrightarrow \frac{V}{t_B}+\frac{V}{t_C}=\frac{V}{t_{B+C}} \Leftrightarrow \frac{1}{t_B}+\frac{1}{t_C}=\frac{1}{1,5}$ et $d_C+d_A=d_{C+A} \Leftrightarrow \frac{V}{t_C}+\frac{V}{t_A}=\frac{V}{t_{C+A}} \Leftrightarrow \frac{1}{t_C}+\frac{1}{t_A}=\frac{1}{2,5}$.

En posant enfin $\frac{1}{t_A}=x$, $\frac{1}{t_B}=y$ et $\frac{1}{t_C}=z$ on a le système :

$$\begin{cases} x+y=1/2 \\ y+z=2/3 \\ z+x=2/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/2-y \\ y+2/5-1/2+y=2/3 \\ z=2/5-x=2/5-1/2+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7/60 \\ y=23/60 \\ z=17/60 \end{cases}.$$

On termine en trouvant les temps : $t_A=\frac{60}{7}\approx 8,6$, $t_B=\frac{60}{23}\approx 2,6$ et $t_C=\frac{60}{17}\approx 3,5$.

Quand aux trois ensemble, on a

$$d_A+d_B+d_C=d_{A+B+C} \Leftrightarrow \frac{V}{t_A}+\frac{V}{t_B}+\frac{V}{t_C}=\frac{V}{t_{A+B+C}} \Leftrightarrow \frac{1}{t_{A+B+C}}=\frac{7}{60}+\frac{23}{60}+\frac{17}{60}=\frac{47}{60} \Leftrightarrow t_{A+B+C}=\frac{60}{47}\approx 1,28.$$

Remarque : on pouvait trouver ce résultat directement à partir de

$$\begin{cases} x+y=1/2 \\ y+z=2/3 \\ z+x=2/5 \end{cases} \Rightarrow x+y+y+z+z+x=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2}{t_{A+B+C}}=\frac{47}{30} \Rightarrow t_{A+B+C}=\frac{60}{47}.$$

2-d : La ficelle coupée en deux (c)

Série STI/STL

Une ficelle de longueur L est coupée en deux morceaux ; avec l'un d'eux on forme un cercle et avec l'autre un carré. À quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires du disque et du carré soit minimale ?

Solution

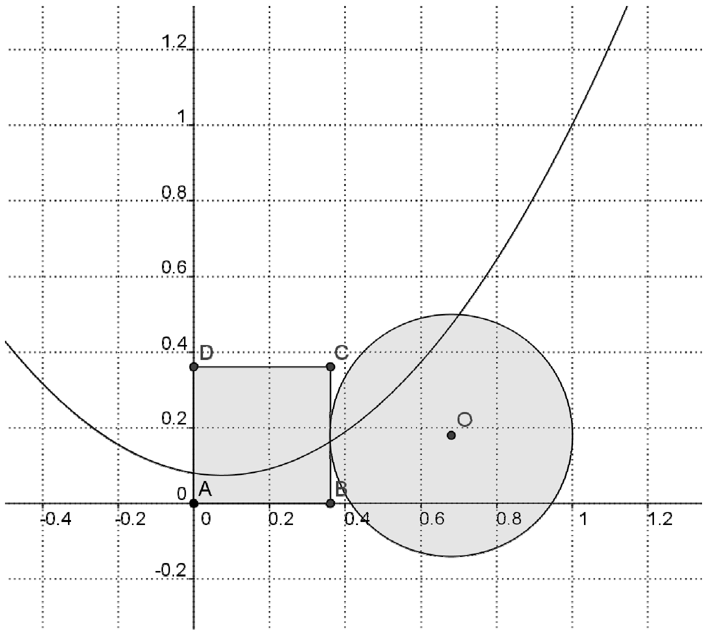
Bonne petite activité avec Geogebra : notons x le côté du carré, son aire est x^2 et il reste $L-x$ longueur de ficelle.

Le périmètre du cercle est $2\pi R = L-x$, donc le rayon est $\dfrac{L-x}{2\pi}$ et l'aire du cercle est

$$\pi R^2 = \pi\left(\frac{L-x}{2\pi}\right)^2.$$

La fonction représentant l'aire totale de la figure est donc $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{4\pi}(L-x)^2$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{4\pi}(L-x)$ qui s'annule pour

$$2x + \frac{2}{4\pi}x - \frac{2}{4\pi}L = 0 \Leftrightarrow x\left(2+\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}L,$$



soit $x = \dfrac{1}{4\pi+1}L$. La valeur de f est alors $f\left(\dfrac{1}{4\pi+1}L\right) = \left(\dfrac{1}{4\pi+1}L\right)^2 + \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{4\pi}{4\pi+1}L\right)^2 = \dfrac{1}{4\pi+1}L^2$.

2-e : Caramels (c)

Série ES/L/STL/ST2S

Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ associe l'entier naturel tel que :

$$f(0\,;y) = y+1,\ f(x\,;0) = f(x-1\,;1),\ f(x+1;y+1) = f(x\,;f(x+1;y)).$$

Calculer $f(2\,;1)$ et $f(2\,;2)$.

Solution

$f(0\,;y) = y+1,\ f(x\,;0) = f(x-1\,;1),\ f(x+1;y+1) = f(x\,;f(x+1;y))$.

a. ***f*(2 ; 1)**

En prenant la troisième relation avec $x=1$, $y=0$; on a

$f(2\,;1) = f(1+1;0+1) = f(1\,;f(1+1\,;0)) = f(1\,;f(2\,;0))$.

La 2ème donne $f(2\,;0) = f(2-1\,;1) = f(1\,;1)$.

Reprenons la 3ème avec $x=0$ et $y=0$: $f(1\,;1) = f(0\,;f(1\,;0))$.

La 2ème donne $f(1\,;0) = f(0\,;1)$ et la 1ère donne $f(0\,;1) = 1$. On a donc

$f(1\,;0)=1$;

$f(1\,;1) = f(0\,;f(1\,;0)) = f(0\,;1) = 1$;

$f(2\,;0) = f(2-1\,;1) = f(1\,;1) = 1$;

$f(2\,;1) = f(1\,;f(2\,;0)) = f(1\,;1).=1$.

b. ***f*(2 ; 2)**

$f(1+1;1+1) = f(1\,;f(1+1;1)) = f(1\,;f(2\,;1)) = f(1\,;1) = 1$.

2-f : Le damier (c)

Série ES/L/STL

Un tableau carré a 2010 lignes (numérotées de 1 à 2010) et 2010 colonnes (numérotées de 1 à 2010).

Ses cases sont peintes en blanc ou noir, comme celles d'un damier ; la case située au croisement de la ligne 1 et de la colonne 1 est noire.

Dans chaque case, on écrit le produit du numéro de sa ligne et du numéro de sa colonne.

On note N la somme des nombres inscrits dans les cases noires et B la somme des nombres inscrits dans les cases blanches.

1. On pose N_i la somme des nombres inscrits dans les cases noires de la i-ème ligne et B_i la somme des nombres inscrits dans les cases blanches de la i-ème ligne.

a. Montrer que $N_1 - B_1 = -1005$ et $N_2 - B_2 = 2\times1005$.

b. Plus généralement, montrer que $N_i - B_i = \lambda\times i\times1005$ avec $\lambda = 1$ lorsque le numéro de la ligne est pair, et $\lambda = -1$ lorsque le numéro de la ligne est impair.

2. En déduire que $N - B = 1005^2$.

Solution

On note N la somme des nombres inscrits dans les cases noires et B la somme des nombres inscrits dans les cases blanches.

1. On pose N_i la somme des nombres inscrits dans les cases noires de la i-ème ligne et B_i la somme des nombres inscrits dans les cases blanches de la i-ème ligne.

a. N_1 = somme des entiers impairs de 1 à 2009, soit la somme des 1005 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1 : $\dfrac{1005(1+2009)}{2} = 1005^2$;

B_1 = somme des entiers pairs de 0 à 2010 = $\dfrac{1005(2+2010)}{2} = 1005\times1006$; $N_1 - B_1 = -1005$

Pour N_2 et B_2 tous les termes sont multipliés par 2, donc la somme aussi mais avec changement de signe du fait que la somme des cases blanches est alors inférieure à la somme des cases noires : $N_2 - B_2 = 2\times1005$.

b. On a $N_i < B_i$ pour les lignes impaires et $N_i > B_i$ pour les lignes paires ; par ailleurs les sommes d'une ligne sont multipliées par le n° de ligne : $N_i = iN_1 = i\times1005^2$ et $B_i = iB_1 = i\times1005\times1006$ d'où $N_i - B_i = (-1)^{i-1}\times i\times\left(1005^2 - 1005\times1006\right) = (-1)^{i-1}\times i\times(-1005) = (-1)^i\times i\times1005$.

2. $N - B = -1005 + 2\times1005 - 3\times1005 + \ldots + 2008\times1005 - 2009\times1005 + 2010\times1005$; regroupons les termes deux par deux : $N - B = 1005(-1+2) + 1005(-3+4) + \ldots + 1005(-2009+2010) = 1005\times1005 = 1005^2$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273

3. Besançon

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

3-a : Puzzle (c)

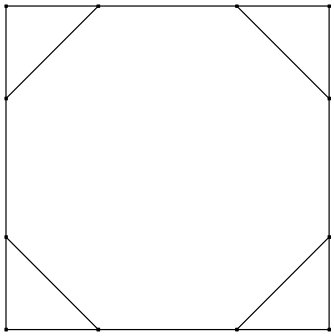


Figure 1

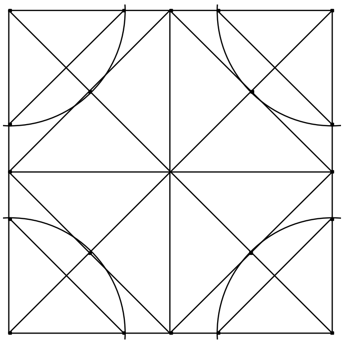


Figure 2

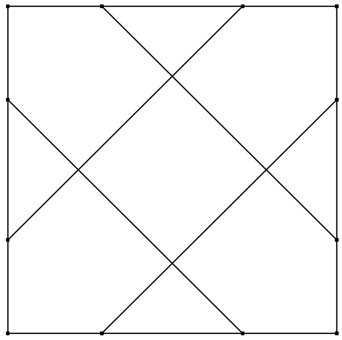


Figure 3

Dans un carré donné, on découpe à chaque sommet un triangle rectangle isocèle comme l'indique la figure 1. Tous les triangles rectangles isocèles ont les mêmes dimensions.

1. Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré ?

2. a. Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente le quart de l'aire totale du carré ?

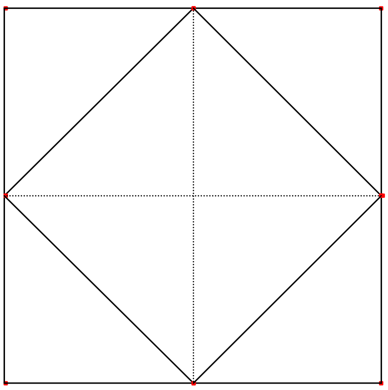
b. Observer alors la figure 2 et expliquer pourquoi elle permet de construire facilement à l'aide d'un compas la solution de cette question.

3. Lorsqu'on a découpé les quatre triangles rectangles, la figure qui subsiste, lorsqu'ils ne sont pas trop grands, est un octogone (figure à huit côtés). Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'octogone final soit régulier (c'est-à-dire une figure inscriptible dans un cercle dont les huit côtés sont égaux).

À présent, on considère le puzzle de la figure 3, constitué d'un carré central, de quatre triangles de mêmes dimensions et de quatre pentagones de mêmes dimensions.

4. Comment procéder pour que l'aire de chacun des quatre pentagones soit égale à l'aire du carré central ? Dessiner alors la solution en choisissant bien le côté du carré initial.

Solution

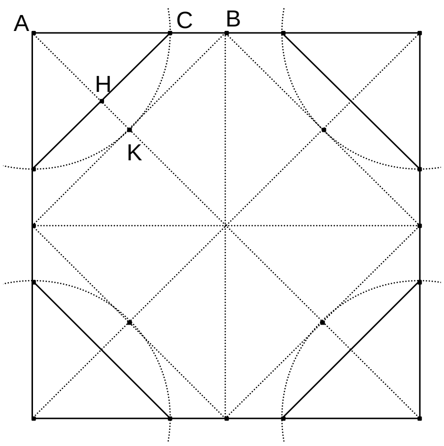


Notons a le côté du carré.

Si le petit côté des triangles rectangles isocèles mesure $\frac{a}{2}$, par symétrie l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré.

1. Appelons x le côté de chaque triangle rectangle isocèle. En accolant deux tels triangles par leur hypoténuse, on obtient un carré de côté x, donc d'aire x^2.

La somme des aires des quatre triangles rectangles isocèles sera $2x^2$; on doit donc avoir ici $2x^2 = \frac{a^2}{4}$ soit $x^2 = \frac{a^2}{8} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

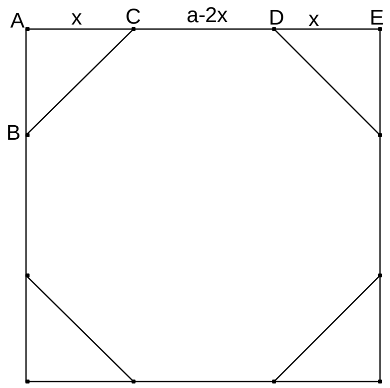


2. Notons les points comme sur la figure ci-contre.

Par le théorème de Pythagore on a $AK^2 + AK^2 = AB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$,

soit $2AK^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, et par construction : $AC = AK$.

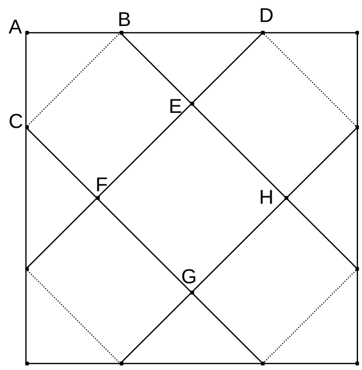
Le côté AC du triangle rectangle isocèle a donc bien la longueur attendue.



3. a. On pose $AE = a$.

Le théorème de Pythagore donne $BC^2 = 2x^2$; de plus $CD^2 = (a-2x)^2$.

On résout donc $(a-2x)^2 = 2x^2$, soit $(a-2x) = x\sqrt{2}$ puis que x et $a-x$ sont positifs et donc $x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}a \approx 0.3 \times a$.



La somme des aires des quatre triangles rectangles type *BED* est égale à l'aire d'un carré de côté *BD*, soit $(a-2x)^2$.

L'aire du carré central *EFGH* est égale à $BC^2 = 2x^2$. L'aire d'un pentagone est alors par soustraction :

$$\frac{1}{4}\left(a^2 - (a-2x)^2 - 2x^2\right) = ax - \frac{3}{2}x^2.$$

On résout donc $2x^2 = ax - \dfrac{3}{2}x^2$; on obtient après simplification par x : $x = \dfrac{2}{7}a$. Il suffit de prendre $a = 7$ cm comme côté du grand carré pour faire la construction, puis $x = 2$ cm comme longueur du segment *AB*.

3-b : Développement égyptien d'une fraction (c)

Dans l'antiquité, les Égyptiens n'utilisaient que des fractions dont le numérateur était 1, comme $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{13}, \ldots$.

Ils pouvaient décomposer toute autre fraction (comme $\dfrac{31}{13}$) en somme d'un entier et de fractions de ce type selon l'algorithme suivant :

* on calcule le quotient entier de 31 par 13 : on obtient 2 ;
* on calcule alors : $\dfrac{31}{13} - 2 = \dfrac{5}{13}$;
* le plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{5}{13}$ est 3 et $\dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{39}$;
* le plus petit entier n tel que $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{2}{39}$ est 20 et $\dfrac{2}{39} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{780}$.

Ainsi $\dfrac{31}{13} = 2 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{780}$ est le « développement égyptien » de $\dfrac{31}{13}$.

On admettra que cette écriture existe et est unique.

1. Déterminer le développement égyptien des fractions $\dfrac{3}{4}, \dfrac{8}{15}, \dfrac{18}{7}$ et $\dfrac{2009}{2010}$.

2. L'écriture $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?

3. Soient a et b deux entiers naturels tels que $2 \le a < b$.

À quelle condition l'écriture $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?

4. Déterminer le plus petit entier n, $n \ge 11$, tel que $\dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{n}$ soit un développement égyptien.

Solution

1. On obtient par l'algorithme ci-dessus $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{8}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{30}$, $\frac{18}{7}=2+\frac{4}{7}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$.

Pour $\frac{2009}{2010}$ les calculs sont plus longs ! Avec une calculatrice on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\frac{2009}{2010}=\frac{1}{2}+\frac{502}{1005}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{167}{1005}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{164}{7035}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{17}{302505}\\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{17795}+\frac{2}{1076615295}\end{aligned}$$

et pour réduire $\frac{2}{1076615295}$ on utilise une jolie astuce : comme le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n}\leq\frac{2}{2p+1}$ est $p+1$ et que $\frac{2}{2p+1}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(2p+1)(p+1)}$, il vient avec $p=538397647$:

$$\frac{2}{1076615295}=\frac{1}{538397648}+\frac{1}{1076615295\times 538397648},$$

soit finalement $\frac{2009}{2010}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{17795}+\frac{1}{538397648}+\frac{1}{1076615295\times 538397648}$.

On ne pouvait faire mieux avec une calculatrice usuelle. Pour ceux qui ont repris le calcul avec un ordinateur : $\frac{2009}{2010}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{17795}+\frac{1}{538397648}+\frac{1}{579550247252276160}$.

2. Non car $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ et comme $\frac{8}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{30}$ est le développement égyptien de $\frac{8}{15}$ d'après la première question, comme enfin l'énoncé annonce que la décomposition égyptienne est unique, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ ne peut être le développement égyptien d'une fraction.

3. Il suffit que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{a-1}$; en effet, comme $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{a-1}$, a est bien le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ($a-1$ ne convient pas !).

4. On se sert de la question précédente : résolvons donc $\frac{1}{11}+\frac{1}{n}>\frac{1}{10}$.

Il vient successivement $\frac{1}{n}>\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{1}{110}$ donc $n>110$. Le plus petit entier qui convient est donc 111 ; $\frac{1}{11}+\frac{1}{111}$ est le développement égyptien d'une fraction, soit de $\frac{122}{1221}$.

4. Bordeaux

http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/elv/jeux/olymp/olymp.html

4-a : Équidistants (c)

Série S

1. On considère un ensemble E du plan contenant au moins trois points et tel que les distances entre deux quelconques de ses points soient égales.

a. Donner un exemple d'ensemble E formé de trois points.

b. Est-ce que E peut contenir plus de trois points ? Justifier.

2. Dans cette question E est un ensemble de points de l'espace possédant la même propriété qu'à la question 1.

Quel est le nombre maximum de points de E ?

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et (C) un cercle donné.

Montrer qu'il est possible de construire n points du cercle (C) tels que les distances entre deux quelconques de ces points soient toutes différentes.

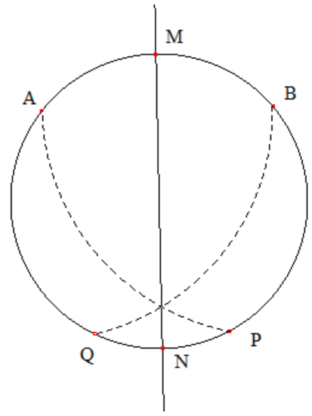
Solution

1. a. Un triangle équilatéral fait l'affaire.

b. Soit A, B, C et D quatre points de E. ABC et ABD sont équilatéraux. C et D distincts sont symétriques par rapport à (AB). On a alors $CD = AB\sqrt{3} > AB$: il est impossible que E contienne quatre points ni davantage par conséquent.

2. E peut contenir 4 points (tétraèdre régulier) mais pas davantage comme le montrerait un raisonnement semblable au 1. b.

3. On peut construire facilement 3 points sur le cercle vérifiant la propriété. Il suffit que le triangle formé par ces 3 points ne soit pas isocèle. Donc si A et B sont donnés, (C) ne doit pas occuper la position des points M, N, P ou Q obtenus en traçant la médiatrice du segment $[AB]$, le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A.



