Olympiades académiques de mathématiques

Les sujets des académies accompagnées de (*) ne me sont pas connus.

1. Exercices communs

1-a : Les triangles magiques

Partie A

Questions préliminaires

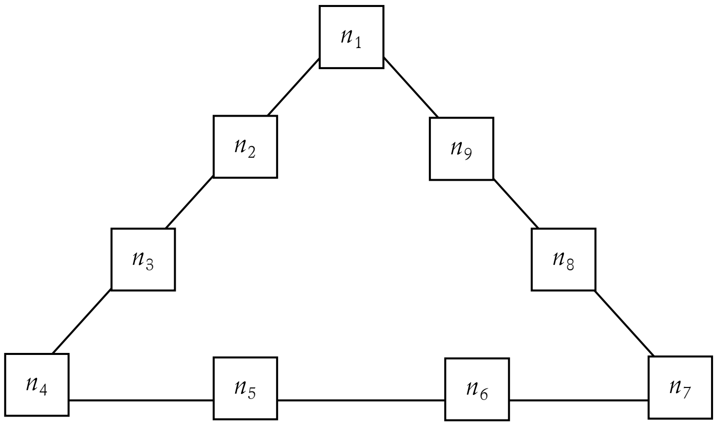
On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?

2. Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B

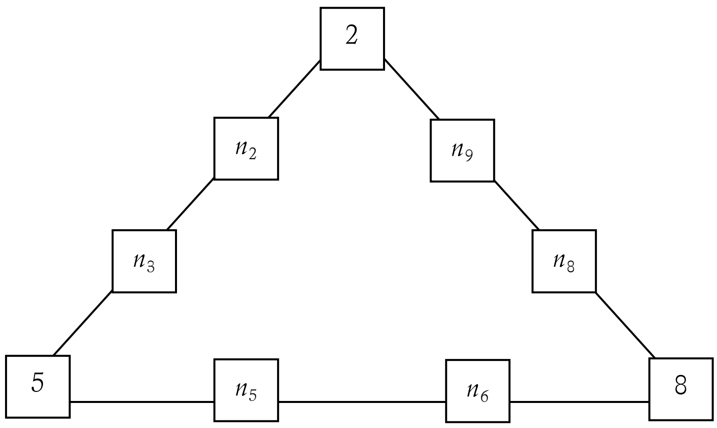
On place tous les nombres entiers de 1 à 9 dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique (c'est à dire si $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = \text{S}$).

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1. Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme S = 20.



2. On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + \text{T} = 3\text{S}$.

b. En déduire qu'on a $17 \leq \text{S} \leq 23$.

c. Donner la liste des couples (S ; T) ainsi envisageables.

3. Proposer un triangle 17-magique.

4. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5. a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.

b. Proposer un triangle 19-magique.

6. Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle (40 – S)-magique.

7. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

1-b : Les diagonales

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1. Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2. Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3. On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.

Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4. A partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5. Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Eléments de solution :
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades2009/premiere/Tout_solution.pdf

2. Amiens

http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/

2-a : S- Les oiseaux

Initialement, n oiseaux se trouvent chacun au sommet d'un poteau, ces n sommets formant un polygone régulier à n côtés. Lorsqu'ils sont apeurés, ces oiseaux s'envolent. Puis après quelques temps, ils reviennent se poser sur les n poteaux, mais pas nécessairement à leurs positions initiales. Deux oiseaux ne peuvent pas se poser sur un même poteau.

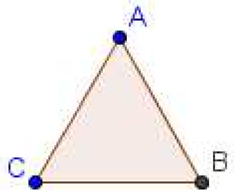
On dit que n oiseaux forment un groupe de « bons géomètres » lorsque, quelles que soient les positions avant et après l'envol, on peut trouver trois oiseaux (parmi les n) qui forment, avant et après l'envol, deux triangles

- soit tous deux rectangles ;
- soit tous deux acutangles (triangle dont les trois angles sont aigus).

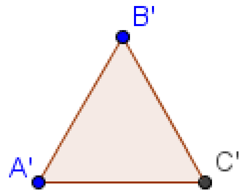
Par exemple, pour $n = 3$, on peut schématiser le problème de la manière suivante.

Appelons A l'oiseau posé en A avant l'envol. Sa position une fois reposé sera notée A'.

Avant l'envol, les oiseaux A, B, C forment un triangle acutangle.