Si l'on souhaite placer un quatrième point il faudra éviter M, N, P et Q mais aussi les quatre points construits à partir de $[AC]$ et les quatre autres construits à partir de $[BC]$.

On met donc en place un algorithme de construction : si n points sont déjà placés sur le cercle formant entre eux un nombre fini N de segments ($N = \frac{n(n-1)}{2}$), le nombre de points à éliminer pour placer un point supplémentaire est au maximumde $4N$ (il est possible qu'il y ait des superpositions). Le cercle ayant une infinité de points, cela est toujours possible.

4-b : Combinaisons de parenthèses (c)

Série S

Soient a, b, c trois entiers naturels distincts et supérieurs ou égaux à 2. On forme les huit combinaisons possibles de ces trois nombres en utilisant des parenthèses, des additions ou des multiplications.

L'objectif est de trouver des familles (a, b, c) pour lesquels deux combinaisons donnent le même résultat.

1. Écrire ces combinaisons dans chacun des cas suivants :

a. $a = 2, b = 3, c = 4$	b. $a = 4, b = 7, c = 8$
c. $a = 6, b = 7, c = 8$	d. $a = 6, b = 11, c = 12$.

Sur ces exemples, quelles sont les combinaisons qui donnent le même résultat ?

En déduire une première famille d'entiers qui répondent au problème. Le prouver.

2. On se propose de trouver d'autres familles (a, b, c) telles que $(b + c)a = bc + a$.

a. Déterminer c lorsque $a = p$ et $b = p + 1$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

b. Déterminer b lorsque $a = 2p$ et $c = 6p - 2$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

c. En déduire deux autres familles solutions du problème initial.

3. On se propose de chercher tous les entiers naturels a, b, c supérieurs ou égaux à 2 vérifiant :

$$(S) : \begin{cases} b < c \\ (b+c)a = bc + a \\ \dfrac{c}{a} \text{ est minimum} \end{cases}.$$

a. Prouver que $a < b$.

b. Démontrer que $\frac{c}{a} \geq 2$ (on pourra montrer que $\frac{c}{a} = 1 + \frac{c-1}{b}$).

c. En déduire toutes les solutions de (S).

<u>Solution</u>

1. Dans les exemples 1, 2 et 4 on trouve que $a(b+c) = a + bc$. Pas de résultats identiques dans le 3.

Ces 3 possibilités correspondent à des triplets de la forme $(a, 2a-1, 2a)$. On vérifie que ces triplets sont des solutions.

2. a. $c = p^2$.

b. $b = 3p$.

c. $(p, p+1, p^2)$ et $(2p, 3p, 6p-2)$

3. $a=\dfrac{bc}{b+c-1}$; or $c<b+c-1$ donc $a<b$.

b. $\dfrac{c}{a}=\dfrac{b+c-1}{b}=1+\dfrac{c-1}{b}$; or $c-1\geq b\Rightarrow\dfrac{c}{a}\geq 2$.

c. $\dfrac{c}{a}$ est donc minimum quand il est égal à 2. Si $\dfrac{c}{a}=2$ alors $c=2a$ donc $a+2ab=a(b+2a)$ et $a(2a-b-1)=0$ donc $b=2a-1$. On a bien $b<c$.

Les seules solutions de (S) sont donc les triplets (a, $2a-1$, $2a$), a entier supérieur ou égal à 2.

4-c : Pyramide de nombres (c)

Autres séries que S

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	...						

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.

Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.

Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve.

Par exemple le nombre 11 est repéré par (10, 5), le nombre 8 par (5, 4)

1. Comment est repéré le nombre 30 ?

2. Comment est repéré le nombre 2010 ?

Solution

1. (26, 2) pour 30.

2. (1937, 900). En effet 2010 est entre 1936 et 2025. C'est le 74ème nombre de la ligne qui en contient 89. C'est le 29ème après le 44ème qui est au dessous du 1. Il est donc au dessous du 30ème carré donc de 900.

4-d : Step by step (c)

En partant du nombre 1, on peut arriver à 2010 en n'utilisant que deux opérations : ajouter 1 et multiplier par 7. On peut par exemple ajouter 2010 fois le 1.

Donner une solution avec un nombre d'étapes le plus petit possible.

Solution

$((1+1+1+1+1)\times 7+1+1+1+1+1+1)\times 7\times 7+1$, ce qui fait 14 étapes.

4-e : Séquences harmoniques (c)

Autres séries que S

On considère la suite bâtie de la manière suivante :

$$L_0=(1)\ ;\ L_1=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\ ;\ L_2=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)\ ;$$

chaque nouvelle séquence étant obtenue en recopiant la précédente et en y rajoutant les mêmes termes divisés par 2.

1. Quelle est la plus petite valeur n pour laquelle la séquence L_n contient plus de 2010 éléments ?

2. Pour cette valeur de n :

a. quel est le 2010e élément de L_n ?

b. quelle est la somme des éléments de L_n ? On pourra commencer par calculer celles de L_1, L_2, L_3.

Solution

1. $n=11$.

2. Pour $n=11$, L_{11} a $2^{11}=2048$ éléments. Si on appelle u_n le n-ième terme, alors u_{2010} est 39ème avant le dernier, on a alors $u_{2048-38}=\frac{1}{2}(u_{1024-38})=\frac{1}{4}(u_{512-38})=\frac{1}{8}(u_{256-38})=...=\frac{1}{32}(u_{64-38})=\frac{1}{32}u_{26}$.

Le terme u_{26} est calculable directement :

$$L_2=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right),\ L_3=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$$

$$L_3=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{16},\frac{1}{31}\right),$$

soit $u_{26}=\frac{1}{8}$ et $u_{2010}=\frac{1}{256}$.

3. $S_{n+1}=\frac{3}{2}S_n$ d'où $S_{11}=\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$.

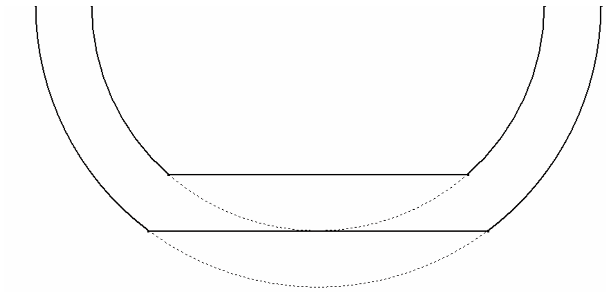
5. Caen

http://math.discip.ac-caen.fr/

5-a : Bols

On considère un bol ayant la forme ci-contre et tel que

- Son rayon intérieur est égal à 4 cm.
- Son rayon extérieur est égal à 5 cm.
- Sa hauteur est égale à 4 cm.
- Son épaisseur est égale à 1 cm.

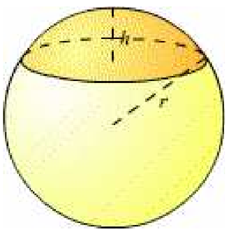


1. a. Quelle est la hauteur de deux bols empilés l'un dans l'autre ?

b. Dans une armoire on dispose de 50 cm de hauteur. Combien de bols peut-on empiler ?

2. Quel est le volume d'air contenu entre deux bols ?

3. On considère une cloche de forme demi-sphérique. Quel doit être son diamètre intérieur minimal pour qu'elle puisse recouvrir un bol posé sur un plan horizontal ?



Données : Volume d'une calotte sphérique : $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$

où r est le rayon de la boule et h la hauteur de la calotte.

5-b : Découpages

On découpe dans une feuille, un carré $ABCD$ de 20 cm de côté.

Soit A_1, B_1, C_1, D_1 les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$.

1. a. Pourquoi $A_1B_1C_1D_1$ est-il un carré ?

b. Quelle est son aire ?

2. On détermine de même les points A_2, B_2, C_2, D_2 les milieux respectifs des segments $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$, $[C_1D_1]$, $[D_1A_1]$ puis de même pour les points A_3, B_3, C_3, D_3 …

On note c_0 la longueur du carré $ABCD$, c_1 la longueur du carré $A_1B_1C_1D_1$ et c_n la longueur du carré $A_nB_nC_nD_n$.

a. Calculer les valeurs exactes de c_2 et c_3.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que c_n soit inférieur ou égal à 0,1 mm.

c. On note a_0 l'aire du carré $ABCD$, a_1 l'aire du carré $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ et a_n l'aire du carré $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ et on note pour $n \geq 1$, $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3 ainsi que S_1, S_2, S_3 et S_4.

d. Existe-t-il un entier n tel que S_n soit supérieur ou égal à 780 ? Supérieur ou égal à 800 ?

On pourra utiliser la formule : $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

3. Le carré initial $ABCD$ est tracé sur une feuille de papier d'épaisseur 0,1 mm.

Par pliage, on construit successivement les carrés $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ puis $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ etc…

a. Quelle serait la hauteur théorique de la feuille, si on veut construire par cette méthode le carré $A_{20}\,B_{20}\,C_{20}\,D_{20}$?

b. Que pensez-vous du résultat obtenu ?

6. Clermont Ferrand

http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/sampleolymp1.php

http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/index.php?lng=fr

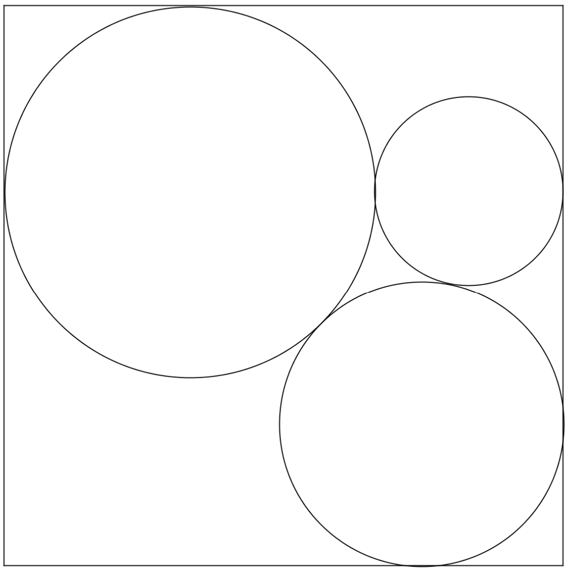
6-a : Des rayons perdus

Dans le carré suivant de côté 1, on a dessiné 3 cercles tangents entre eux, un grand, un moyen et un petit.

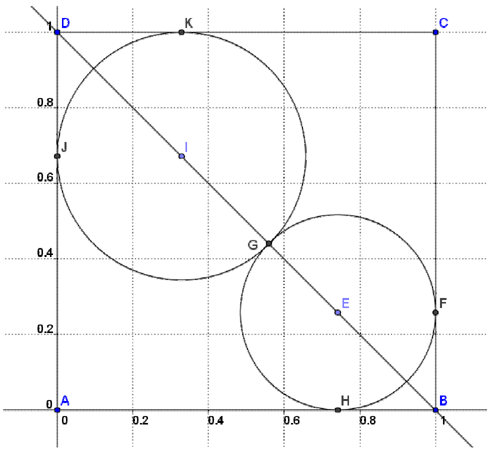
Le grand cercle et le cercle moyen sont tangents à 2 côtés du carré, le petit cercle est tangent à un côté.

Le centre du grand cercle et le centre du petit sont sur une même droite parallèle à un côté du carré.

1. Donner la distance entre les centres du grand et du petit cercle.
2. Pascale affirme : « La distance entre les centres du moyen et du grand cercle est $2 - \sqrt{2}$ ». Qu'en pensez-vous ?
3. Déterminer la distance entre les centres du moyen et du petit cercle.
4. Peut-on trouver le rayon de ces trois cercles ?



Solution



1. La distance entre les centres du grand et du petit cercle est 1/2 puisqu'elle couvre deux demi/diamètres dont la somme fait 1.

2. Prenons E à l'abscisse x, alors $EB=\sqrt{2}-x\sqrt{2}$, $EG=1-x$, $BG=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-x\right)$; prenons I à l'abscisse y, alors $ID=y\sqrt{2}$, JG=y, $GD=y+y\sqrt{2}$; comme la diagonale du carré vaut $\sqrt{2}$, on a

$$x\left(1+\sqrt{2}\right)+y\left(1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$$

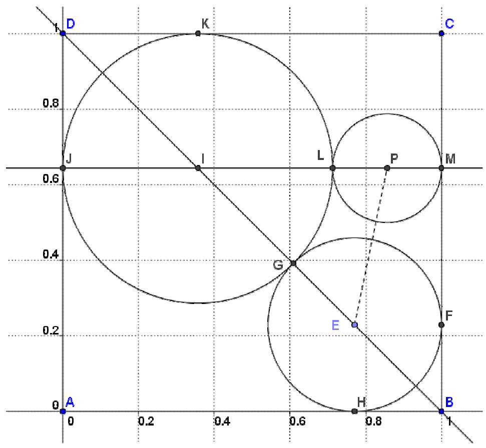
$$\Leftrightarrow x+y=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=2-\sqrt{2}=IE.$$

3. On a $IE=\sqrt{\left(x-y\right)^2+\left(x-y\right)^2}=\left(x-y\right)\sqrt{2}\Rightarrow x-y=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}=\sqrt{2}-1$. Si I a pour coordonnées $\left(y,y\right)$, E a les coordonnées $\left(y+\sqrt{2}-1,\,y+\sqrt{2}-1\right)$ et P les coordonnées $\left(y+\frac{1}{2},y\right)$; on a donc la distance

$$EP^2=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$
$$=\frac{9}{4}-3\sqrt{2}+2+2-2\sqrt{2}+1=\frac{29}{4}-5\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow EP=\frac{\sqrt{29-20\sqrt{2}}}{2}\approx 0{,}423.$$

4. Pour trouver les rayon des trois cercles il faut que la somme des rayons des deux plus petits soit EP :

$$\left|y+\sqrt{2}-1\right|+\left|\frac{1}{2}-y\right|=EP$$
$$\Rightarrow y+\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}+y=EP$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(EP-\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\approx 0{,}254.$$



6-b : Jeu de mains…

Les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG et ST2S ne traiteront que la question A.

A. Ce jeu se joue à deux. Chaque joueur à tour de rôle montre à l'autre un certain nombre non nul de doigts de sa main droite, mais il s'agit de faire en sorte que le nombre total des doigts montrés, depuis le début de la partie, soit à chaque étape un nombre premier.

Si un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.

1. Écrire tous les nombres premiers inférieurs à 50.

2. Y a-t-il toujours un gagnant ?

3. Le premier joueur a trois possibilités au premier tour. Étudier ces trois choix et dire si, selon ce choix, un des deux joueurs peut trouver une stratégie pour gagner à coup sûr.

4. Olympe et Max jouent à ce jeu pour la première fois et n'ont a priori aucune stratégie : c'est Olympe qui commence. A-t-elle

- Plus d'une chance sur deux de gagner ?
- Moins d'une chance sur deux de gagner ?
- Une chance sur deux de gagner ?

B. La règle du jeu reste la même, si ce n'est que chaque joueur montre cette fois-ci un certain nombre non nul de doigts de ses deux mains.

1. Y a-t-il toujours un gagnant ?

2. Une règle supplémentaire est imposée : la suite des nombres premiers successivement obtenus au cours d'une partie doit être une suite de nombres premiers consécutifs.

Olympe (encore elle !) joue à ce nouveau jeu pour la première fois et n'a a priori aucune stratégie : c'est elle qui commence. A-t-elle

- Plus d'une chance sur deux de gagner ?
- Moins d'une chance sur deux de gagner ?
- Une chance sur deux de gagner ?

Remarque : le même exercice, en ne conservant que A. peut être posé pour les 1ères non scientifiques.

7. Corse

http://www.ac-corse.fr/math/Olympiades-2010_a83.html

7-a : Modélisation d'un effet Larsen.

Lorsque qu'une source sonore produit un son, différentes valeurs numériques lui sont attachées, dont **l'intensité** qui distingue un son « faible » d'un son « fort ». Cette intensité s'atténue avec la distance à laquelle l'observateur qui la mesure se trouve de la source ; elle peut se mesurer dans une unité physique (watts par mètre carré, W/m²).

L'oreille humaine peut capter des sons allant de 10^{-12} à 1 W/m² et même au-delà, mais cela devient pénible, un avion à réaction produisant une intensité de l'ordre de 100 W/m². Dans la suite de l'exercice nous ne citerons plus les unités d'intensité.

Sur un amplificateur hifi sont branchés un micro, qui capte les sons en entrée, et un haut-parleur en sortie qui les restitue.

Si I est l'intensité d'un son présenté devant le micro alors ce son se retrouve reproduit par le haut-parleur avec une intensité I' qui dépend du réglage du volume. Cet amplificateur fournit au maximum une intensité égale à 20 donc, quelque soit le réglage du volume, I' reste inférieure ou égale à 20, et lorsque I' est égale à 20 on dit qu'il y a « saturation ».

Tant que ce seuil maximal n'est pas atteint, à chaque position du réglage du volume, l'intensité d'entrée I est multipliée par un coefficient k, nombre réel positif qui dépend de la position du curseur de réglage du volume.

Lorsque le curseur de réglage du volume est placé au minimum on a $k = 0$, et lorsque le curseur de réglage du volume est placé au maximum on a $k = 100$ s'il n'y a pas de saturation.

1. a. Quelle condition doit vérifier l'intensité d'entrée pour éviter une saturation lorsque le volume est réglé au maximum.

b. Dans cette question le volume est réglé à $k = 10$. Exprimer I' en fonction de I et tracer la courbe représentative de la fonction qui à I associe I'.

2. L'intensité du son décroît avec la distance qui sépare le point où il est mesuré de la source sonore ; un son produit au niveau du haut-parleur va se propager dans l'air et revenir au niveau du micro avec un certain retard qui fait que les sons ne se superposent pas, et avec une intensité plus faible, estimée ici à 11 % de l'intensité à la sortie du haut-parleur. Ce son est lui-même transmis à l'amplificateur par le micro.

Le volume est réglé pour $k = 10$ et on produit un son initial instantané d'intensité 0,000 000 000 001 devant le micro dans un environnement de silence supposé absolu.

Une succession de sons se produisent alors au niveau du haut parleur. Déterminer le nombre de sons d'intensités différentes et calculer leurs intensités respectives. C'est le très désagréable **effet Larsen**.

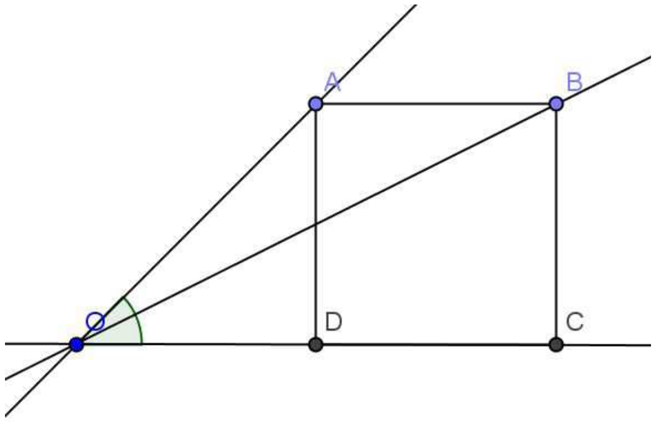
3. Peut-on faire disparaître l'effet Larsen, en agissant sur le bouton de volume de l'amplificateur, mais sans le positionner à zéro ?

7-b : Carrétrice

Les questions 1,2,3 et 4 sont indépendantes.

Étant donné un couple de demi droites sécantes ((Ox), (Oy)) formant un angle de mesure d en degrés ($0 < d \leq 90$).

On considère pour tout point A de (Oy) distinct de O, le carré $ABCD$ tel que C et D soient des points de (Ox) et B situé dans le secteur angulaire (xOy).



1. On suppose dans cette question qu'une mesure de l'angle $\widehat{xOy}$ est 45°. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à un degré près par défaut de la mesure de l'angle $\widehat{COB}$.

2. On se place dans le cas général. Soient A et A' deux points de la demi-droite (Oy) distincts de O, $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux carrés, où $CDC'D'$ sont des points de (Ox). Démontrer que les points O, B et B' sont alignés.

La demi-droite $[OB]$ est appelée « *carrétrice* » du couple de demi-droites $((Ox),(Oy))$. Si les demi-droites sont confondues, la « *carrétrice* » leur est égale.

3. Est-il possible que la « *carrétrice* » de $((Ox), (Oy))$ soit la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{xOy}$, lorsqu'il n'est pas nul ?

4. On considère deux demi-droites sécantes (Ox) et (Oy) formant un angle droit, et (Ot) une demi-droite quelconque intérieure au secteur angulaire (xOy). Construire les « *carrétrices* » (Ou) et (Ov) respectivement des couples $((Ox), (Ot))$ et $((Oy), (Ot))$. Démontrer que la valeur minimale de l'angle $\widehat{uOv}$, est obtenue lorsque (Ot) est bissectrice de $\widehat{uOv}$ et déterminer une valeur approchée en degré à 10^{-2} près par excès de celle-ci.

8. Créteil

http://maths.ac-creteil.fr/spip/spip.php?rubrique59

8-a : Un défi entre copains

Série S

Quatre copains se réunissent pour relever le défi suivant trouvé dans un vieux livre de mathématiques :

« Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (P) suivante :

Pour tous réels a et b, $(a-b)\times f(a+b)-(a+b)\times f(a-b)=4ab\left(a^2-b^2\right)$. »

1. a. Ali, Laure et Yin testent la propriété (P) avec des fonctions particulières : Ali utilise la fonction $x\mapsto x$, Laure utilise la fonction $x\mapsto x^2$ et Yin utilise la fonction $x\mapsto x^3$.

Lequel d'entre eux aura trouvé une fonction vérifiant la propriété (P) ?

b. Thomas, le quatrième copain, affirme que : « la fonction $x\mapsto \sin x$ ne vérifie pas la propriété (P) ».

Pour cela il a remplacé les réels a et b par deux valeurs particulières. Quelles valeurs de a et de b a-t-il pu choisir ?

2. Ali affirme que : « Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie la propriété (P), alors f est une fonction impaire »

a. Montrer qu'Ali a raison.

b. La fonction $x\mapsto x^4$ vérifie-t-elle la propriété (P) ?

c. Yin s'interroge sur le fait que : « Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire, alors f vérifie la propriété (P) ». Quelle réponse lui donneriez-vous ?

3. a. Laure affirme que : « Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie la propriété (P) , alors $f(2)-2f(1)=6$ ».

Montrer que Laure a raison et expliquer sa démarche.

b. Le groupe annonce qu'il a établi une relation entre $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(2)$. Quelle relation ont-ils pu trouver ?

4. Pour aider le groupe :

a. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(1)$ pour x réel quelconque. De quelle forme sont les fonctions vérifiant la propriété (P) ?

b. Relever le défi posé par ce groupe de copains.

8-b : Le Dictionnaire de MeGa.

Le petit MeZoCoDi feuillette le tout nouveau Dictionnaire de MeGa que son ami GaLuZo lui a donné. Ce dictionnaire est un peu particulier :

- Il égrène tous les mots possibles formés d'au plus 4 syllabes prises parmi Bu, Co, Di, Ga, Lu, Me et Zo, en commençant par les 7 mots de une syllabe écrits dans l'ordre alphabétique, suivis par les mots de deux syllabes écrits dans l'ordre alphabétique et ainsi de suite jusqu'aux mots de 4 syllabes.

Par exemple, Ga, CoDi, MeZo, GaLuZo et MeZoCoDi sont des mots du dictionnaire.

- De plus chaque page, sauf éventuellement la dernière, contient exactement 60 mots disposés en quatre colonnes de 15 mots chacune.

1. Sachant qu'il commence page 1, combien le dictionnaire de MeZoCoDi comporte-t-il de pages ?

2. Combien de mots peut-on lire sur la dernière page ?

3. MeZoCoDi se rend vite compte que son nom et celui de son ami GaLuZo figurent dans le dictionnaire.

À quelle page trouvera-t-il son nom ? Et celui de son ami ?

4. Sachant qu'un mot sur une page est repéré par son numéro de colonne x , $1 \leq x \leq 4$, et son rang dans la colonne y, $1 \leq y \leq 15$, comment les noms de nos deux personnages sont-ils repérés ?

8-c : Les s-nombres

toutes séries

On dit qu'un entier naturel est un *s-nombre* s'il est impair et s'il ne peut s'écrire que d'une seule façon comme somme d'entiers consécutifs non nuls.

Par exemple, 6 n'est pas un *s-nombre* car il n'est pas impair ; 1 non plus car il ne se décompose pas en somme d'entiers consécutifs non nuls ; 3 est un *s-nombre* car 3 = 1 + 2 est la seule décomposition possible de 3 en somme d'entiers consécutifs non nuls ; mais 9 = 5 + 4 = 2 + 3 + 4 n'en est pas un, sa décompo-sition n'étant pas unique.

Voici la liste des 11 premiers entiers impairs supérieurs ou égaux à 3 et l'ensemble de leurs décompositions en somme d'entiers consécutifs non nuls :

$3 = 1 + 2$ $\quad 5 = 2 + 3$ $\quad 7 = 3 + 4$ $\quad 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$

$11 = 5 + 6$ $\quad 13 = 6 + 7$ $\quad 15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6$ $\quad 17 = 8 + 9$

$19 = 9 + 10$ $21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ $\quad 23 = 11 + 12$

1. a. Montrer que 25 n'est pas un *s-nombre*. Qu'en est-il de 27 et de 49 ?

b. Sachant que, dans l'ordre, le premier *s-nombre* est 3, le deuxième *s-nombre* 5, quel est le neuvième *s-nombre* ?

c. Conjecturer une propriété qui caractérise l'ensemble des *s-nombres*.

2. Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme somme de deux entiers consécutifs.

3. La figure 1 ci-dessous illustre une décomposition de 25 en 5 entiers consécutifs (3+ 4 + 5 + 6 + 7) à l'aide de 25 petits carrés ; la figure 2 montre un rectangle formé de deux exemplaires de la figure 1.

figure 1

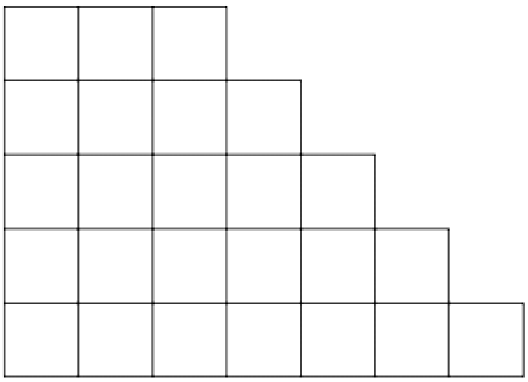
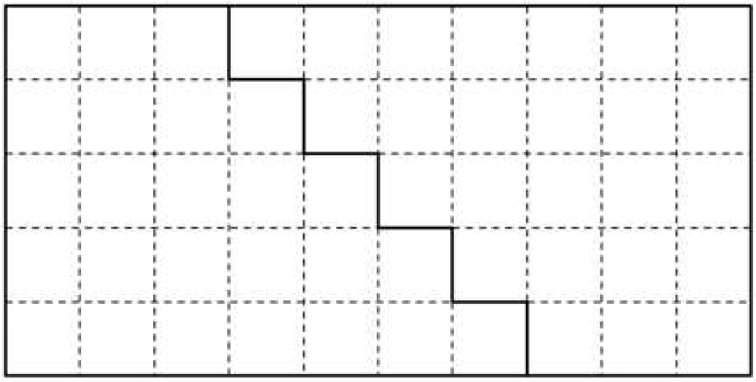


figure 2



En considérant le nombre de petits carrés du rectangle, on a ainsi l'égalité : $2 \times 25 = 5 \times 10$.

a. À quoi correspondent le nombre de lignes et le nombre de colonnes du rectangle par rapport à la décomposition $3 + 4 + 5 + 6 + 7$?

b. Généraliser et montrer que si un entier naturel n est la somme de k entiers naturels consécutifs alors l'entier $2n$ s'exprime de façon simple en fonction de k et du plus petit terme de la somme.

4. En déduire que si l'entier naturel n est somme de k entiers consécutifs non nuls avec $k \geq 3$, alors n est divisible par k ou par $\frac{k}{2}$.

5. Valider la conjecture de la question 1.

9. Dijon

http://mathematiques.ac-dijon.fr/

9-a : Quasi-premiers

On rappelle qu'un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs. La liste des nombres premiers commence ainsi : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …., et cette liste est infinie. On dit qu'un nombre entier naturel non nul est un nombre quasi-premier si ce nombre n'est pas premier et si, en modifiant un et un seul des chiffres de l'écriture en base dix de ce nombre, on obtient un nombre premier. Par exemple 24 est un nombre quasi premier car il n'est pas premier et 23 est premier.

1. Quelques exemples

a. Démontrer que tout entier non nul inférieur à 100 est soit premier, soit quasi-premier.

b. Quelle est la nature du nombre 100 ?

2. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres quasi-premiers.

3. Encore des infinités

a. Démontrer que le nombre 200 n'est ni premier ni quasi-premier.

b. Soit k un entier naturel. Le nombre $2310\,k + 200$ peut-il être premier ? Peut-il être quasi-premier ?

c. En déduire qu'il existe une infinité de nombres qui ne sont ni premiers ni quasi-premiers.

4. Des nombres à la chaîne

a. Peut-on trouver une liste de 7 entiers consécutifs qui soient des nombres quasi-premiers ?

b. Peut-on trouver une telle liste de longueur supérieure à 7 formée uniquement de nombres quasi-premiers ?

9-b : Cercles de Ford

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls qui vérifient l'équation (E) : $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$.

1. On suppose que $(a\,;\,b)$ est un couple d'entiers naturels solution de (E).

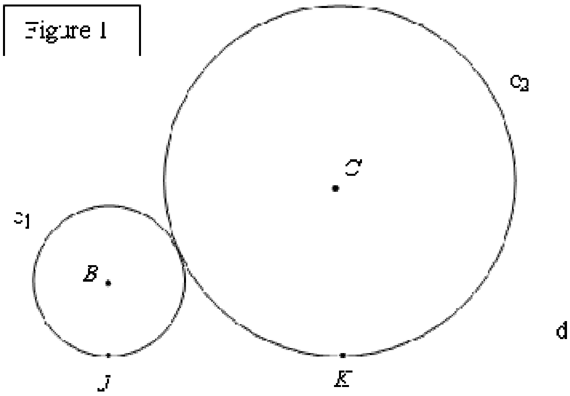
a. Démontrer que $b = a + 2\sqrt{a} + 1$.

b. En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que l'on ait $a = n^2$ et $b = (n+1)^2$.

2. Résoudre l'équation (E).

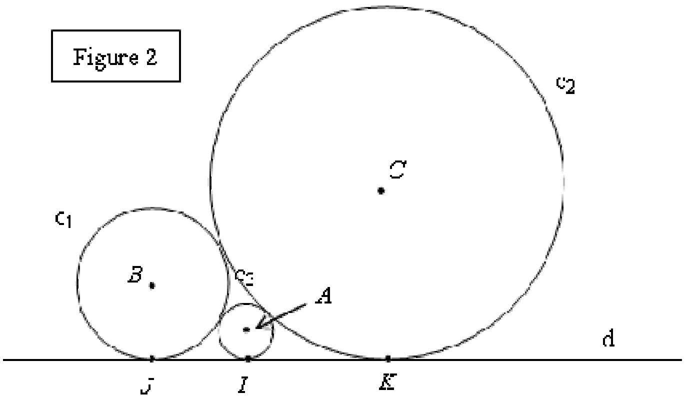
Partie B

1. Deux cercles c_1 et c_2 de centres respectifs B et C, de rayons respectifs b et c sont situés du même côté d'une droite d, tangents à cette droite respectivement en J et K, et tangents entre eux (figure 1).



Démontrer l'égalité $KJ^2 = 4bc$.

2. On reprend la figure 1, et l'on rajoute un cercle c_3 de centre A et de rayon a, qui est tangent à la droite d en I, et tangent extérieurement aux cercles c_1 et c_2 (figure 2)



Démontrer l'égalité $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$.

3. On considère la figure de la question 2.

a. Donner une infinité de cas où les trois rayons sont des entiers, l'un étant le produit des deux autres.

b. Donner un cas où les trois rayons sont des entiers et où le rayon du petit cercle est égal à 2010.

10. Guadeloupe

http://pedagogie.ac-guadeloupe.fr/mathematiques

10-a : Carrés parfaits !

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, déterminer tous les carrés *ABCD* d'aire 20 vérifiant les conditions suivantes :

* *A* appartient à l'axe des abscisses
* *B* appartient à l'axe des ordonnées
* les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *D* sont des entiers naturels.

10-b : Polygones réguliers

« Dans un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, la somme des carrés des distances entre un sommet et les autres sommets est égale à 2n ».

Vérifier la propriété pour :

a. $n = 3$

b. $n = 4$

c. $n = 5$.

On pourra admettre que $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

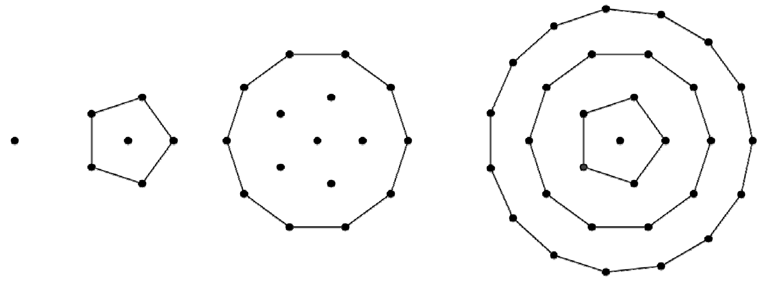
11. Grenoble

http://www.ac-grenoble.fr/maths/

11-a : Nombres pentagonaux centrés.

Un nombre pentagonal centré est un nombre qui peut être représenté par un pentagone ayant un point placé en son centre et tous les autres points disposés autour de ce centre en formant des couches pentagonales successives.

Les quatre premiers nombres pentagonaux sont 1, 6, 16 et 31.



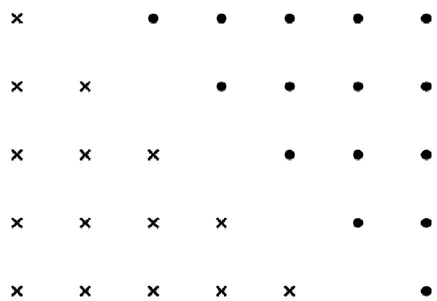
1 6 16 31

1. a. Quel est le $5^{\text{ème}}$ nombre pentagonal centré ?

b. Combien de points faudra-t-il ajouter pour passer au $6^{\text{ème}}$ nombre pentagonal centré ?

2. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$.

On pourra pour cela observer la figure ci-dessous :



b. En déduire que les nombres pentagonaux centrés peuvent tous être écrits sous la forme : $1+5\frac{n(n-1)}{2}$ où n est un entier naturel.

c. 2176 est-il un nombre pentagonal centré ? Indiquer la méthode utilisée pour répondre.

2. a. Quels sont les chiffres des unités possibles pour un nombre pentagonal ?

b. Pour quelles valeurs de n le n-ième nombre pentagonal est il pair ?

c. Quel est le chiffre des unités du 20092010-ème nombre pentagonal centré ?

11-b : Nombres mystérieux

Pour les élèves des sections autres que S et STI.

1. On considère un ensemble de trois nombres mystérieux dont on ne connaît que les sommes deux à deux. Ces sommes sont 5, 7, 8. Déterminer ces trois nombres mystérieux.

2. On considère maintenant cinq nombres mystérieux dont les sommes deux à deux sont 18, 24, 26, 28, 30, 36, 38, 42, 48, 50. Déterminer ces cinq nombres mystérieux.

11-c : Variations autour du cône

Pour les élèves des sections S et STI.

1. Le dessin ci-contre représente un abat-jour conique.

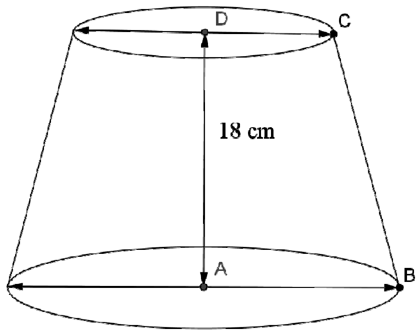
Le diamètre du cercle de base est 30 cm, celui du cercle de tête (le cercle du haut) 15 cm, la hauteur 18 cm.

On décide de découper une pièce de tissu pour le garnir.

Réaliser un patron à l'échelle $\frac{1}{3}$.

On rédigera les éléments de construction et fera figurer sur le dessin les points B et C.

La partie à découper devra être mise en évidence.



2. On découpe dans un disque de rayon R un secteur angulaire pour former le patron d'un cône de révolution.

Le rapport de longueur entre l'arc intercepté par le secteur angulaire restant et le cercle est donc un réel compris entre 0 et 1. On le note x.

Par exemple si $x = 0{,}75$, le secteur angulaire correspond aux trois quarts du disque.

Le but de cette question est de déterminer la valeur de x pour que le volume du cône soit maximal.

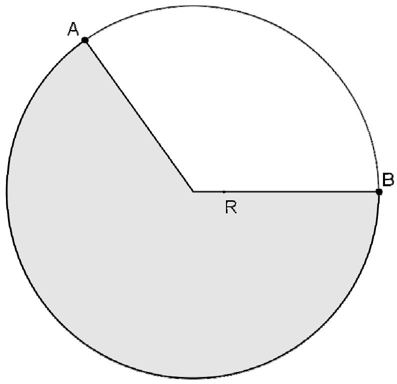
a. Calculer en fonction de x et de R :

i. la longueur de l'arc de cercle intercepté par le secteur angulaire,

ii. le rayon du cercle de base du cône,

iii. le volume du cône.

b. Déterminer la valeur α de x pour laquelle le volume est maximal. On pourra chercher un encadrement de α. Le calcul de la valeur exacte de α sera apprécié.



12. La Réunion (*)

http://maths.ac-reunion.fr/Concours-et-Rallyes/Olympiades-de-Mathematiques/

13. Lille

http://www5.ac-lille.fr/~math/classes/olympiades.html

13-a : Jusqu'au dernier…

Série S

1. Antoine et Luc jouent au jeu suivant :

On inscrit sur un tableau les nombres entiers de 1 à 64. Parmi ces nombres, on en choisit deux distincts, a et b que l'on efface, mais on inscrit alors leur somme $a + b$; il reste donc 63 nombres au tableau. On recommence avec ces 63 nombres et ainsi de suite jusqu'au moment où il ne reste plus qu'un seul nombre.

Antoine parie que ce dernier nombre sera pair et Luc parie qu'il sera impair.

Quelles sont les chances que chacun a de gagner ?

2. Reprendre le même problème en remplaçant la *somme* par la différence $a - b$.

3. Antoine et Luc décident de changer les règles du jeu :

On inscrit toujours sur un tableau les nombres entiers de 1 à 64. Parmi ces nombres, on en choisit deux distincts, a et b que l'on efface, mais on inscrit alors soit $a + b - 1$, soit $a + b - 2$; il reste donc 63 nombres au tableau.

On recommence avec ces 63 nombres et ainsi de suite jusqu'au moment où il ne reste plus qu'un seul nombre.

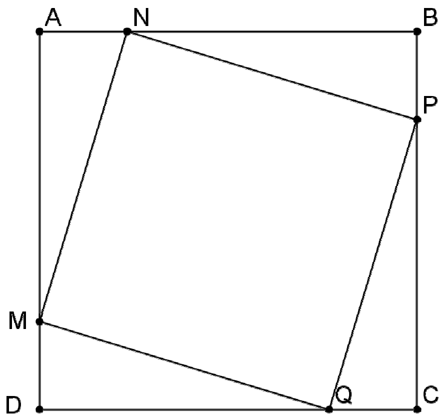
a. Quel est le plus grand nombre que l'on peut ainsi obtenir ?

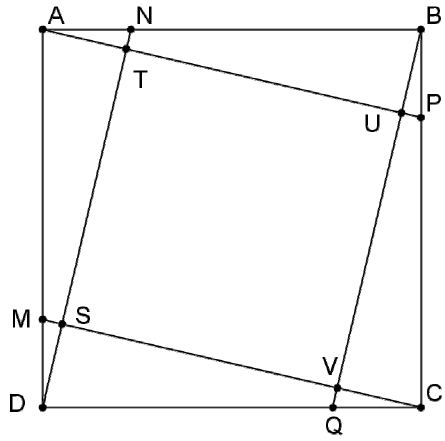
b. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ainsi obtenir ?

c. Peut-on obtenir 2010 ? Si oui, de quelle manière ?