Après l'envol, les oiseaux peuvent se reposer selon plusieurs combinaisons, par exemple :



Dans tous les cas, le triangle A'B'C' est un triangle acutangle. Ainsi 3 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

On rappelle que tous les polygones réguliers sont inscrits dans un cercle.

1. Vérifier que 4 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

2. Pour $n = 5$, donner une position initiale et une position d'arrivée qui justifient que 5 oiseaux ne forment pas un groupe de « bons géomètres ».

3. Pour $n = 6$, les sommets des poteaux forment un hexagone régulier.

Montrer qu'il existe toujours 3 oiseaux qui, avant et après l'envol, forment un triangle rectangle.

Que peut-on en conclure quant au fait que 6 oiseaux forment ou non un groupe de « bons géomètres » ?

4. Montrer que si n est pair, n oiseaux forment nécessairement un groupe de « bons géomètres ».

L'intérieur d'un quadrilatère ABCD est partagé en 4 triangles par ses diagonales.

Les centres des cercles circonscrits à ces 4 triangles forment un quadrilatère STUV.

2-b : S- Quadrilatère

L'intérieur d'un quadrilatère ABCD est partagé en 4 triangles par ses diagonales.

Les centres des cercles circonscrits à ces 4 triangles forment un quadrilatère STUV.

1. Montrer que STUV est toujours un parallélogramme.

2. Quelles propriétés doit avoir le quadrilatère ABCD pour que STUV soit un carré ?

2-c : ES-L-STG- Numb3rs

Un ensemble E de nombres entiers positifs ou nuls possède les deux propriétés suivantes :

* (P1) si $x \in E$, alors $2x^3 + 2 \in E$;

* (P2) si x et y sont deux éléments de E, leur différence, si elle est positive ou nulle, est aussi un élément de E.

1. On suppose ici que $2 \in E$.

a. 18 est-il un élément de E ?

b. Montrer que 0 est dans E.

c. 2008 est-il dans E ?

2. On suppose désormais que E est non vide. 2008 appartient-il à E ?

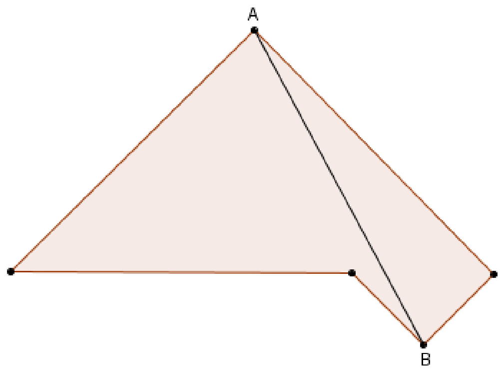
2-d : ES-L-STG- Le père Iclès et son terrain

Le père Iclès possède un terrain en forme d'hexagone.

Comme l'indique la figure, les deux plus petits côtés ont la même longueur et ses angles intérieurs mesurent tous 90, 45 ou 225 degrés.

Lorsqu'on lui demande la superficie de son terrain, le père Iclès répond : « La diagonale AB mesure 152 mètres exactement. Vous en savez assez pour calculer la superficie du terrain. »

Quelle est l'aire du terrain du père Iclès ?



2-e : STI-STL - Une fonction

Soit la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}$.

1. A l'aide de votre calculatrice, étudier le comportement de f sur l'intervalle $I_1 = [5 ; 10]$.

Quelle conjecture vous suggère cette méthode ?

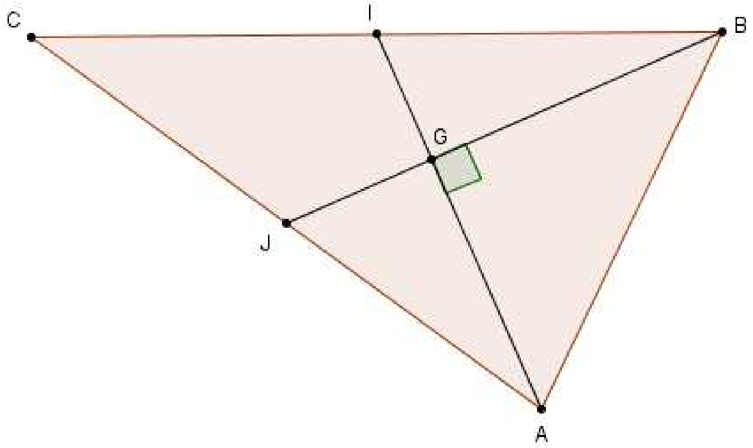
2. Démontrer cette conjecture (on pourra poser $x = u^2 + 1$, avec $u \geq 0$).