13-b : Dissections d'un carré…

Série S





ABCD est un carré de côté 1

M est un point variable du segment [DA] différent du point D et du point A ; N, P et Q sont les points respectivement des segments [AB], [BC] et [CD] tels que AN = BP = CQ = DM.

Les droites (CM) et (DN) se coupent en S ; les droites (DN) et (AP) se coupent en T ; les droites (AP) et (BQ) se coupent en U ; les droites (BQ) et (CM) se coupent en V.

1. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.

On admet pour la suite de l'exercice que le quadrilatère STUV est également un carré.

2. Existe-t-il une position du point M pour laquelle les quatre triangles QDM, MAN, NBP, PCQ et le carré MNPQ ont la même aire ?

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle les quatre triangles DTA, AUB, BVC, CSD et le carré STUV ont la même aire ?

4. Proposer un partage du carré ABCD en 8 triangles rectangles et un carré de même aire.

5. On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 1. Proposer une démarche pour partager le carré ABCD en $4n$ triangles et un carré de même aire.

13-c : Des triangles géniaux…

Séries autres que S

Un triangle est *génial* si chaque nombre est le résultat de la soustraction des 2 nombres situés immédiatement en dessous de lui et si chaque nombre est utilisé une et une seule fois.

Par exemple les triangles géniaux de 2 rangées obtenus avec les nombres 1, 2 et 3 sont :

<table><tr><td colspan="2" align="center">2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr></table>

<table><tr><td colspan="2" align="center">2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>

<table><tr><td colspan="2" align="center">1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr></table>

<table><tr><td colspan="2" align="center">1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>

1. Reproduire et compléter le tableau suivant pour obtenir un triangle génial de 3 rangées en utilisant une et une seule fois les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

<table><tr><td colspan="6" align="center"> </td></tr><tr><td colspan="3"> </td><td colspan="3"> </td></tr><tr><td colspan="2"> </td><td colspan="2"> </td><td colspan="2"> </td></tr></table>

2. Dans le tableau suivant, on a déjà placé les nombres 5 et 9. L'objectif est de compléter ce tableau pour obtenir un triangle génial de 5 rangées utilisant une et une seule fois les nombres entiers de 1 à 15.

<table><tr><td colspan="4" align="center">5</td></tr><tr><td colspan="2"> </td><td colspan="2">9</td></tr><tr><td> </td><td colspan="2"> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>

a. Montrer que le nombre 15 se trouve obligatoirement dans la rangée du bas.

b. Montrer que le nombre 14 se trouve obligatoirement dans l'une des 2 rangées du bas.

c. Reproduire et compléter le tableau.

13-d : Des triangles de même aire…

Séries autres que S

Héloïse et Mathis cherchent à partager un triangle en des triangles de même aire.

Héloïse : « Mathis, saurais-tu partager un triangle en deux triangles de même aire ? (contruction1) ».

Mathis : « C'est trop facile, je peux même le faire avec trois, quatre, autant de triangles que je veux (construction 2). Et toi pourrais-tu partager un triangle ABC en quatre triangles de même aire, l'un d'eux n'ayant aucun sommet commun avec ABC ? (construction 3) »

Héloïse : « Pas mal, et maintenant un peu plus dur : partage le triangle ABC en trois triangles de même aire sachant que ces trois triangles ont un sommet commun autre que A, B ou C (construction 4) »

Mathis : « C'est trop dur, aide moi. »

Héloïse : « Quel point particulier du triangle ABC pourrait-on choisir comme sommet des trois triangles ?»

Mathis : « J'ai une idée mais comment le démontrer ? »

Héloïse : « Tu peux commencer en partageant le triangle ABC en six triangles de même aire, ces six triangles ayant un sommet commun autre que A , B ou C ».

Mathis : « Tu as raison, c'est plus facile comme ça »

Expliquer et justifier les quatre constructions envisagées.

14. Marseille

http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/olymp-an.htm

14-a : Une fonction particulière

On considère une fonction numérique f définie pour $x \in]0\,;+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	$f(x)$
2	3,0103
3	4,7712
4	
5	6,9897
6	7,7815
7	8,4510
8	
9	
10	
100	
1 000	
1 000 000	
10^9	

Cette fonction vérifie la propriété suivante :

◆ Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, $f(x \times y) = f(x) + f(y)$.

Ainsi, par exemple, l'image de 6 par la fonction f est :

$f(6) = f(2\times 3) = 3{,}0103 + 4{,}7712 = 7{,}7815$.

Partie A : Étude mathématique

1. Déterminer $f(4)$ puis recopier sur votre copie et compléter la table précédente.

2. Calculer $f(245)$.

3. Quelle est l'image de 1 par cette fonction ?

4. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif y, $f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$.

Partie B : Application

Un décibel (dB) est une unité servant à exprimer l'intensité acoustique d'un son. Pour simplifier, sur l'échelle des décibels (qui n'est pas linéaire), le son audible le plus faible (silence presque total) auquel nous affectons l'indice 1 mesure 0 dB.

Par exemple, un son d'indice 5 (5 fois plus fort !) s'élève à presque 7 dB.

En réalité, la fonction de la partie A. fait correspondre à l'indice de l'intensité d'un son perçu par une personne sa mesure en décibel.

1. Justifier que si l'indice d'intensité d'un son donné est décuplé, la mesure en dB de celui-ci augmente de 10 dB.

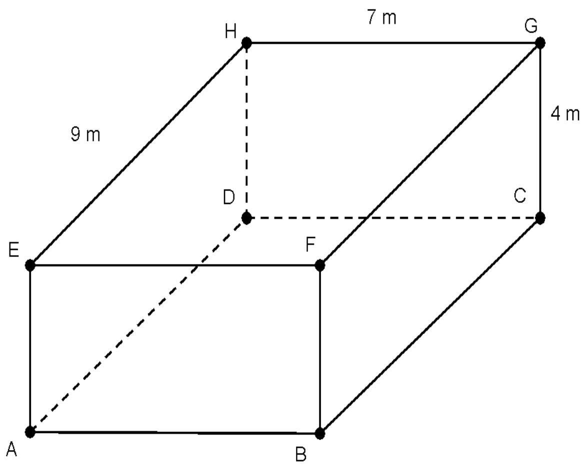
2. Une conversation normale est mesurée à 60 dB. À quel indice d'intensité cela correspond-il ?

3. Un son commence à devenir douloureux au-delà de 80 dB et dangereux à partir de 100 dB. Le son en discothèque est souvent de 110 dB. À quel indice d'intensité cela correspond-il ?

4. Dans un supermarché vous êtes face à deux lave-vaisselles. Le produit A fait un bruit mesuré à 39 dB alors que le produit B est mesuré à 36 dB. Vous discutez avec un commercial en lui disant que vous préférez la machine B car moins bruyante, mais ce vendeur qui doit absolument écouler son stock de machines A vous répond « Oh ! Pour 3 petits décibels, ça ne change pas grand chose… ».

En calculant le rapport des intensités, trouver un argument à opposer au vendeur.

14-b : Flipeur et Flipette



Une mouche mâle (nommée Flipeur) se déplace sur les murs d'une pièce représentée par le pavé de la figure ci-contre (AB = 7 m, AD = 9 m et AE = 4 m). Flipeur se trouve (symboliquement) au point A quand il voit atterrir au point G la délicieuse et irrésistible mouche Flipette. Il décide sans ambages de la rejoindre…

1. Dans un premier temps Flipeur décide de jouer les mouches équilibristes et se déplace uniquement sur les arêtes de la pièce.

a. Nous supposons la condition MI (Mouche Intelligente) suivante vérifiée :

(MI) « La mouche ne repasse jamais deux fois par le même sommet »

Quel est alors le nombre total de chemins possibles permettant d'arriver au point G ?

b. Parmi les chemins précédents, indiquer les chemins les plus courts.

c. Déterminer la probabilité pour que Flipeur choisisse du premier coup un des chemins les plus courts.

2. Devenant plus audacieux, Flipeur s'autorise à quitter les arêtes et à traverser les faces de la pièce. Déterminer le chemin le plus court. Quelle distance Flipeur parcourra-t-il dans ce cas ?

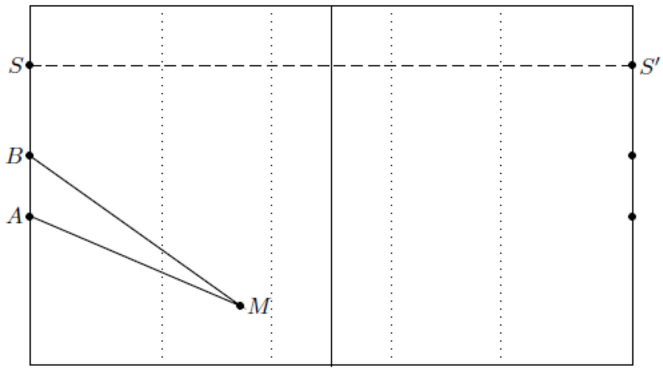
3. Finalement, Flipeur décide de retrouver Flipette le plus rapidement possible sans s'imposer de contrainte (il peut voler !) : quelle distance va-t-il parcourir dans ce cas ?

15. Montpellier

http://webpeda.ac-montpellier.fr/mathematiques/spip.php?article37

15-a : Angle de tir (S)

On a représenté ci-dessous un terrain de rugby. Un joueur a posé le ballon en M et « tente un coup de pied » dit « de pénalité » : il s'agit de faire passer le ballon entre les poteaux A et B.



L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle de tir. L'ouverture de cet angle est un élément décisif pour la réussite de ce coup de pied.

1. Représenter sur le terrain trois autres points que M qui offrent le même angle de tir que l'angle $\widehat{AMB}$?

2. Un joueur « marque un essai » au point S. La règle veut qu'il place alors le ballon en un point de son choix sur le segment $[SS']$ perpendiculaire à $[AB]$ pour tirer son coup de pied (dit « de transformation »).

a. Y-a-t-il une ou plusieurs positions qui offrent le mêeme angle de tir que lors de la pénalité précédente ?

b. Où faut-il placer le ballon sur le segment $[SS']$ pour que l'angle de tir soit maximal ?

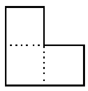
15-b : Damiers tronqués et Triminos

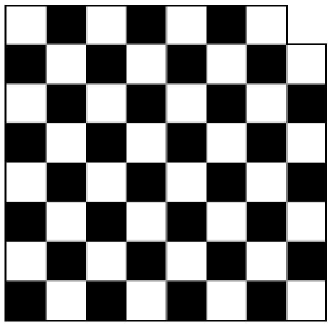
Série S

On suppose que n est un entier non nul. Soit un damier ayant $2n$ cases par côté.

On enlève une case de coin à ce damier.

Un trimino est une pièce de la forme ci-dessous et qui peut recouvrir exactement 3 cases de damier :





Damier tronqué pour $n = 4$

Par exemple, si $n = 1$ (2×1 cases par côté, le damier tronqué a donc 3 cases), un seul trimino permet de recouvrir le damier tronqué.

Dans la suite, recouvrir (par des triminos) un damier tronqué donné signifie que les triminos servant à le recouvrir ne se superposent pas et que toutes les cases du damier tronqué sont exactement recouvertes.

Il est permis de tourner les triminos dans tous les sens.

1. Faire un dessin pour $n = 2$ (4 cases par côté), et montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.

2. Faire un dessin pour $n = 4$ (16 cases par côté) et montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.

3. Prouver que si l'on peut recouvrir par des triminos un damier ayant 2^n cases par côté et auquel on a enlevé une case de coin, alors on peut aussi recouvrir par des triminos un damier ayant 2^{n+1} cases par côté et auquel on a enlevé une case de coin.

À ce niveau, on peut conclure que, pour tout $n > 0$, on peut recouvrir par des triminos un damier ayant 2^n cases par côté et auquel on a enlevé une case de coin.

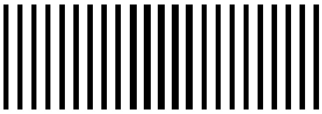
4. Le nombre $2^{2^{2010}} - 1$ est-il divisible par 3 ?

15-c : Le jeu de « Nîmes » (non S)

Règles du jeu :

- C'est un jeu à deux joueurs.
- Face à un alignement de bâtonnets, chacun doit à tour de rôle retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets au choix.
- Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

Exemple avec 23 batonnets :



Vous êtes opposé(e) à un(e) adversaire (c'est en fait un ordinateur !).

Partie A : Il reste 6 bâtonnets, c'est à votre tour de jouer.

1. Décrire deux parties possibles, l'une où vous gagnez, l'autre où vous perdez.

2. Élaborer la stratégie gagnante (c'est-à-dire quel(s) coup(s) jouer pour être sûr(e) de gagner la partie quoi que fasse l'adversaire).

Partie B : Avec n bâtonnets, c'est à votre tour de jouer.

1. Pour $n = 101$, quelle est la stratégie gagnante ?

2. Si n est un nombre entier non nul, existe-t-il une stratégie gagnante ?

Partie C : Avec n bâtonnets et une nouvelle règle du jeu.

Dans cette partie, on modifie la règle du jeu : les joueurs ne peuvent retirer, à chaque tour, que 2 ou 3 bâtonnets (on n'a plus le droit de retirer un seul bâtonnet).

Vous commencez la partie. Pour quelle(s) valeur(s) de n y a t'il une stratégie gagnante ?

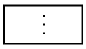
15-d : Damiers et dominos

Autres séries que S

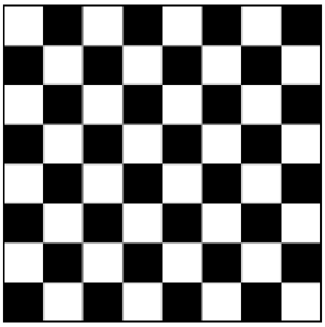
Posé sur un damier, un domino peut recouvrir exactement deux cases ayant un bord commun.

Dans la suite, *recouvrir* (par des dominos) signifie que les dominos servant à recouvrir le damier ne se superposent pas et que toutes les cases données sont exactement recouvertes.

n est un nombre entier non nul.



Domino



Damier

1. Peut-on recouvrir un damier ayant 9 cases de côte ?

2. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n$ cases de côté et dont on a retiré la case située en haut à gauche ?

3. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n$ cases de côté et dont on a retiré une case à chaque extrémité d'une même diagonale ? (on rappelle qu'un damier comporte des cases blanches et des cases noires)

4. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n + 1$ cases de côté et dont on a retiré une case à chaque extrémité d'une même diagonale ?

5. Démontrer qu'il est possible de recouvrir un damier ayant $2n + 1$ cases de côté dont on a retiré la case située en haut à gauche.

16. Nancy-Metz

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/olympiad.htm

16-a : La formule d'Euler

Séries S-STI-STL

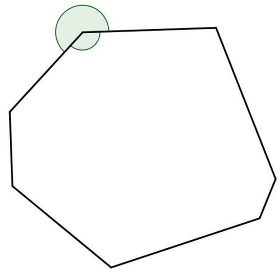


Figure 1: Exemple d'un 7-gone.

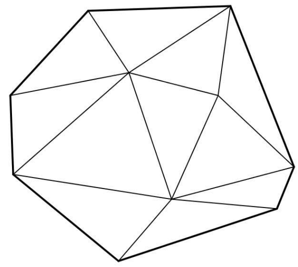


Figure 2 : Exemple d'un 7-gone avec une subdivision de son intérieur.

On appellera *k-gone* un polygone dans le plan ayant k sommets (et donc aussi k côtés ou arêtes).

Un triangle est donc un 3-gone, un parallélogramme est un 4-gone. La figure 1 donne un exemple de 7-gone.

On ne considère dans cet exercice que les triangles et les k-gones dont les diagonales sont dans l'intérieur du k-gone (une diagonale étant un segment joignant deux sommets non consécutifs).

Pour chaque sommet d'un k-gone, on appelle angle interne celui qui est à l'intérieur du k-gone et angle externe celui qui est à l'extérieur.

1. a. Montrer que pour un 4-gone, la somme des angles internes est 2π et la somme des angles externes est 6π .

b. Montrer que pour un 5-gone, la somme des angles internes est 3π et celle des angles externes est 7π .

2. Soit $k \geq 3$.

a. Montrer que la somme des angles internes d'un k-gone est π $(k - 2)$.

b. En déduire que la somme des angles externes d'un k-gone est π $(k + 2)$.

3. Soit P un k-gone. Son intérieur peut-être subdivisé en un ensemble de triangles. La figure 2 donne un exemple de subdivision de l'intérieur d'un 7-gone.

On note f le nombre de triangles de la subdivision, s le nombre total de sommets de la subdivision et a le nombre total d'arêtes de la subdivision.

a. Sur l'exemple de la figure 2, donner les valeurs de s, a et f, et vérifier que $s - a + f = 1$.

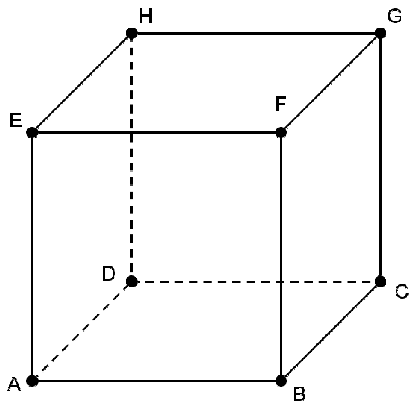
b. En considérant de deux manières différentes la somme des angles en chaque sommet d'un k-gone, montrer que $2s = f + k + 2$.

c. Démontrer que $2a = 3f + k$.

d. En déduire la **formule d'Euler** : $s - a + f = 1$.

16-b : Un solide dans un cube

Séries S-STI-STL



On considère le cube ABCDEFGH (figure 1) de côté c et de volume V.

1. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est égal à $\frac{1}{3}B\times h$, où B est l'aire d'une face du tétraèdre et h la longueur de la hauteur s'appuyant sur cette face. Calculer le volume du tétraèdre ABDE.

2. On rappelle qu'un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur.

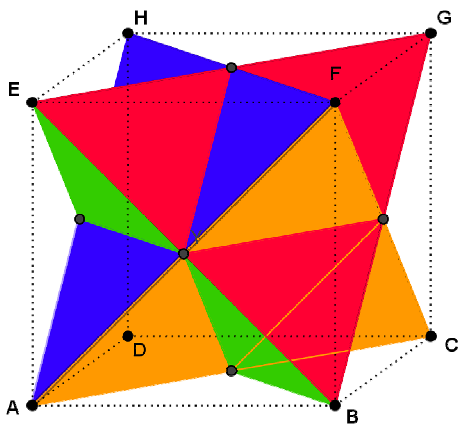
a. Montrer qu'il est possible de trouver quatre sommets du cube constituant les sommets d'un tétraèdre régulier. Calculer le volume de ce tétraèdre en fonction de V.

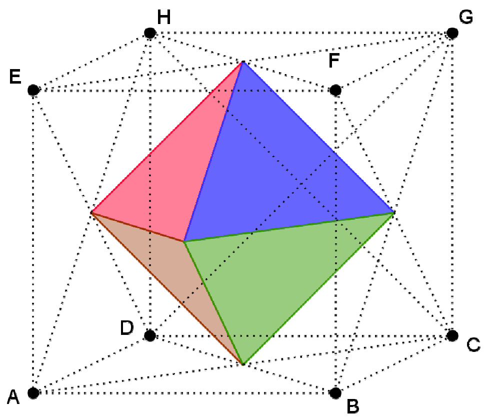
b. Justifier qu'on ne peut construire que deux tétraèdres réguliers à partir des sommets du cube.

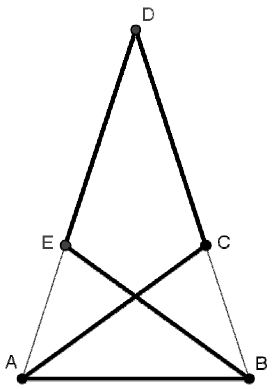
3. On considère les deux tétraèdres FHAC et EBGD.

a. Calculer, en fonction de V, le volume du solide obtenu en enlevant tous les points du cube qui n'appartiennent à aucun des deux tétraèdres (voir figure 2).

b. Calculer, en fonction de V, le volume du solide intersection des deux tétraèdres (voir figure 3).







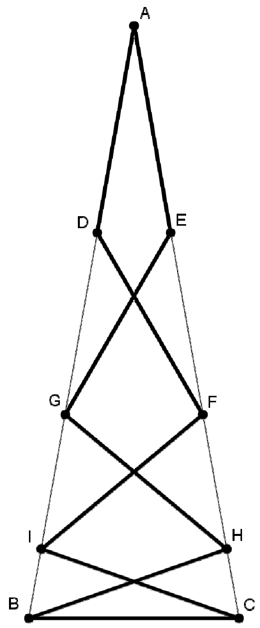
16-c : Les pylônes

Séries ES-L-STG-ST2S

1. La figure à gauche représente un pylône. Les poutrelles indiquées en gras sont toutes de même longueur :

$$AB = AC = BE = CD = DE.$$

Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ADB}$.



2. La figure à droite représente un autre pylône.

Les poutrelles indiquées en gras sont également toutes de même longueur :

$$AD = AE = EG = DF = GH = FI = IC = HB = BC.$$

Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

16-d : Les damiers

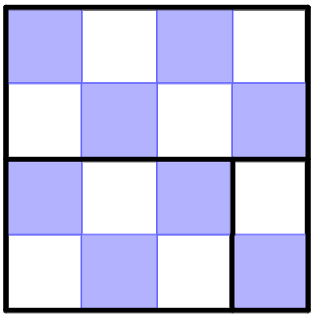
Considérons un damier rectangulaire formé de cases noires et blanches.

Découpons-le en n rectangles en respectant les cases avec un découpage satisfaisant aux conditions suivantes :

- Chaque rectangle est formé d'autant de cases blanches que de cases noires.
- Il n'y a pas deux rectangles ayant le même nombre de cases blanches.

Dans la suite de l'exercice, pour un découpage répondant aux deux conditions précédentes :

- on note $a_1, a_2, \ldots a_n$, avec $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$, le nombre de cases blanches dans les n rectangles.
- on appelle « décomposition possible » la liste ordonnée $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.



Exemple ci-contre : (1, 3, 4) constitue une décomposition possible d'un damier carré de 4x4 cases.

1. Considérons un damier de dimensions 6 cases en largeur et 7 cases en longueur.

a. Trouver une décomposition possible en trois rectangles.

b. La liste (1, 3, 6, 11) est-elle une décomposition possible ? Pourquoi ?

c. Déterminer le nombre maximum de rectangles que peut compter une décomposition possible du damier.

2. Considérons un damier de dimensions 6 cases en largeur et 6 cases en longueur.

Déterminer toutes les décompositions possibles ayant le nombre maximum de rectangles.

3. Peut-on trouver une décomposition possible en 2011 rectangles pour un damier de dimensions 2010 cases sur 2011 cases ?

17. Nice

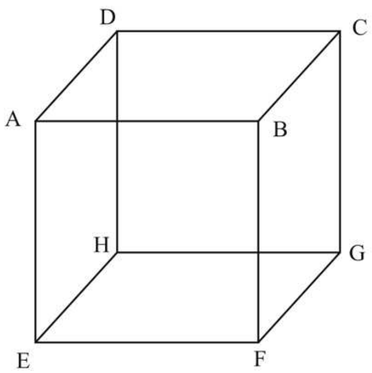
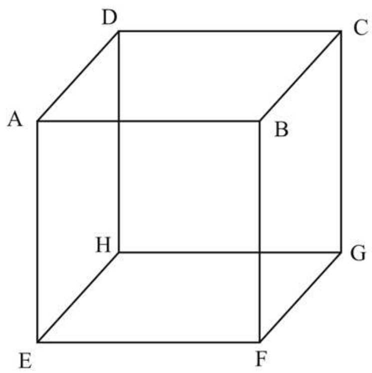
http://www.ac-nice.fr/maths/

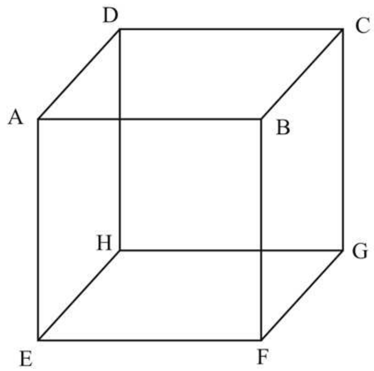
17-a : Lieux de points

Toutes séries

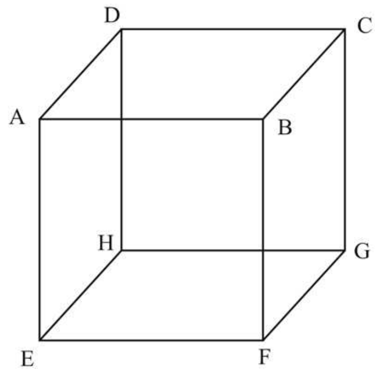
ABCDEFGH est un cube. On s'intéresse dans cette série de questions au lieu des points I, milieux de M et M' quand M et M' se déplacent sur des zones distinctes.

Pour chacun des exercices proposés, aucune justification n'est demandée, juste le dessin du lieu sur le cube représenté et la description de ce lieu (par exemple, c'est un carré centré sur…, c'est un cube dont le côté mesure…).

Question 1 : Le point M est confondu avec A, le point M' est sur la face EFGH. Quel est le lieu des points I, milieux du segment [MM'] ?  Description :	Question 2 : Le point M est sur le segment [AE], le point M' est sur le segment [HG]. Quel est le lieu des points I, milieux du segment [MM'] ?  Description :
Question 3 : Le point M est sur la face BCGF, le point M' est sur la face EFGH. Quel est le lieu des points I, milieux du segment [MM'] ?	Question 4 : Le point M est sur le bord de la face ABCD, le point M' est sur le bord de la face EFGH. Quel est le lieu des points I, milieux du segment [MM'] ?



Description :



Description :

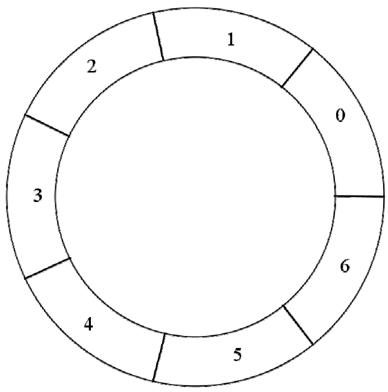
17-b : La marelle

Série S

Question préliminaire : soit p et q entiers naturels non nuls, avec $p < q$, montrer que $q - p$ et $q + p$ sont de même parité.

On admettra que pour tout entier n non nul, $1+2+3+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Une marelle circulaire est formée de 7 cases numérotées de 0 à 6 (voir la figure ci-dessous).



Etape n°1 : Un enfant part de case n°0, avance d'une case, arrive sur la case n°1 et la marque d'une croix,

Etape n°2 : il avance de 2 cases, il arrive alors sur la case n°3 et la marque d'une croix,

Etape n° 3 : il continue en avançant de 3 cases, arrive sur la case n°6 et la marque d'une croix,

Etape n°N : il continue ainsi de tourner en ajoutant une case au nombre de cases de son déplacement précédent et en marquant la case atteinte.

Il décide de s'arrêter quand toutes les cases sont marquées **d'au moins** une croix.

La question est : s'arrêtera-t-il ?

a. Sur quelle case se trouve-t-il au bout de 10 étapes ?

b. au bout de 100 étapes ?

c. Pouvez-vous dire s'il peut s'arrêter en ayant marqué toutes les cases de la marelle ?

2. Il recommence avec une marelle à 8 cases numérotées de 0 à 7, s'arrêtera-t-il ?

3. Il tente avec une marelle à 9 cases, qu'en pensez-vous ?

4. On suppose que la marelle a N cases numérotées de 0 à N – 1.

a. Quelle case est atteinte à la 2N – 1 étape ? Que se passe –t-il après la (2N–1)-ième étape ?

b. Montrer que si la marelle a N cases avec N impair, il ne s'arrêtera pas.

5. Soit p et q deux entiers avec $0 < p < q$, on appelle a_p la p-ième case atteinte à l'étape p et a_q la q-ième case atteinte à l'étape q.

a. Dans quels cas a-t-on $a_p = a_q$?

b. Combien d'étapes sont nécessaires pour aller de a_p à a_q ?

6. Montrer que si $N = 2^k$ avec k entier non nul, et si p et q sont strictement inférieurs à N, on a $a_p \neq 0$ et $a_p \neq a_q$ et que l'enfant s'arrêtera.

7. Montrer que dans tous les autres cas, l'enfant ne pourra pas s'arrêter en ayant marqué toutes les cases d'une croix.

17-c : Time is money !

Séries autres que S

Dans un pays imaginaire, la monnaie est le liard et il n'y a que des pièces de 3, de 5 et de 7 liards.

Absalon veut y faire des achats. Il a une bourse bien garnie, pleine de pièces de 3, de 5 et 7 liards.

Dans cette première partie, on suppose qu'Absalon va chez un commerçant qui n'a pas un liard en caisse et qu'il ne peut pas lui rendre la monnaie.

Absalon doit donc donner la somme exacte en pièces de 3, de 5 et de 7 liards.

1. Trouvez toutes les manières possibles de payer exactement 34 liards avec ses pièces.

2. Trouvez toutes les sommes qu'il est possible de payer avec cette même contrainte

3. Ainsi que toutes celles qui sont impossibles à réaliser avec de telles pièces.

Dans cette seconde partie, Absalon va chez un commerçant qui peut lui rendre la monnaie (lui aussi a autant de pièces que nécessaire et toujours uniquement avec des pièces de 3, de 5 et de 7 liards).

4. Donner trois manières différentes de payer 1 liard.

5. Donner la manière de régler 2010 liards avec un nombre minimal de pièces.

18. Orléans Tours

http://maths.tice.ac-orleans-tours.fr/php5/spip.php?rubrique40

18-a : Des points à l'intérieur d'un triangle

ABC est un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur $8\sqrt{3}$ cm.

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Le point H est le pied de la hauteur issue du point A.

Pour tout point M intérieur au triangle ABC, on considère les points P, Q et R définis comme suit :

* la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [BC] coupe ce segment en P ;
* la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [CA] coupe ce segment en Q ;
* la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [AB] coupe ce segment en R.

Partie I. Une longueur remarquable

1. Calculer la longueur AH.

2. Démontrer que MP + MQ + MR = AH.

Pour cela, on pourra considérer les aires des triangles AMB, BMC et CMA.

Partie II. Un problème d'aire

À tout point M intérieur au triangle ABC, on associe un triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de nombres appelés « coor-données triangulaires du point M » et définis de la manière suivante :

$$x = \text{MP},\ y = \text{MQ},\ z = \text{MR},$$

où MP, MQ et MR représentent les mesures, exprimées en cm, des longueurs respectives des segments [MP], [MQ] et [MR].

On s'intéresse aux points M dont les trois « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC.

1. Démontrer que le point G, centre de gravité du triangle ABC, vérifie les deux conditions précédentes.

2. Dans cette question, M est un point quelconque intérieur au triangle ABC.

Calculer l'aire du quadrilatère ARMQ en fonction des coordonnées triangulaires x, y et z du point M.

Démontrer alors que cette aire est donnée par $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2+4yz+z^2\right)$.

3. Existe-t-il des points M, intérieurs au triangle ABC, autres que le point G, dont les « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC ?

Solution

A. 1. La hauteur d'un triangle équilatéral est

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\text{côté}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8\sqrt{3}=12$.

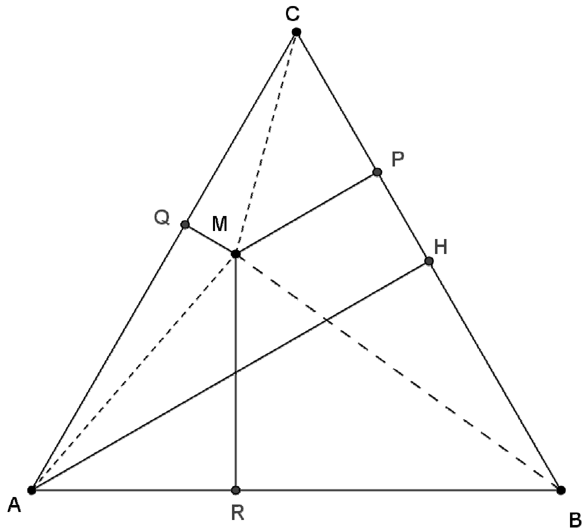
2. La somme des aires des trois triangles vaut l'aire du triangle :

$\frac{1}{2}\text{MR}\times\text{AB}+\frac{1}{2}\text{MP}\times\text{BC}+\frac{1}{2}\text{MQ}\times\text{AC}=\frac{1}{2}\text{BC}\times\text{AH}$

d'où en simplifiant par AB=BC=AC le résultat.

B. 1. Pour G, MR=MP=MQ donc $\text{MR}=\frac{1}{3}\text{AH}=4$ et G(4 ; 4 ; 4). De plus l'aire de ARMQ est bien 1/3 de l'aire du triangle.

2. aire(ARMQ)=aire(ARM)+aire(AMQ), soit



18-b : Des entiers consécutifs

Les entiers 3, 4 et 5 sont dits consécutifs car 4 = 3 + 1 et 5 = 4 + 1, autrement dit, on passe de l'un à l'autre en ajoutant 1.

1. On remarque que : $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Existe-t-il trois autres entiers positifs consécutifs tels que la somme des carrés des deux premiers soit égale au carré du troisième ?

2. a. Trouver quatre entiers positifs consécutifs tels que la somme des cubes des trois premiers soit égale au cube du quatrième.

b. Le problème a-t-il d'autres solutions ? Pour répondre à cette question, on pourra s'aider de l'étude de la fonction f définie par $f(x)=x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3$.

3. On se propose de démontrer que l'on ne peut pas trouver cinq entiers positifs consécutifs a, b, c, d et e tels que : $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$.

a. On suppose que a est un entier impair. En recourant à des propriétés de parité, montrer que l'on ne peut pas avoir l'égalité

$$a^4 + (a + 1)^4 + (a + 2)^4 + (a + 3)^4 = (a + 4)^4.$$

b. On suppose que a est un entier pair. Démontrer que, dans ce cas également, on ne peut pas avoir l'égalité $a^4 + (a + 1)^4 + (a + 2)^4 + (a + 3)^4 = (a + 4)^4$.

Pour cela, on pourra s'intéresser au chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier a.

19. Paris

http://www.ac-paris.fr/portail/jcms/d_5402/disciplines-maths-portail

19-a : Une fonction

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 1) - 2(x + 2) + 3(x + 3) - 4(x + 4)+\ldots+ 2009(x + 2009) - 2010(x + 2010)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

2. Montrer que, pour tout entier relatif impair k, $f(k)$ est un entier multiple de 2010.

Existe-t-il un entier k pour lequel $f(k) = 2010$?

19-b : Octogone

Un octogone convexe $A_1 A_2 A_3 \ldots A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul.

$A_1 A_3 A_5 A_7$ est un carré d'aire égale à 5 ; $A_2 A_4 A_6 A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4.

Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

20. Poitiers

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?rubrique26

20-a : La Fiac

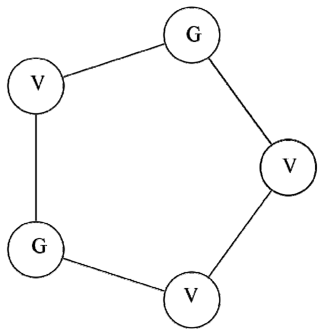
La Foire Internationale de l'Automate Cellulaire se compose de plusieurs bâtiments polygonaux. À chaque sommet de ces polygones, il y a un poste de garde. Chaque soir un poste de garde peut être occupé, ou non, par un gardien. La première nuit, le Directeur de la FIAC décide quels postes vont être occupés. Puis la répartition des gardiens se fait ainsi :

- Si lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient tous deux vacants, ou tous deux occupés, alors ce poste sera occupé lors de la nuit suivante $n + 1$.

- Si, au contraire, lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient l'un occupé et l'autre non, alors ce poste ne sera pas occupé lors de la nuit $n + 1$.

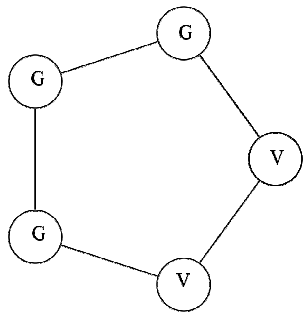
Exemple : Le bâtiment A est un pentagone. On convient de noter G les postes occupés par un gardien et V les postes vacants.

Le directeur décide de la position suivante :



Nuit 1

La nuit suivante on obtient la configuration :



Nuit 2

1. Déterminer les configurations obtenues dans le bâtiment A pour les nuits 3, 4, 5 et pour la nuit 10.

2. Dans le bâtiment B qui compte 2010 sommets, le directeur place un seul gardien pour la nuit 1 (les 2009 autres postes étant donc vacants). Combien seront-ils pour la nuit 8 ? pour la nuit 99 ?

3. Dans le bâtiment C, superbe octogone (huit sommets), le directeur constate avec affolement lors de la nuit 3 qu'il n'y a plus aucun gardien ! Combien en avait-il pourtant postés lors de la nuit 1 ?

4. Le bâtiment D est un heptagone (sept sommets). Le directeur a choisi une disposition des gardes pour la nuit 1. Lors de la nuit 2, les gardes du bâtiment D sont-ils en nombre pair ?

5. Dans le bâtiment E (neuf sommets), le directeur constate après une semaine que la disposition lors de la nuit 8 est rigoureusement identique à celle choisie lors de la nuit 1, et que l'un des postes de garde n'a jamais été occupé durant cette période. Combien de gardiens le directeur avait-il postés lors de la nuit 1 ?

20-b : Des suites de Fibonacci

A traiter par les candidats de la série S

Les dix nombres 1-1-2-3-5-8-13-21-34-55 sont le début de la célèbre suite de Fibonacci, associée à la reproduction des lapins, dont chaque terme s'obtient à partir du troisième en ajoutant les deux termes qui le précédent.

On nomme aussi suite de Fibonacci toute succession de termes dont les deux premiers sont choisis arbitrairement, et dont les suivants sont calculés sur le principe que le terme numéro $(n + 2)$ est égal à la somme des deux termes précédents : ceux de numéros $(n + 1)$ et n, ceci pour tout n entier strictement positif.

1. Continuez à écrire les termes de la célèbre suite de Fibonacci qui suivent les dix premiers donnés, et arrêtez-vous dès que vous dépassez 2010.

2. a. Dans une autre suite de Fibonacci les deux premiers termes ont pour valeurs a et b dans cet ordre. Écrire les termes suivants de cette suite, en fonction de a et b, du numéro 3 jusqu'au numéro 10.

b. Calculez en fonction de a et b la somme des dix premiers termes.

c. Comparez cette somme et la valeur du septième terme.

d. Vous observez les 10 premiers termes d'une suite de Fibonacci, vous vous rappelez juste que le quatrième à partir de la fin vaut 123, pouvez-vous donner la somme des 10 termes ?

3. a. Vous participez à un jeu de marelle constituée de 10 cases numérotées de 1 à 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Il s'agit à partir de la case 1 de sauter jusqu'à la case 10. Vous avez le droit de sauter d'une case à la suivante, ou bien de sauter par dessus une case pour se trouver une case plus loin.

Combien y a-t-il de possibilités différentes d'arriver sur la case 10 ?

b. On dispose d'autant de cubes de même taille rouges ou bleus qu'on veut. On bâtit des tours de base un cube et de 10 étages de haut, en respectant la condition qu'il n'y ait jamais deux étages rouges successifs. Combien peut-on faire de tours colorées différentes ?

4. Tout entier qui ne figure pas dans la célèbre suite de Fibonacci peut être décomposé en somme de plusieurs termes distincts de cette suite, même si on oblige que deux de ces nombres ne doivent pas être consécutifs dans la suite d'origine.

a. Vérifiez cela par écrit pour tous les nombres concernés inférieurs à 34 et vérifiez aussi qu'avec toutes les contraintes la décomposition est unique (c'est à dire se fait d'une seule façon).

b. Ecrivez maintenant la décomposition du nombre 2010 en somme de termes de la célèbre suite de Fibonacci.

c. Dans la décomposition de chaque nombre il y a une plus petite composante (le plus petit nombre utilisé). Considérez les plus petites composantes possibles rencontrées dans les décompositions des nombres inférieurs à 34, rangez-les en ordre croissant. Pour chaque plus petite composante, choisir le nombre le plus petit inférieur à 34 qui l'utilise, et écrire la liste en ordre croissant des nombres obtenus : que remarquez-vous ?