3. Donner une expression simplifiée de f sur les intervalles $I_2 = [1\,;5]$ et $I_3 = [10\,;+\infty[$.

2-f : STI-STL-Médianes perpendiculaires

Dans la figure suivante, le triangle ABC est tel que les médianes AI et BJ sont perpendiculaires.

Exprimer $CA^2 + CB^2$ en fonction de AB^2.



3. Besançon

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

3-a : Promenade parmi les nombres

On part du nombre 5 et on s'autorise à utiliser deux opérateurs :

- L'opérateur (M) « multiplier par 2 » : $n \to 2 \times n$
- L'opérateur (R) « retrancher 3 » : $n \to n - 3$.

Un entier naturel N est dit *admissible* s'il est possible, en partant de 5 et en n'utilisant que les deux opérateurs ci-dessus, de parvenir en un certain nombre d'étapes au nombre N.

Par exemple 25 est admissible par le chemin à cinq étapes :

$$5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14 \xrightarrow{M} 28 \xrightarrow{R} 25\,.$$

On considérera par convention que 5 est admissible (chemin avec 0 étape)

1. Quels sont les entiers naturels admissibles en au plus 3 étapes ?
2. Montrer que 11, 13, 16 et 19 sont aussi admissibles.
3. Certains entiers naturels sont non admissibles : lesquels ? Justifier.
4. Montrer que 2009 est admissible en présentant une méthode permettant de trouver le chemin menant de 5 à 2009 (une telle méthode est aussi appelée *algorithme*).

3-b : Tableau des scores d'une poule de championnat

On s'intéresse aux tableaux de score obtenus à l'issue d'une poule d'un championnat sportif.

Dans une telle poule, chaque équipe rencontre chacune des autres ; en cas de match nul on attribue 1 point à chaque équipe ; sinon on attribue 3 points à l'équipe gagnante et 0 point à l'équipe perdante.

Par exemple, si une poule comporte 3 équipes nommées A, B et C, on aura 3 matchs : A contre B, A contre C, B contre C. Si A perd ses deux matchs et que B gagne contre C, A totalisera 0 point, B 6 points et C 3 points.

Le tableau de la poule sera dans ce cas le suivant :

1°	B	6
2°	C	3
3°	A	0

Seule nous intéresse ici la troisième colonne ; nous la coderons 630.

Attention, dans un tel code xyz, on aura toujours $x \geq y \geq z$.

Autre exemple : si les trois matchs donnent un résultat nul, le code obtenu sera 222.

1. Dans cette question, la poule comporte 3 équipes. Combien de codes possibles obtient-on ? (on connaît déjà 630 et 222)

Dans toute la suite, la poule comporte 4 équipes.

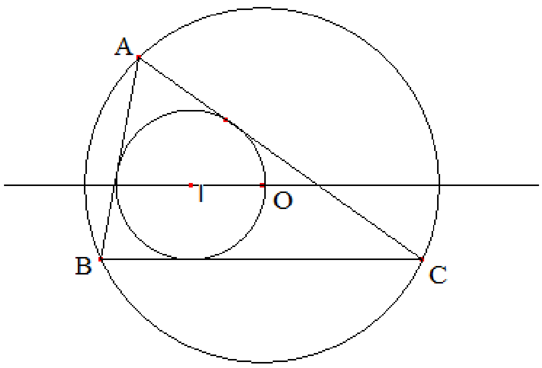
2. Si on sait qu'une équipe gagne tous ses matchs, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

3. Si on sait que le premier du groupe a totalisé 4 points, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

Les candidats intéressés pourront poursuivre leur recherche hors-olympiades et rechercher tous les codes possibles avec 4 équipes… Réponse sur le site…

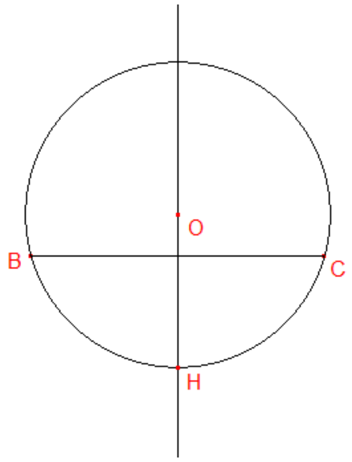
4. Bordeaux

http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/olymp/olymp.html



4-a : S - Triangles olympiadiques

On appelle triangle olympiadique de sommet A, un triangle tel que, si O et I désignent respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC, alors ces deux points sont distincts et la droite (OI) est parallèle à (BC).

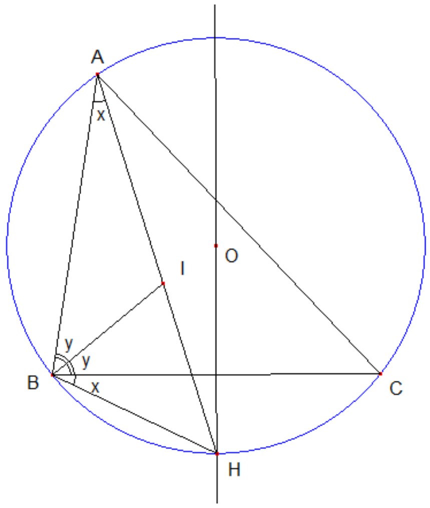


1. (OH) désignant la médiatrice du segment [BC], reproduire la figure ci-contre et construire le point A tel que le triangle ABC soit olympiadique de sommet A.

2. Cette construction est-elle toujours réalisable ?

En déduire une condition sur l'angle BAC pour qu'il existe un triangle olympiadique de sommet A.

Solution



1. H étant le milieu de l'arc BC, (AH) est la bissectrice de l'angle BAC et donc I appartient à (AH).

D'autre part, BIH=180-BIA=x+y=IBH. Le triangle BIH est donc isocèle en H et HB=HI.

Si le triangle est olympiadique, I est un point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par O et du cercle de centre H passant par B. On construit donc le point A intersection du cercle circonscrit à ABC avec (HI)

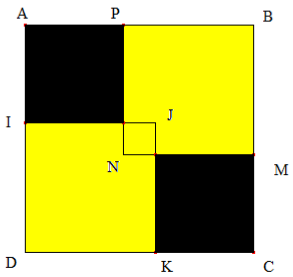
2. La construction n'est donc possible que si HB>HO, donc si HOB>60° donc si BAC>60°.

4-b : non S - Des carrés dans un carré.

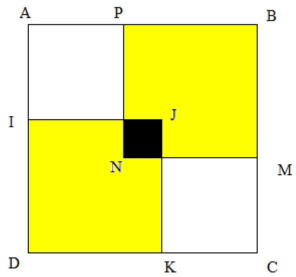
ABCD est un carré de côté 1, x est un nombre réel compris entre 0 et 1.

IJKD et PBMN sont deux carrés de côté x.

On désigne par $S_1(x)$ l'aire de la partie commune à ces deux carrés si elle existe, nulle si elle n'existe pas et par $S_2(x)$ l'aire de la partie extérieure à ces deux carrés et contenue dans ABCD.



Visualisation de $S_1(x)$



Visualisation de $S_2(x)$

1. Retrouver parmi les huit courbes suivantes celle qui représente S_1 et celle qui représente S_2.

On s'appliquera à justifier ses choix.