5. Le tableau ci-dessous est un carré magique : la somme de chaque ligne, de chaque colonne, de chaque grande diagonale est le même nombre : 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

a. Construisez le tableau de 9 cases qu'on obtient en remplaçant chaque nombre actuel par la valeur du terme ayant ce numéro dans la célèbre suite de Fibonacci.

Calculez les produits des trois nombres de chaque ligne, de chaque colonne.

Calculez la somme des produits obtenus sur chaque ligne et comparez-la avec la somme des produits obtenus sur chaque colonne.

b. Pour comprendre ce que vous venez de remarquer sur l'exemple chiffré, reprenez les questions du 5. a. avec les neuf termes littéraux d'une suite de Fibonnaci qui commence par a, b, … et concluez.

20-c : À bicyclette (c)

Les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG, ST2S ont le choix de traiter l'exercice 4 de la série S ou bien l'exercice suivant.

Parti à 9 h ce matin, Yves a décidé de faire à vélo l'aller et retour jusqu'au sommet du rocher de la Vierge. Sur la première partie du trajet la montée est légère et il a pu rouler à 18 km/h.

Sur la seconde partie, la pente s'accentue et sa vitesse est tombée à 15 km/h.

Le point de vue atteint, il a contemplé le superbe paysage pendant un quart d'heure puis a fait demi-tour.

Il est redescendu à 30 km/h tout d'abord puis a terminé à 22,5 km/h sur la partie la moins inclinée du parcours. Sa randonnée s'est achevée à 11 h 30 min.

1. Quelle distance au total Yves a-t-il donc parcouru ce matin ?

2. Dans quel créneau horaire a-t-il pu atteindre le sommet ? Donner une interprétation graphique de votre réponse.

Solution

1. On se rappelle que $d = vt$.

La durée totale du trajet est 2,5 h dont on enlève 0,25 h pour l'arrêt, soit 2,25 h. Il a parcouru d_1, la première partie du trajet, une fois à 18 km/h, $t_1=\frac{d_1}{18}$, l'autre fois à 22,5 km/h $t'_1=\frac{d_1}{22,5}$; pareil pour l'autre partie de longueur d_2 : $t_2=\frac{d_2}{15}$ et $t'_2=\frac{d_2}{30}$; on a donc $t_1+t'_1+t_2+t'_2=\frac{d_1}{18}+\frac{d_1}{22,5}+\frac{d_2}{15}+\frac{d_2}{30}=2,25$, soit

$d_1\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{22,5}\right)+d_2\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{30}\right)=2,25$. C'est gênant car on a deux inconnues… et une seule équation, il doit y avoir une astuce…

Regardons $\frac{d_1}{18}+\frac{d_1}{22,5}+\frac{d_2}{15}+\frac{d_2}{30}=\frac{d_1}{18}+\frac{2d_1}{45}+\frac{d_2}{15}+\frac{d_2}{30}=\frac{4,5d_1}{45}+\frac{4,5d_2}{45}=\frac{1}{10}(d_1+d_2)$, ouf ! et donc $d_1+d_2=22,5$; il a parcouru $2\times 22,5=45$ km.

2. Supposons que la partie d_2 soit nulle, il aurait fait 22,5 km à 18 km/h, soit 1,25 h, c'est le temps minimum… Si c'est la partie d_1 qui est nulle, il mettrait 22,5/15=1,5 h, c'est le temps maxi ! Il a atteint le sommet forcément entre 10 h 15 et 10 h 30… C'est beau la science.

21. Reims

http://www.ac-reims.fr/editice/index.php?option=com_k2&view=item&layout=item&id=507&Itemid=602

21-a : Passe-temps pour un portable…(autre que S)

Paloma joue avec la fonction calculatrice de son téléphone portable.

Elle a remarqué qu'en effectuant des divisions, elle obtient en général des résultats avec des groupes de chiffres qui se répètent.

1. Elle effectue la division de 4 par 9, puis de 4 par 99 et de 4 par 999. Elle remarque des particularités et tape une division qui lui donne pour résultat 0,000300030003…

Quelle division a-t-elle pu effectuer ?

2. Tandis qu'elle essaye des divisions à trois chiffres, elle obtient le résultat 0,437437437..., mais, interrompue par un coup de fil, elle ne souvient plus de la division qu'elle a effectuée.

Quels sont les deux nombres qu'elle avait tapés ?

3. En essayant ensuite avec des divisions de quatre chiffres par trois chiffres elle tombe sur 3,023232323... et est de nouveau interrompue par un coup de fil. Quelle division avait-elle effectué cette fois-ci ?

4. En généralisant, peut-on dire que tout nombre ayant une écriture décimale périodique à partir d'un certain rang est un nombre rationnel ? *(Rappel : On appelle nombre rationnel, un nombre qui peut s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers.)*

5. On souhaite étudier la réciproque de l'affirmation précédente : justifier soigneusement que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est périodique.

21-b : Point de rencontre (série S)

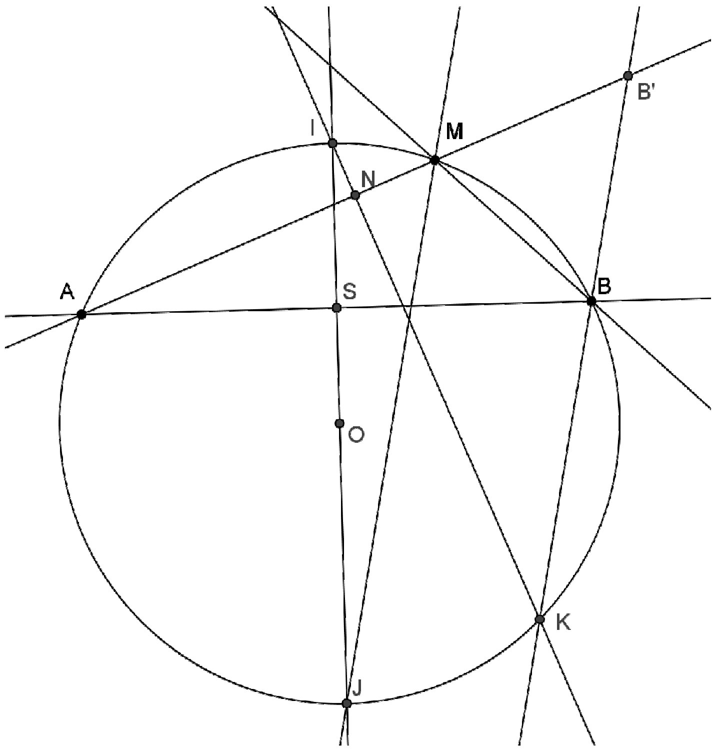
Deux amis parcourent en sens inverse le bord d'un champ triangulaire ABM. Ils partent du milieu S de [AB] et marchent à la même vitesse. Le côté AM étant plus long que le côté MB, ils se croisent en un point de AM.

Ils voudraient déterminer la position de ce point en utilisant leur boussole (qui leur permet de repérer une direction, et de mesurer l'angle entre deux directions).

Ils décident de recourir à un moteur de recherche sur Internet en utilisant les mots clés suivants : triangle, milieu, côté, partage, périmètre, parallèle.

1. Expliquer ce choix des mots clés.

Ils obtiennent la figure suivante, dans laquelle I est le milieu d'un arc $\overset{\frown}{AB}$, partie d'un cercle de centre O, et M un point de cet arc avec $\overset{\frown}{AM}>\overset{\frown}{MB}$. S est le milieu de la corde [AB] et N le pied de la perpendiculaire à (AM) issue de I. Cette perpendiculaire recoupe le cercle en K et la droite (KB) coupe la droite (AM) en B'.



Il est affirmé que :

a. (MJ) est bissectrice de $\widehat{AMB}$.

b. JK = MB et (MJ) est parallèle à (KB).

c. JMB'K est un parallélogramme et MB = MB'.

d. Le triangle AB'K est isocèle et N est le milieu du segment [AB'].

e. Les droites (SN) et (MJ) sont parallèles.

2. Expliquer comment ce résultat fournit aux deux amis la solution à leur problème.

3. N'accordant qu'une confiance limitée à la réponse obtenue sur Internet, ils décident de démontrer les affirmations précédentes. Faites de même…

21-c : Un quadrilatère particulier (tous)

On considère un quadrilatère formé de deux triangles rectangles, comme sur la figure ci-contre.

La longueur a de deux des côtés est un nombre entier.

On voudrait savoir comment choisir a pour que la longueur b soit aussi un entier.

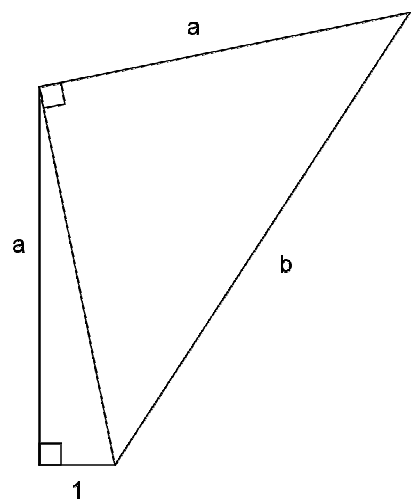
1. Donner l'équation (E) vérifiée par a et b.

2. Quels sont les couples (a, b) d'entiers strictement positifs solutions de (E) pour a compris entre 1 et 12 ?

3. On suppose que (a_0, b_0) est une solution de (E) et on se demande s'il est possible d'en construire une « plus grande », c'est à dire une solution (a, b), avec $a > a_0$ et $b > b_0$.

a. Montrer que si (a, b) est une solution de (E), alors nécessairement b est impair et a est pair.

b. On peut donc chercher une solution sous la forme $a = a_0 + 2p$, $b = b_0 + 2q$, où p et q sont des entiers strictement positifs.



Trouver en fonction de a_0 et b_0 un couple (p, q) tel que (a_0+2p, b_0+2q) soit une solution.

c. Peut-on trouver des valeurs de a comprises entre 350 et 750 pour lesquelles le nombre b correspondant soit entier ?

22. Rennes

http://espaceeducatif.ac-rennes.fr/jahia/Jahia/lang/fr/pid/16941

22-a : Jack et le haricot magique (c)

Pour tous les candidats

Jack a planté un haricot magique, qui mesure déjà dix mètres de haut lorsqu'il décide de l'escalader. Jack est un lilliputien, qui n'est capable de grimper que d'un mètre par jour : il voudrait parvenir tout en haut de ce haricot magique mais, chaque nuit, pendant que Jack dort sur une feuille, le haricot pousse et sa tige s'allonge **uniformément** de 3 m. Pendant son sommeil, Jack s'éloigne ainsi à la fois du sol et du sommet de la plante !

L'objectif de cet exercice est de déterminer si Jack pourra atteindre son but.

1. Justifier que, au coucher du $2^{\text{ème}}$ jour, il lui reste 10,70 m à escalader.

2. Compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées au centième :

Jour	Hauteur du haricot	Hauteur restant à escalader au réveil	Hauteur restant à escalader au coucher
1	10	10	9
2	13	11,70	10,70
3			
4			

3. Jack atteindra-t-il le sommet du haricot magique ? Si oui, quel jour ? Pour répondre à cette question, on pourra utiliser la calculatrice après avoir précisé les relations existant entre les différentes grandeurs en jeu dans le tableau précédent.

<u>Solution</u>

1. Au début du $2^{\text{ème}}$ jour le haricot mesure 13 m, Jack a monté 1 m la veille, cette hauteur s'est allongée de 3/10 = 0,3 m, Jack est alors à la hauteur 1,3, il lui reste 13 – 1,3 = 11,70 m à escalader ; il grimpe alors d'1 m, ce qui fait bien 10,7 m.

2. Voici ce qu'on peut rentrer dans le tableur et recopier vers le bas :

A Jour	B Hauteur du haricot	C Coefficient d'allongement	D Hauteur restant à escalader au réveil	D Hauteur restant à escalader au coucher
1	10	=1+3/B1	10	=D1–1
=A1+1	=B1+3	=1+3/B2	=C1*D1	=D2–1
55	172	1,0174419	0,37	-0,63
56	175	1,0171429	-0,64	-1,64

3. Jack atteint donc le sommet du haricot magique le $55^{\text{ème}}$ jour.

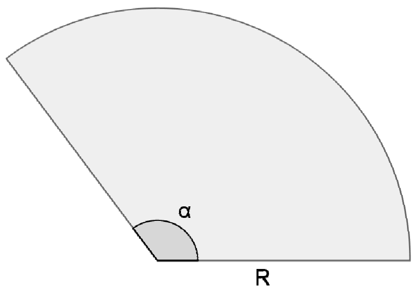
22-b : Les écailles de poisson (c)

Série S uniquement. Les considérations géométriques sous-jacentes aux calculs réalisés devront être justifiées.

Questions préliminaires

1. Exprimer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur de son côté.

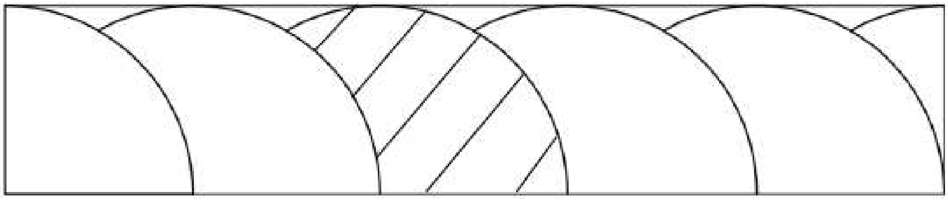
2. Exprimer l'aire d'un secteur circulaire (figure ci-contre) en fonction de son rayon *R* et de l'angle au centre α.



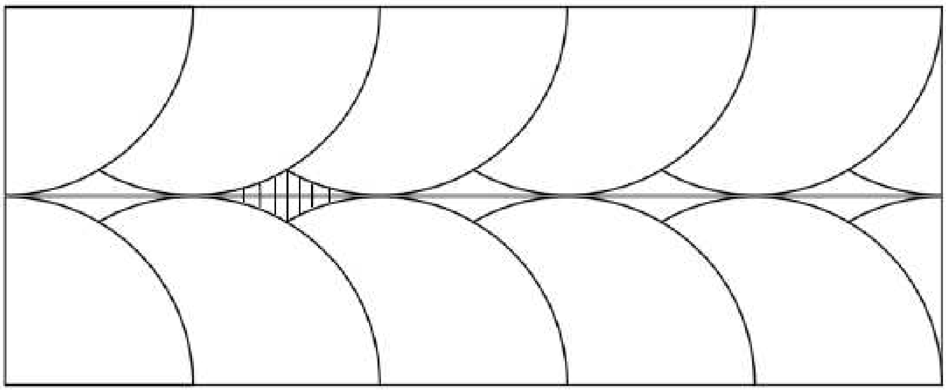
Problème

Sur le dos du poisson mâle « *piscis geometricus* », les écailles sont des cercles de même rayon R, disposés les uns au-dessus des autres.

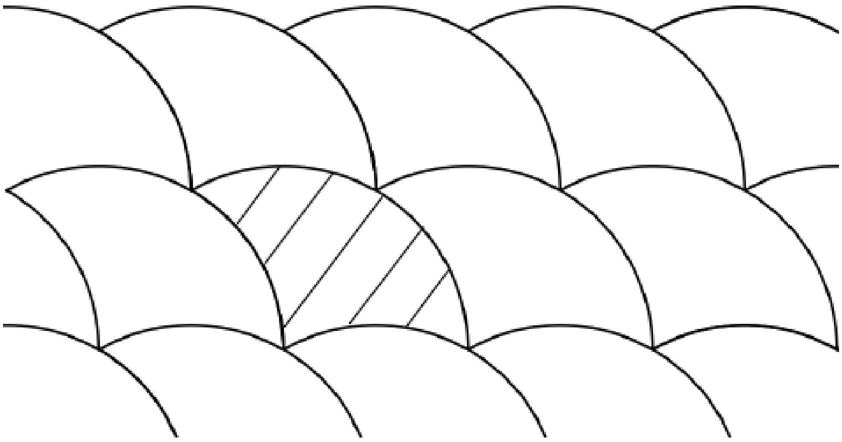
1. On a relevé sur le poisson la configuration d'écailles reproduite sur la figure ci-dessous : les centres des cercles sont alignés et espacés d'une distance égale à R. Déterminer la surface apparente d'une écaille hachurée.



2. Sur le dos du poisson, des écailles situées de part et d'autre de l'arête dorsale laissent apparaître des écailles dorsales en forme de « losanges curvilignes ». Déterminer la surface d'une écaille dorsale représentée sur la figure ci-dessous.

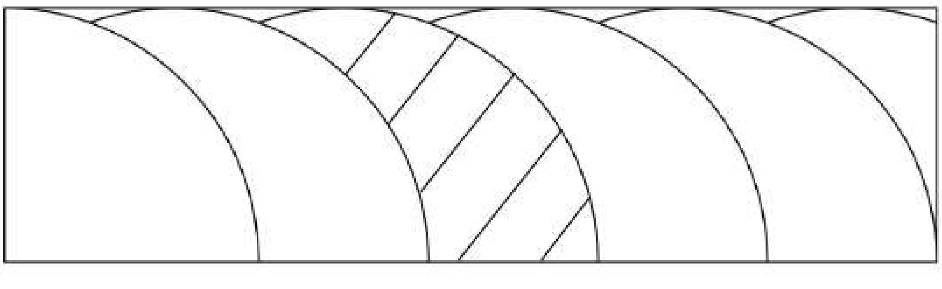


3. Sur les flancs du poisson les écailles sont des cercles de même rayon R, dont les centres sont équidistants les uns des autres, formant un réseau de triangles équilatéraux de côté R. Sur toute la surface de la peau du poisson, les écailles se chevauchent comme indiqué sur la figure suivante. Déterminer la surface apparente d'une écaille.



4. Sur le poisson femelle « *piscis geometricus femina* », les écailles sont plus resserrées.

La configuration d'écailles reproduite sur la figure ci-dessous montre les cercles de rayon R, dont les centres sont alignés et espacés les uns des autres d'une distance égale à 2R/3. Déterminer la surface apparente d'une écaille.



<u>Solution</u>

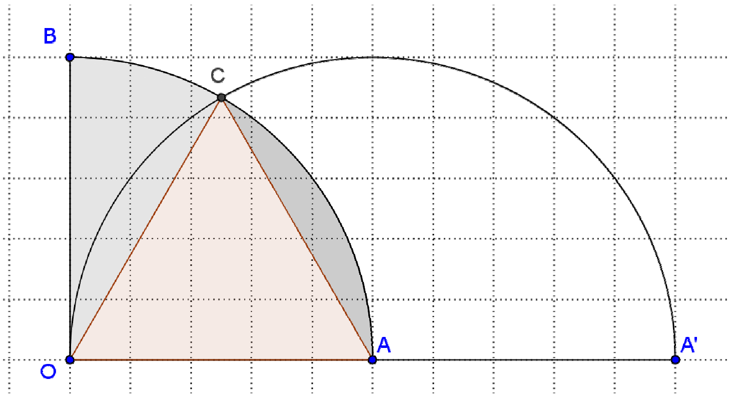
Questions préliminaires

1. L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{1}{2}\times\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

2. L'aire d'un secteur circulaire de rayon R d'angle au centre α (en radians) est $\frac{1}{2}\alpha R^2$.

Problème

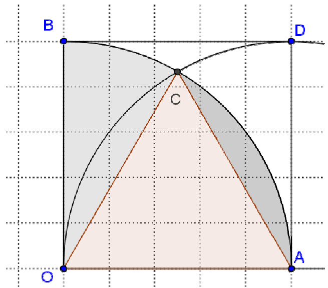
1. Le secteur angulaire $\widehat{OBC}$ a pour aire $\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}a^2$, le triangle OAC a pour aire $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, le petit arc $\widehat{AC}$ a pour aire $\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Bref, l'aire cherchée est $\frac{1}{2}\pi a^2-2\left(\frac{\pi}{6}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$.