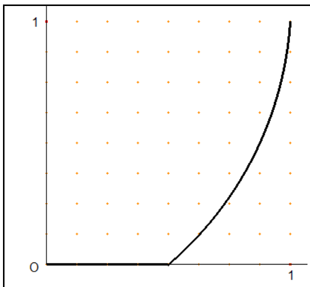


Schéma 1

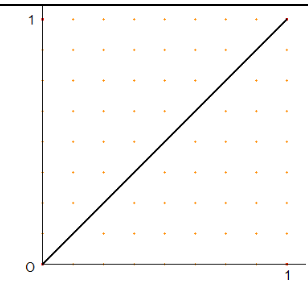


Schéma 2

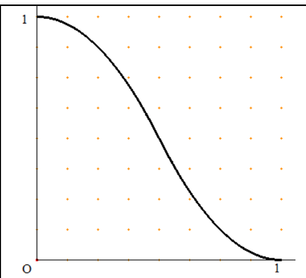


Schéma 3

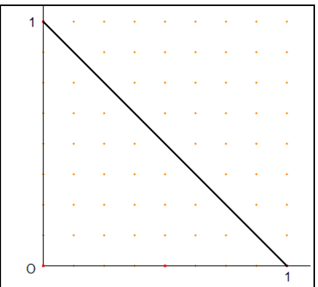
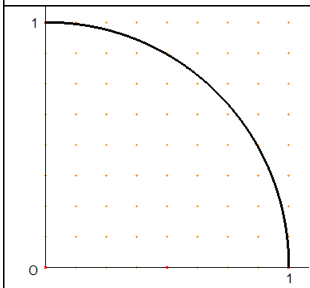
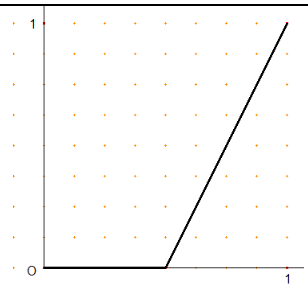
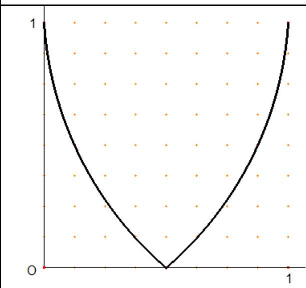


Schéma 4







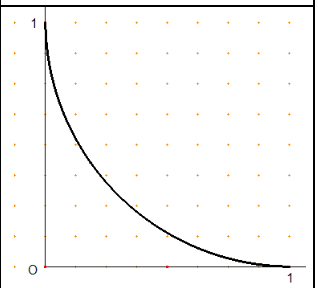


Schéma 5	Schéma 6	Schéma 7	Schéma 8

2. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x)=1/4$?

3. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x)=S_2(x)$?

4. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x)+S_2(x)$ minimum ? Quel est ce minimum ?

Solution

1. $S_1(x)=0$ si $x<0.5$ et $S_1(x)=(2x-1)^2$ sinon donc schéma1 ; $S_2(x)=1-2x^2$ si $x<0.5$ et $S_2(x)=2(x-1)^2$ sinon donc schéma 3.

2. $S_1(x)=1/4$ pour $2x-1=1/2$, donc pour $x=3/4$.

3. $S_1(x)=S_2(x)$ pour $(2x-1)^2=2(x-1)^2$ donc pour $2x^2=1$ donc pour x=rac(2)/2.

4. $S_1(x)+S_2(x)= 2(x-1)^2$ si $x<0.5$ et $S_1(x)+S_2(x)=(2x-1)^2+2(x-1)^2=6x^2-8x+3$ sinon.

Le minimum est pour $x=2/3$, il est égal à $1/3$.

4-c : Carrés magiques multiplicatifs

a, b, c, d, e, f, g, h et i étant des entiers naturels n'ayant aucun diviseur autre que 1 en commun, on dit que le tableau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un carré magique multiplicatif (CMM) de produit P si et seulement si le produit des entiers de chacune des lignes, le produit des entiers de chacune des colonnes et celui des entiers de chacune des deux diagonales est égal à P.

1. Compléter les deux CMM suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & . \\ . & . & 1 \\ 3 & 4 & . \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & . \\ 2^8 & . & . \\ . & 2^6 & . \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un CMM de produit P alors $e^3=P$.

Ce résultat, même non démontré peut être utilisé par la suite.

3. Construire un CMM utilisant tous les diviseurs de 100.

4. Montrer que si e est un nombre premier, alors il n'y a que quatre carrés magiques possibles.

5. Construire un carré magique de produit 27000 dont tous les termes sont différents.

Solution

1. $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 \\ 36 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 18 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & 2^7 \\ 2^8 & 2^4 & 1 \\ 2 & 2^6 & 2^5 \end{pmatrix}$.

2. $(aei)(gec)(beh)(def)=P^4=abcdefghe^3=P^3e^3$. Donc $e^3=P$.

3. $D(100)=\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. Leur produit est 10^9, donc $P=10^3$, donc 10 est au milieu.

$\begin{pmatrix} 2 & 25 & 20 \\ 100 & 10 & 1 \\ 5 & 4 & 50 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & e^2 & e \\ e^2 & e & 1 \\ e & 1 & e^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e & e^2 & 1 \\ 1 & e & e^2 \\ e^2 & 1 & e \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e & 1 & e^2 \\ e^2 & e & 1 \\ 1 & e^2 & e \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e^2 & 1 & e \\ 1 & e & e^2 \\ e & e^2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$5.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 25 \\ 25 & 5 & 1 \\ 1 & 25 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 1 & 300 \\ 100 & 30 & 9 \\ 3 & 900 & 10 \end{pmatrix}$$

5. Caen

http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/maths/

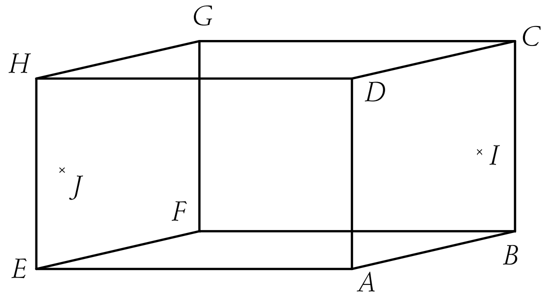
5-a : ES-L-T- Le problème de la fourmi

Dans un hangar ABCDEFGH qui a la forme d'un pavé droit avec AE= 30 m, AD = 12 m et AB = 12 m, se trouve une fourmi à la position I qui veut se rendre à la position J.

Le point I est sur la médiatrice du segment [BC], à 1 m de la droite (BC), dans le plan ABCD.

Le point J est sur la médiatrice du segment [EH], à 1 m de la droite (EH) dans le plan EHGF.

Déterminer la longueur du chemin le plus court que doit suivre la fourmi, en restant en contact avec les faces du hangar.



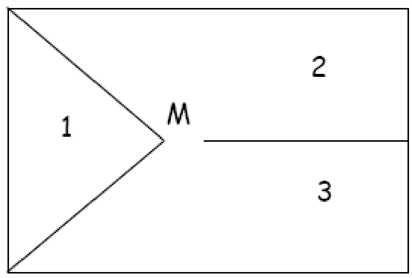
(A partir du livre *Maths puzzle* by Peggy Adler and Irving Adler éditeur : Watts)

5-b : S-ES-L-T - Les Drapeaux

On considère pour chaque question un drapeau de dimensions 120 x 80 cm.

1. Un nouveau pays veut créer son drapeau (ci–contre). Ses dirigeants souhaitent que les trois « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par trois parties de même aire.

Quelle(s) est (sont) la (les) position(s) possible(s) du point M, point commun aux trois parties, pour que le côté commun aux parties 2 et 3 soit parallèle aux deux autres côtés ?

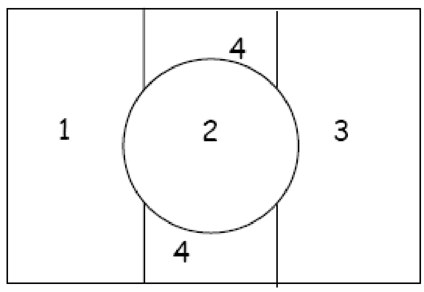


2. Un autre nouveau pays veut aussi créer son drapeau (ci–contre). Ses dirigeants souhaitent aussi que les trois « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par trois parties de même aire. Peut-on avoir les 3 aires égales ?

3. Un troisième nouveau pays veut créer aussi son drapeau(ci–contre). Ses dirigeants souhaitent que les quatre « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par quatre parties de même aire.

a. Peut-on avoir les 4 aires égales si les trois bandes verticales sont de même largeur ?

b. Peut-on avoir les 4 aires égales si l'on fait varier la largeur de la bande centrale ?



Indication : On pourra utiliser le fait que l'aire d'un secteur angulaire de α radian est égale à $\frac{1}{2}\alpha r^2$.

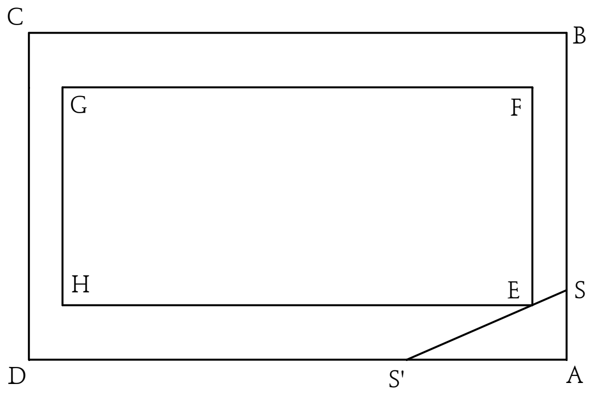
5-c : S - Problème du cadre

On dispose d'un cadre dont le bord extérieur est un rectangle ABCD de dimensions 30 cm et 20 cm. Le bord intérieur est aussi un rectangle EFGH. Les deux bandes du cadre suivant les longueurs sont identiques. Il en est de même des bandes suivant les largeurs.

La bande suivant la largeur est large de 1 cm. La bande suivant les longueurs est large de 3 cm.

On veut découper le coin A de ce cadre suivant la section [SS'].