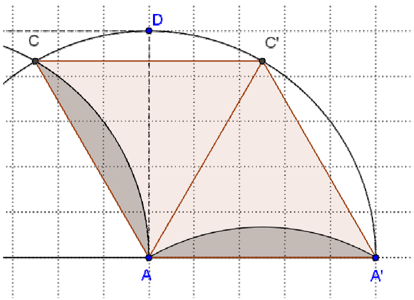


2. L'aire d'une demi-« sous-écaille » est l'aire du carré $OADB$ moins deux fois le secteur angulaire $\widehat{OBC}$ moins le triangle OAC, soit

$$a^2-2\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}a^2\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2,$$

et l'aire complète, deux fois ça.

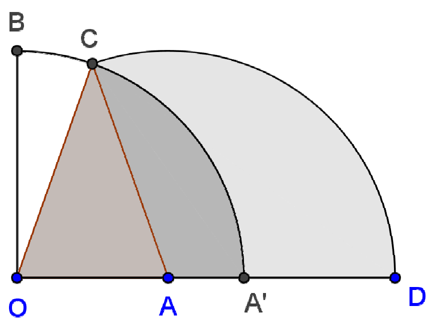




3. Les deux petits arcs gris on la même aire que les deux petits arcs $\widehat{ACC'}$ et $\widehat{AA'C}$, l'aire cherchée est celle des deux triangles équilatéraux, soit $2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

4. Aire partie sombre $AA'C$= aire $\widehat{OA'C}$ –aire triangle OAC.

Aire cherchée = aire $\widehat{ADC}$ – aire $AA'C$.



Al –Kashi : $\cos\left(\widehat{OCA}\right)=\dfrac{\frac{4}{9}a^2-a^2-a^2}{-2\times a\times a}=\frac{7}{9}$,

soit $\frac{1}{2}\widehat{OCA}\approx 0{,}34$ rad et $\widehat{DAC}\approx\pi-\left(\frac{\pi}{2}-0{,}34\right)\approx 1{,}91$ d'où

$\text{aire}(OAC)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a\right)\left(a\sin(0{,}34)\right)=\frac{0{,}33a^2}{6}$;

Aire cherchée = $\frac{1}{2}1{,}91a^2-\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}a^2-\frac{0{,}33}{6}a^2\right)=0{,}66a^2$.

22-c : La régate (c)

Séries autres que S

Partie 1 Six jeunes champions ont concouru à une régate de planche à voile : Arthur, Béatrice, Caroline, Diego, Erwan et Fabrice. Un journaliste sportif a rapporté les informations suivantes :

* Arthur, qui était arrivé troisième l'an dernier, a amélioré son classement.
* Béatrice n'est arrivée ni deuxième, ni troisième.
* Diego n'est pas arrivé dernier.
* Erwan est arrivé dans les quatre premiers.
* Fabrice a précédé Caroline de trois places.
* Le véliplanchiste arrivé en quatrième position n'est ni Béatrice, ni Arthur.
* Arthur, qui était parti en tête, a été ralenti par un sac en plastique qui s'est accroché à la dérive de sa planche à voile. Mais, tout comme Fabrice et Béatrice, il est arrivé avant Caroline et Diego.

Quel est le classement de cette régate ? (Il n'y a pas d'ex æquo).

Partie 2

Les informations du journaliste ont été mal retranscrites à l'impression. La dernière information n'est pas passée, et voici ce qu'ont appris les lecteurs du journal :

* Arthur, qui était arrivé troisième l'an dernier, a amélioré son classement.
* Béatrice n'est arrivée ni deuxième, ni troisième.
* Diego n'est pas arrivé dernier.
* Erwan est arrivé dans les quatre premiers.
* Fabrice a battu Caroline de trois places.
* Le véliplanchiste arrivé en quatrième position n'est ni Béatrice, ni Arthur.

Les lecteurs ne sont pas tous d'accord quant au classement de la course… Combien y a-t-il de possibilités de classement, au regard de ces seules informations ? Quels sont les classements possibles ?

Solution

Partie 1

Faisons un tableau et barrons toutes les cases interdites (la lettre indique l'information utilisée) :

	Arthur	Béatrice	Caroline	Diego	Erwan	Fabrice
1		**1**	**e**	**f**		
2	**2**	**b**	**e**	**f**		
3	**a**	**b**	**e**	**f**		**3**
4	**a**	**f**			**4**	**e**
5	**a**	**f**		**5**	**d**	**e**
6	**a**	**f**	**6**	**c**	**d**	**e**

Il est obligatoire que Béatrice gagne, d'où le classement ci dessus.

Partie 2

Refaisons un tableau et barrons toutes les cases interdites :

	Arthur	Béatrice	Caroline	Diego	Erwan	Fabrice
1		**?**	**e**			
2		**b**	**e**			
3	**a**	**b**	**e**			
4	**a**	**f**				**e**
5	**a**				**d**	**e**
6	**a**			**c**	**d**	**e**

Si Béatrice gagne c'est comme avant.

Sinon on a les possibilités suivantes (on place dans l'ordre A, B, C, F puis D et E), soit au total 11 classements possibles (je ne suis pas d'accord avec le corrigé officiel).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	F	D	E	B	C
A	F	E	D	B	C

A	D	F	E	B	C
A	E	F	D	B	C
A	F	E/D	C	B	D/E
A	E/D	F	C	B	D/E
A	F	D	E	C	B
A	F	E	D	C	B
A	D	F	E	C	B
A	E	F	D	C	B
A	F	D	C	E	B
A	E	F	C	D	B
F	A	E	C	D	B

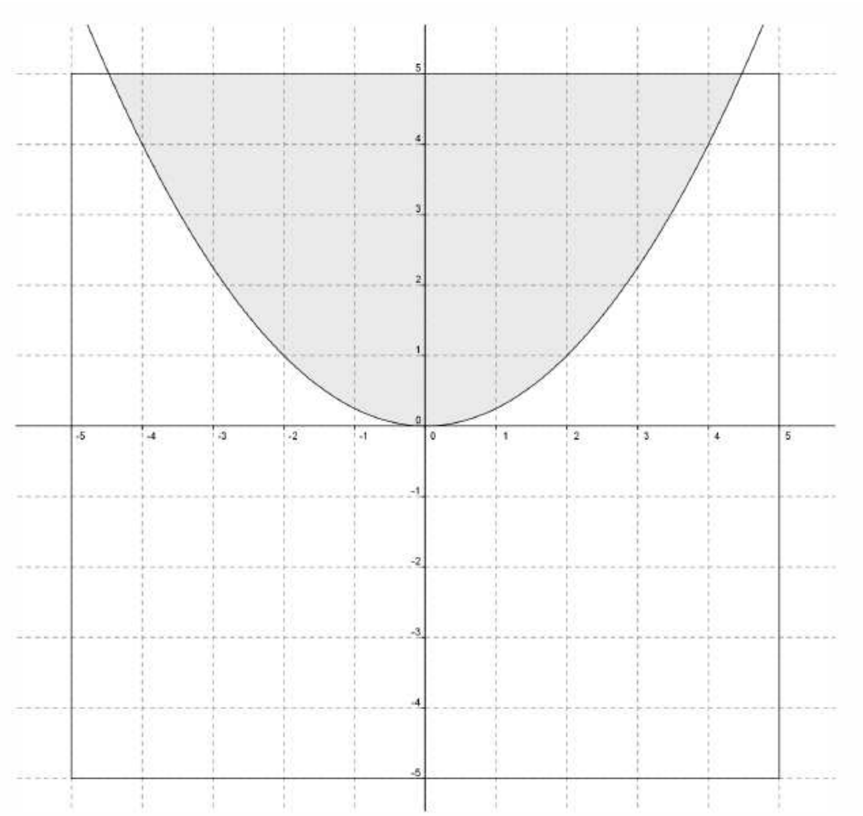
23. Rouen

http://maths.spip.ac-rouen.fr/spip.php?rubrique86

23-a : Lancers et plantations (S)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, de la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, pour tout x réel.

La lecture d'informations sur ce graphique pourra être utile dans la suite de ce problème.



Soit (E) l'équation $x^2+bx+c=0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes si, et seulement si, $c<\frac{1}{4}b^2$.

Décrire, dans ce cas, la position du point M de coordonnées $(b\ ;c)$ par rapport à la courbe de la fonction f tracée dans le repère ci-dessus.

2. Dans une urne contenant 11 boules indiscernables au toucher, numérotées de –5 à +5, on tire au hasard une boule dont on note le numéro que l'on remet dans l'urne puis on tire une seconde boule dont on note également le numéro.

b prend comme valeur le numéro porté par la première boule et c prend comme valeur celle de la deuxième boule de façon à constituer les coefficients de l'équation (E).

Soit A l'événement « l'équation (E) possède deux solutions distinctes » et B l'événement « l'équation (E) possède une unique solution ».

Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, $P(A)$ et $P(B)$.

3. On suppose désormais que les coefficients b et c de l'équation (E) sont des nombres réels obtenus aléatoirement dans l'intervalle $[-5 ; +5]$.

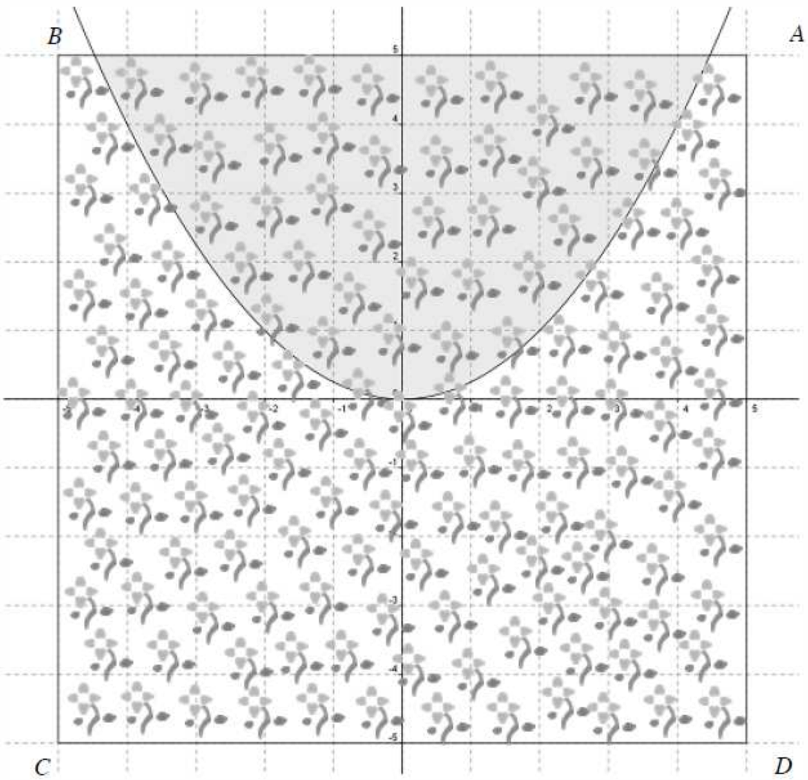
a. Encadrer l'aire du domaine colorié sur le repère ci-dessus entre deux entiers.

On considèrera dans la suite comme valeur approchée de cette aire la moyenne de ces deux entiers.

b. Évaluer $P(A)$ et $P(B)$ dans le cadre de cette expérience.

c. Un jardinier a décoré de fleurs un terrain de forme carrée (comme $ABCD$ ci-dessous) contenant une partie parabolique correspondant à la partie colorée de la figure ci-dessus.

Il a planté des centaines de fleurs uniformément sur ce terrain carré. Donner un moyen au jardinier de retrouver l'aire de la surface colorée.



23-b : Cartes de Janus (S)

Dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre couleurs : trèfle, carreau, coeur et pique. Ces couleurs vont par deux : on dit que

- coeur et pique se ressemblent ;
- carreau et trèfle se ressemblent ;
- carreau et pique sont complémentaires ;
- coeur et trèfle sont complémentaires.

Dans chacune de ces couleurs, il y a 8 hauteurs de carte, qui sont dans l'ordre croissant 7, 8, 9, 10, V, D, R, A(A signifie as).

Les hauteurs complémentaires sont

- la première et la dernière
- la deuxième et l'avant dernière
- etc.

On décide de fabriquer un nouveau jeu de 32 cartes, toutes différentes, en collant dos à dos, deux jeux de 32 cartes des deux façons suivantes :

• La première façon est de coller deux cartes de même hauteur avec des couleurs qui se ressemblent (mais pas identiques), on appelle ces cartes ci les cartes parallèles. Par exemple, une face 7♥et une face 7♠. On note cette carte 7♥/7♠.

• La deuxième façon est de coller deux cartes de hauteurs complémentaires avec des couleurs complémentaires, on appelle ces cartes là les cartes complémentaires. Par exemple, une face 7♥et une face A♣. On note cette carte 7♥/A♣.

Le jeu de cartes ainsi fabriqué s'appelle le jeu de Janus, il a été inventé en 1988 par Roland Yéléhada.

1. Enumérer toutes les cartes de Janus.

Le jeu des mariages consiste à former des paires de cartes rigoureusement identiques (hauteur et couleur).

On étale les 32 cartes de Janus sur la table. Chaque joueur prend à tour de rôle une paire parfaite, par exemple deux valets de coeur, tant que c'est possible. Quand il n'y en a plus, le joueur retourne une seule carte :

• s'il a créé une paire parfaite, il la prend puis c'est au tour du joueur suivant,

• s'il n'a créé aucune paire parfaite, il ne prend rien, laisse la carte retournée et c'est au tour du joueur suivant.

Les cartes retirées ne sont pas retournées pour qu'on ne voie pas ce qu'il y a au dos.

Le joueur qui gagne est celui qui a retiré le plus de paires parfaites.

On joue pour le moment avec 4 cartes de Janus : 7♥/7♠, 7♥/A♣, A♦/A♣, A♦/7♠.

Maud joue contre son Papy. C'est toujours elle qui commence la partie.

2. Y a-t-il une partie dans laquelle Maud ne ramasse pas une paire parfaite au premier tour ?

On joue maintenant avec toutes les 32 cartes. Maud joue en second et c'est à elle de jouer. Il y a un roi de carreau visible, elle cherche le deuxième roi de carreau.

3. Est-il obligatoire que le deuxième roi de carreau se trouve encore sur la table ?

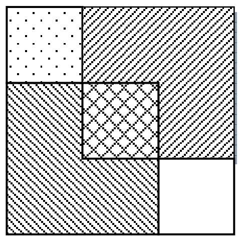
4. Quelle(s) carte(s) peut-elle retourner pour le trouver s'il est encore là ? Sur quelle(s) autre(s) carte(s) risque-t-elle de tomber ?

23-c : Cubes et carrés (autres séries que S, c)

1. a. Montrer que $1^3+2^3=(1+2)^2$.

On appelle cette égalité E_2.

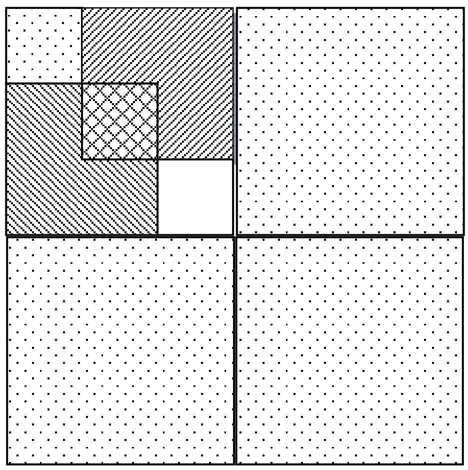
b. Expliquer pourquoi le dessin ci-contre permet de justifier cette égalité.



2. a. Montrer que $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$.

On appelle cette égalité E_3.

b. Expliquer pourquoi le dessin ci-contre permet de justifier cette égalité.

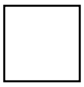
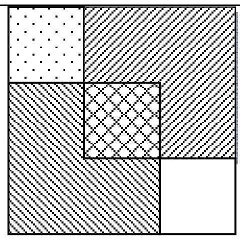
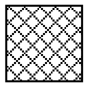
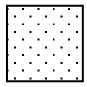


3. Quels dessins pourraient justifier les égalités :

$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2 \text{ et } 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2 \text{ ?}$$

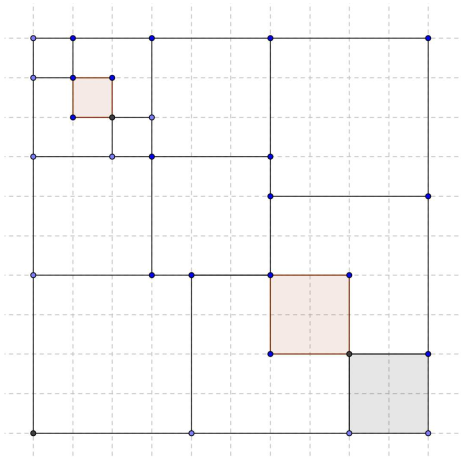
<u>Solution</u>

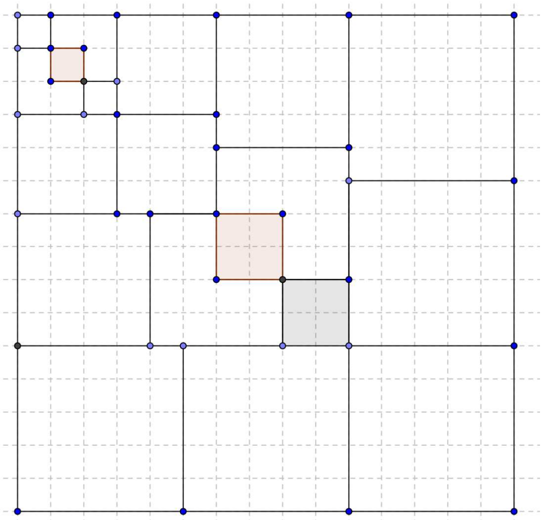
1. Carré de coté 3 :

			
$1\times1^2=1^3$	plus $2\times2^2=2^3$ (les 2 carrés gris de côté 2)	moins 1 (compté 2 fois)	plus 1 (pour finir le carré de côté 3).

2. Même chose que précédemment plus $3\times3^2=3^3$, ce qui donne un carré de côté 6.

3. En général …





23-d : QCM (autres que S)

Un QCM de mathématiques est composé de 5 questions. Pour chaque question, une bonne réponse rapporte 4 points, une réponse fausse retire 2 points et une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points est négatif, la note finale attribuée au QCM est 0.

A l'issue de ce QCM, quatre candidats, Alex, Benjamin, Camille et Delphine ont obtenu la note 0.

Déterminer, pour chacun de ces candidats, le nombre de réponses fausses et le nombre de bonnes réponses sachant que :

* Chacun a rendu un QCM différent de celui de ses trois autres camarades.
* Alex a eu autant de bonnes réponses que d'absence de réponse.
* Très joueur, Benjamin ne s'est jamais abstenu de répondre.
* Camille et Delphine ont répondu correctement aux mêmes nombres de questions.
* Alex s'est abstenu autant de fois que Delphine qui s'est montrée plus audacieuse que Camille.

Correction

Les différentes possibilités de réponses sont décrites dans le tableau ci-dessous

nombre de réponses fausses	**nombre d'abstention**	**nombre de bonnes réponses**	**note réelle**	**note finale**
5	0	0	**-10**	**0**
4	1	0	**-8**	**0**
4	0	1	**-4**	**0**
3	2	0	**-6**	**0**
3	1	1	**-2**	**0**

3	0	2	**2**	**2**
2	3	0	**-4**	**0**
2	2	1	**0**	**0**
2	1	2	**4**	**4**
2	0	3	**8**	**8**
1	4	0	**-2**	**0**
1	3	1	**2**	**2**
1	2	2	**6**	**6**
1	1	3	**10**	**10**
1	0	4	**14**	**14**
0	5	0	**0**	**0**
0	4	1	**4**	**4**
0	3	2	**8**	**8**
0	2	3	**12**	**12**
0	1	4	**16**	**16**
0	0	5	**20**	**20**

Pour chaque QCM, soit (x, y, z) dans lequel x désigne le nombre de réponses fausses, y le nombre d'abstentions et z le nombre de bonnes réponses.

Pour Alex, les différentes combinaisons possibles sont : (5, 0, 0) ; (3, 1, 1).

Pour Benjamin, les différentes combinaisons possibles sont : (5, 0, 0) ; (4, 0, 1).

Pour Camille et Delphine, les combinaisons possibles sont : (5, 0, 0) ; (4, 1, 0) ; (3, 2, 0) ; (2, 3, 0) ; (1, 4, 0) ou bien : (4, 0, 1) ; (3, 1, 1). Cette dernière solution est impossible car sinon Alex et Benjamin auraient tous les deux 5 réponses fausses sur les 5 et donc auraient le même QCM.