1. Déterminer la longueur SS' de la section sachant que AS=AS'.
2. Calculer la longueur de la section SS' lorsque S est en B.
3. Même question lorsque S' est en D.
4. Calculer la longueur de la section lorsque ES=ES'.



6. Clermont Ferrand

http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/sampleolymp1.php

6-a : Quand la somme est égale au produit

Tous les nombres considérés sont des nombres entiers naturels non nuls.

A. 1. Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 4 ?

2. Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 2009 ?

3. La somme de deux entiers naturels x et y, avec $0 < x \leq y$, est égale à leur produit.

Combien y a-t-il de solutions distinctes (x, y) ?

B. La somme de trois entiers naturels x, y et z, avec $0 < x \leq y \leq z$, est égale à leur produit.

1. Montrer que $xy \leq 3$.

2. Combien y a-t-il de solutions distinctes (x, y, z) ?

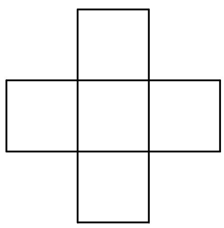
C. La somme de cinq entiers naturels x, y, z, u et v, avec $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$, est égale à leur produit.

Combien y a-t-il de solutions possibles (x, y, z, u, v) ?

6-b : La croix, le carré, l'hexagone et l'hexamier

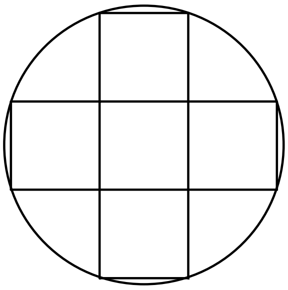
Les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG et ST2S ne traiteront que la question 1.

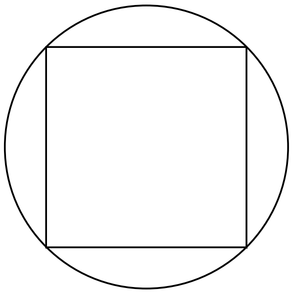
1. Croix et carré :



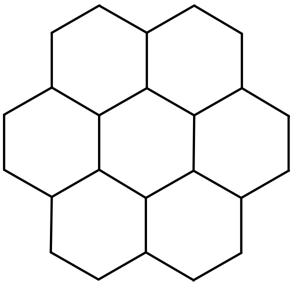
Une croix est dans cet exercice une figure géométrique formée de cinq carrés de même dimension et disposés comme l'indique la figure ci-contre.

Soit deux cercles C et C' de même rayon. Dans le premier on inscrit une croix, dans le second un carré. Comparer les aires du carré et de la croix.





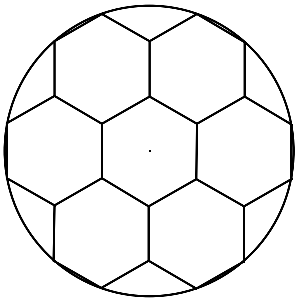
2. Hexagone et hexamier :

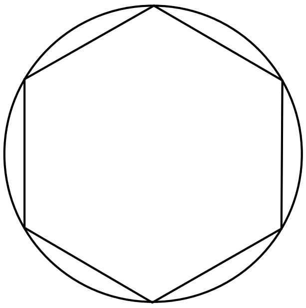


Un hexamier est une figure géométrique formée de sept hexagones réguliers de même dimension et disposés comme l'indique la figure ci-contre.

Soit deux cercles C et C' de même rayon. Dans le premier on inscrit un hexamier, dans le second un hexagone régulier.