Alex s'étant abstenu autant de fois que Delphine, c'est à dire 1 fois, Alex a pour combinaison (3, 1, 1) et Delphine a pour combinaison (4, 1, 0).

Delphine s'est montrée plus audacieuse que Camille, donc elle s'est moins abstenue. Camille a pour combinaison (5, 0, 0) ; il reste alors pour Benjamin la combinaison (4, 0, 1).

24. Strasbourg

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php?frame=.%2Fcompet%2Fsujets.php&m0=comp&m1=oly&m2=suj&categ=olymp

24-a : Les chemins sur le cône

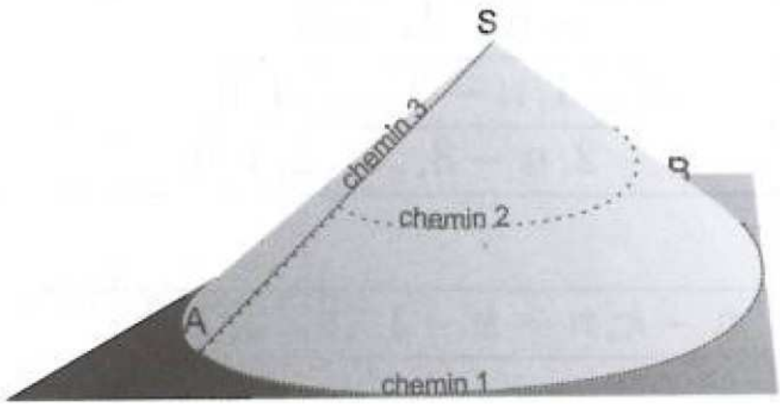
Série S

On dispose d'un cône de sommet S de base circulaire de rayon 1 et de hauteur h donnée.

On place deux points A et B diamétralement opposés sur la base de ce cône.

Pour aller de A à B, trois chemins sont possibles :

- le chemin 1 contourne la base
- le chemin 2 monte de A vers S en ligne droite, s'arrête à l'altitude x, contourne le cône en restant à l'altitude x puis redescend en ligne droite pour atteindre B.
- le chemin 3 va de A à S puis de S à B en ligne droite.



1. Si $h = 2$ et $x = 1$, lequel des trois chemins est le plus court ?
2. Si $h = 2$, quel est le chemin de type 2 le plus court ?
3. Dans le cas général, quel est le chemin le plus court ?

24-b : Les chiffres

Série S

On écrit tous les nombres de 1 à 2010 les uns à la suite des autres. On note N l'entier ainsi obtenu : N=1234…20092010.

1. Combien N a-t-il de chiffres ?
2. Quel est le 2010$^{\text{ième}}$ chiffre de N ?
3. Combien y-a-t-il de 0 dans l'écriture de N ?
4. N est-il divisible par 3 ?

24-c : Le baccalauréat (c)

Autres séries que S

L'an dernier, à Olympialand, 90 % des élèves de première ont eu la moyenne à l'épreuve écrite du baccalauréat de français. Parmi les candidats, 95 % des filles et 78 % de garçons ont eu la moyenne. Par ailleurs, le nombre de filles est compris entre 1100 et 1300. On sait en outre que les pourcentages n'ont pas été arrondis.

Combien étaient-ils à passer cette épreuve ?

Solution

On appelle N le nombre de candidats, F le nombre de filles, G le nombre de garçons : $N = F + G$.

Ont eu la moyenne : 0,9N en général et 0,95F ainsi que 0,78G : on a $0{,}9N = 0{,}95F + 0{,}78G$; enfin $1100 \le F \le 1300$. On remplace N dans $0{,}9N = 0{,}95F + 0{,}78G$:

$$0{,}9(F+G) = 0{,}95F + 0{,}78G \Leftrightarrow 0{,}9F + 0{,}9G = 0{,}95F + 0{,}78G \Leftrightarrow 0{,}12G = 0{,}05F \Leftrightarrow 12G = 5F .$$

G doit être un multiple de 5 et F un multiple de 12 : écrivons toutes les possibilités pour F et G : le premier multiple de 12 après 1100 est 1104 :

F	$5F$ (=12G)	$G = 5F/12$	N=F+G
1104	5520	460	1564
1116	5580	465	1581
1128	5640	470	1598
1140	5700	475	1615
1152	5760	480	1632
1164	5820	485	1649
1176	5880	490	1666
1188	5940	495	1683
1200	6000	500	1700
1212	6060	505	1717
1224	6120	510	1734
1236	6180	515	1751

1248	6240	520	1768
1260	6300	525	1785
1272	6360	530	1802
1284	6420	535	1819
1296	6480	540	1836

24-d : Les permutations de chiffres

Autres séries que S

Charles dit à Jean-Marc : « Je prends le nombre 370.

Je permute les chiffres de toutes les manières possibles et j'obtiens : 370, 307, 073, 037, 730 et 703.

Je calcule leur moyenne, le résultat vaut 370 c'est-à-dire le nombre de départ.

Peux-tu me donner tous les autres nombres à 3 chiffres distincts vérifiant aussi cette propriété ? »

1. Pouvez-vous aider Jean-Marc à trouver ceux dont un des trois chiffres est 4?
2. Pouvez-vous aider Jean-Marc à les trouver tous?

25. Toulouse

http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades/

25-a : Au ski …

Séries autres que la série S

Bien assis sur l'une des 100 banquettes du télésiège, se reposant skis aux pieds pendant que celui-ci le remonte en haut des pistes, Ludovic observe les numéros des banquettes qu'il croise.

Les 100 banquettes sont successivement numérotées de 1 à 100, et Ludovic dans sa montée croise les 99 banquettes autres que la sienne.

1. Lors de sa première montée, il croise au moins 90 banquettes qui ont un numéro strictement inférieur au numéro de sa banquette. Il remarque de plus que le numéro de sa banquette est le triple du jour d'anniversaire de sa meilleure amie. Quel est le numéro de la banquette de Ludovic ?

2. Lors de sa deuxième montée, alors qu'il observe les numéros des banquettes qu'il croise, il s'aperçoit que le numéro de sa banquette est le produit des numéros des trois dernières banquettes qu'il vient de croiser. Par ailleurs, il note que la banquette qui le précède et celle qui le suit portent des numéros qui sont des nombres premiers. Quel peut être le numéro de sa banquette ?

3. Lors d'une dernière montée, Ludovic observe encore les banquettes qu'il croise … A l'arrivée, il peut dire que sept des banquettes croisées avaient un numéro divisant celui de sa banquette personnelle, mais que le numéro de sa banquette ne divisait que les numéros de trois des banquettes croisées. Quel est le numéro de la banquette de Ludovic ?

Note : Un nombre premier est un nombre entier strictement supérieur à 1 et sans autre diviseur que le nombre 1 et lui-même.

25-b : Friends

Séries autres que la série S

Imaginons un groupe de 7 amis étudiants : Rachel, Monica, Ross, Chandler, Janice, Joe et Phoebe.

Ils habitent New-York et projettent de louer deux voitures pour aller passer des vacances en Floride.

Chaque voiture peut transporter au maximum quatre personnes, chauffeur compris.

Toutefois, passer ensemble les 18 heures que dure le trajet peut s'avérer problématique si les occupants de chaque voiture ne sont pas soigneusement choisis.

En effet, il faut savoir que :

(1) : Rachel et Ross viennent de rompre ; il ne serait donc pas judicieux qu'ils voyagent ensemble.

(2) : Joe est amoureux de Rachel, il y a donc des tensions entre lui et Ross.

(3) : Phoebe tente d'attirer l'attention de Joe, mais celui-ci la repousse.

(4) : Chandler vient juste de piquer à Joe la place de capitaine de l'équipe de foot, et il en résulte un certain ressentiment.

(5) : Monica et Chandler sont jaloux de Janice, parce que, malgré un talent discutable (selon eux), elle est premier violon à l'orchestre de l'université alors qu'eux ne sont que seconds violons.

(6) : Monica pense que Joe n'est pas très malin.

1. Trouver une répartition des sept étudiants dans les deux voitures qui respecte ces différentes incompatibilités. Est-ce la seule possible ?

2. L'un des sept étudiants décide de rester en Floride. On constate alors qu'il y a quatre répartitions possibles pour le retour des six autres étudiants. Qui est resté en Floride et quelles sont les répartitions possibles pour le retour ?

25-c : Compensation (c)

Série S

En Pivoinie, les logements mis sur le marché locatif se partagent en deux catégories : les logements appartenant à des particuliers désireux de les louer, appelés « logements privés », et les logements appartenant à l'Etat, appelés « logements publics ».

Dans ce pays, les propriétaires de logements privés sont imposés sur les loyers qu'ils reçoivent de leurs locataires. Le taux de cet impôt, fixé par le conseil des capitans, est de 20 % en 2010 et il est prévu qu'il soit de 25 % en 2011.

1. Les propriétaires de logements privés souhaitent que les revenus qu'ils tirent de la location de leur bien (impôt déduit) soient identiques en 2010 et 2011. De combien, en pourcentage, peuvent-ils augmenter les loyers réclamés à leurs locataires pour cela ?

2. On prévoit que l'évolution du parc des logements d'une année à l'autre sera très faible ; elle sera considérée comme négligeable. Les capitans, quant à eux, veulent pouvoir annoncer que la moyenne d'augmentation des loyers entre 2010 et 2011 sera de 3 % au plus. Pour atteindre cet objectif de communication, ils n'augmentent pas les loyers des logements publics entre 2010 et 2011.

Quelle proportion du total des loyers représente le total des loyers des logements publics ?

<u>Solution</u>

On appelle P_1 le loyer des logements privés en 2010 et P_2 celui de 2011 ; U_1 et U_2 pour le public.

1. Les impôts en 2010 sont $0{,}2P_1$ et en 2010 $0{,}25P_2$; les revenus sont donc $0{,}8P_1$ et $0{,}75P_2$ d'où pour qu'il y ait égalité il faut que $0{,}75P_2 = 0{,}8P_1 \Leftrightarrow P_2 = \dfrac{0{,}8}{0{,}75}P_1 = 1{,}0667P_1$, soit une augmentation de 6,67 %.

2. On appelle N le nombre total de logements, N_P le nombre de logements privés, N_U le nombre de logements publics ; le total des loyers est $N_PP_1 + N_UU_1$ et la moyenne en 2010 est : $M = \dfrac{N_PP_1 + N_UU_1}{N}$.

En 2011 on a $U_2 = U_1$, la moyenne augmente de 3 % et passe à

$$M' = 1{,}03M \Leftrightarrow \frac{N_PP_2 + N_UU_1}{N} = 1{,}03\frac{N_PP_1 + N_UU_1}{N}.$$

Maintenant on cherche $\dfrac{N_UU_1}{N_PP_1 + N_UU_1}$: on peut tout simplifier par N et par ailleurs on a $P_2 = 1{,}0667P_1$ donc

$$1{,}0667N_PP_1 + N_UU_1 = 1{,}03N_PP_1 + 1{,}03N_UU_1 \Rightarrow 0{,}0367N_PP_1 = 0{,}03N_UU_1 \Rightarrow N_UU_1 = \frac{0{,}0367}{0{,}03}N_PP_1 \approx 1{,}23N_PP_1 ;$$

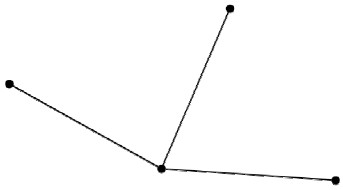
conclusion : $\dfrac{N_UU_1}{N_PP_1 + N_UU_1} = \dfrac{1{,}23}{1+1{,}23} \approx 0{,}55$ soit 55 %.

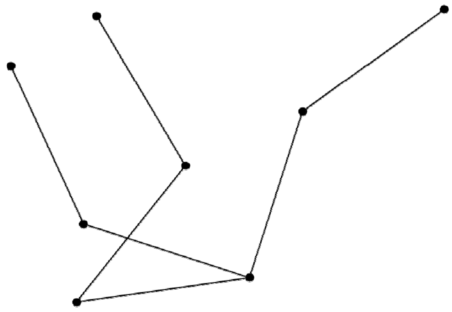
25-d : Elise et son jeu de construction

Série S

Élise possède un jeu de construction. Ce jeu est formé de tiges métalliques rigides de même longueur $3a$ (où a désigne une unité de longueur donnée). On peut assembler ces tiges grâce à un système de clips. A l'extrémité d'une tige, il est possible de connecter plusieurs autres tiges.

Par exemple, les assemblages suivants sont possibles.



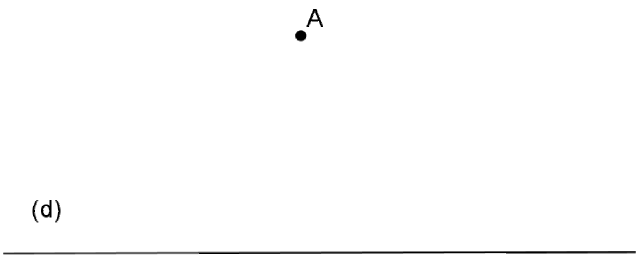


1. Un premier problème que rencontre Élise est que, en mettant bout à bout deux tiges, elle n'est pas certaine que celles-ci soient bien alignées. Comment parvient-elle à assurer cet alignement en utilisant d'autres tiges ?

Élise a des exercices à faire pour demain. Elle décide de les résoudre en utilisant uniquement son jeu de construction. Dans la mesure où elle sait maintenant aligner parfaitement deux tiges, elle s'autorise toutefois, pour gagner du temps, l'usage de sa vieille règle dont les graduations sont effacées par l'usure.

<u>Exercice 1</u>

Construire un segment parallèle à la droite (d) passant par le point A, situé à une distance de valeur $2a$ de la droite (d).



<u>Exercice 2</u>

Construire le milieu du segment [AB] de longueur $3a$.

2. Élise peut-elle réaliser ces deux constructions uniquement avec son jeu et sa règle, et si oui comment ?

3. Élise pourrait-elle construire le milieu du segment [AB] avec son jeu de construction et sa règle pour une valeur quelconque de la distance AB ? Expliquer.

4. Il reste à Élise un dernier exercice à faire :

<u>Exercice 3</u>

Construire le symétrique du point A par rapport au point B, où BA = $4a$.

a. Élise peut-elle réaliser cette construction uniquement avec son jeu et sa vieille règle, et si oui comment ?

b. Élise pourrait-elle construire le symétrique du point A par rapport au point O avec son jeu de construction et sa vieille règle pour une valeur quelconque de la distance OA ? Expliquer.

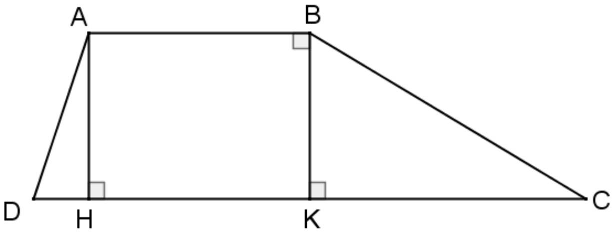
26. Versailles

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades.htm

26-a : Le trapèze

Séries S et STI

La figure ci-dessous représente un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD]. Le but de l'exercice est de déterminer et de construire de tels trapèzes vérifiant la condition (E) : $\begin{cases} CD=2AB \\ BC=2AD \end{cases}$.



(cette figure ne représente pas une solution du problème).

On pose AB = a, AD = b, DH = x, KC = y et AH = h.

1. Montrer que si le trapèze ABCD vérifie la condition (E), alors : $b\sqrt{3} < a < 3b$.
2. Réciproquement, montrer que la condition ci-dessus est suffisante pour exprimer que ABCD vérifie la condition (E).
3. Construire un tel trapèze en prenant a = 2 et b = 1.

La figure, où les traits de construction seront apparents, sera accompagnée d'une rédaction.

26-b : La semeuse

Séries S et STI

9											
8											
7											
6											
5					7						
4				6							
3			5								
2		4									
1	3										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

On repère chaque case du tableau (infini) ci-dessus par deux entiers naturels a (abscisse) et b (ordonnée).

À chaque case, repérée par le couple (a,b) on attribue un nombre, noté $f(a, b)$ respectant les conditions suivantes :

- Les cases de coordonnées (a, b) et (b, a) reçoivent le même nombre ;
- Pour tout entier a, la case de coordonnées (a, a) reçoit le nombre a + 2 ;
- Quels que soient les entiers a et b, $b\times f(a, a+b) = (a+b)\times f(a, b)$.

1. Quels sont les nombres inscrits dans les cases de coordonnées (1, 2) et (1, 3) ?
2. Plus généralement, si on se donne un entier naturel b, quel est le nombre inscrit dans la case de coordonnées (1, b) ?
3. Quel est le numéro inscrit dans la case de coordonnées (8, 5) ?

4. Quel est le numéro inscrit dans la case de coordonnées (2 000, 2 010) ?

26-c : Retour à Syracuse

Séries autres que S et STI

Une rangée de cases supposée illimitée est numérotée par les nombres entiers successifs, en commençant par 1. Un pion peut se déplacer d'une case à l'autre en utilisant les seuls mouvements autorisés :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

- aller de la case numérotée n à la case numérotée $2n$;
- aller de la case numérotée $2n$ à la case numérotée n ;
- aller de la case numérotée n à la case numérotée $3n+1$;
- aller de la case numérotée $3n+1$ à la case numérotée n.

1. Montrer qu'un pion peut aller de la case 56 à la case 1 en un nombre fini d'étapes.
2. Montrer qu'un pion peut aller de la case 29 à la case 1 en un nombre fini d'étapes.
3. Montrer qu'un pion peut aller d'une case numérotée $3m+2$ à la case numérotée $2m+1$ en deux étapes.
4. Montrer qu'un pion peut aller d'une case numérotée $3m$ à la case numérotée $2m$, en passant par la case numérotée $36m+4$, en quelques étapes.
5. Peut-on, à partir de n'importe quelle case, rejoindre la case 1 ?

26-d : Piles de triangles (c)

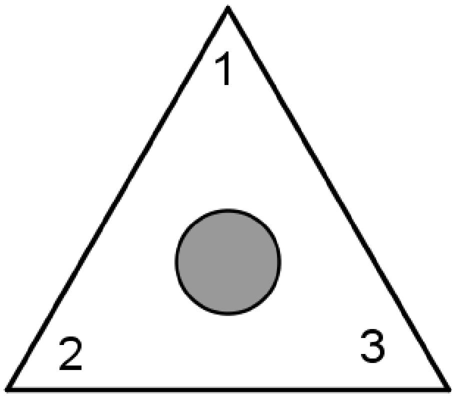
Séries autres que S et STI

Un enfant dispose de triangles équilatéraux aux sommets desquels sont inscrits les nombres 1, 2 et 3 comme sur la figure ci-contre.

Il peut en empiler sur un axe autant qu'il veut, puis compter les totaux obtenus le long des arêtes de la pile.

Il obtient ainsi trois sommes.

1. Les sommes obtenues peuvent-elle être toutes égales à 4 ? à 5 ? à 6 ?
2. Peuvent-elles être toutes égales à 2 010 ? à 2 011 ?



Solution

1. Si on empile deux triangles, on obtient une partie des sommes supérieures ou égales à 4. Pour les réduire toutes à 4, il faut faire apparaître $(1,3)$ et $(3,1)$, c'est impossible car dans un empilement de deux triangles, si le 3 est au-dessus du 1, alors le 2 est au-dessus du 3.

Pour obtenir des sommes toutes égales à 5, il est nécessaire d'empiler au moins 3 triangles (car avec 2, la somme totale est 12), mais la somme totale est alors 18, ce qui est supérieur à 3 fois 5.

On peut obtenir des sommes toutes égales à 6 en empilant 3 triangles de telle sorte que le long des arêtes on lise par exemple : 1-2-3, 2-3-1 et 3-1-2.

2. Si on empile n triangles, la somme des sommes lues en suivant les arêtes latérales du prisme est $6n$. Si ces sommes sont égales, elles sont égales à $2n$. Qu'elles puissent être égales à 2011 est donc exclu. En empilant 1 005 triangles en 335 séries de 3 comme dans la question précédente, on obtient des sommes toutes égales à 2 010.