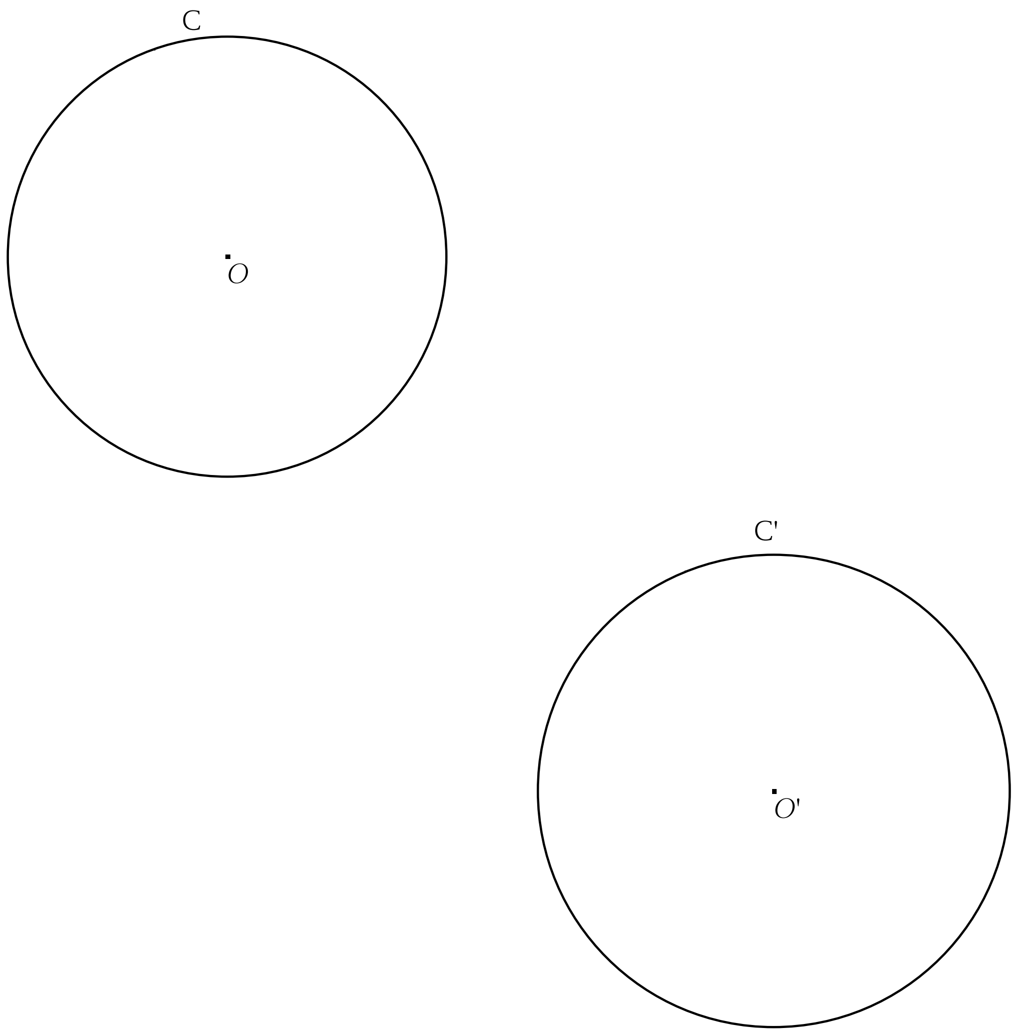
Comparer les aires de l'hexamier et de l'hexagone.





3.Ci-dessous, vous avez deux cercles C et C'.

À l'aide seulement d'une règle non graduée et d'un compas inscrire une croix dans C et un hexamier dans C'. Vous donnerez en quelques lignes, les éléments de constructions que vous utilisez : on suppose connu le tracé d'une perpendiculaire et d'une parallèle à une droite ainsi que la construction d'un carré.



7. Créteil

http://maths.ac-creteil.fr/spip/spip.php?rubrique59

7-a : S - Des n-machines.

Soit n un entier naturel compris entre 2 et 10.

Une « n-machine » n'effectue que des calculs utilisant les quatre opérations sur des nombres entiers naturels.

Pour cette « n-machine », a, b et c étant des entiers naturels compris entre 0 et $n-1$, le nombre noté $\overline{abc}$ représente le nombre $a \times n^2 + b \times n + c$. Il existe donc neuf n-machines différentes.

Par exemple, pour la « 4-machine »

- le nombre noté $\overline{231}$ représente le nombre $2 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 45$;

- le nombre noté $\overline{13}$ représente le nombre $1 \times 4 + 3 = 7$;

- le nombre noté $\overline{2}$ représente le nombre 2.

1. Quel nombre représente le nombre noté $\overline{231}$ pour la « 7-machine » ?

2. Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) :

$$\overline{3}x + \overline{43} = \overline{211}.$$

Quelle valeur doit-on donner à n pour que la « n-machine » affiche « 21 » comme solution ?

3. Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) :

$$x^2 - \overline{45}\,x + \overline{322} = \overline{0}\,.$$

Une autre « n-machine » affiche deux solutions entières comme solutions de cette équation.

a. Quelle « n-machine » a-t-on utilisée ? (Il faut donc trouver la "bonne" valeur de n)

b. Quelles sont les solutions affichées par cette machine ?

7-b : ES-L-T - Un carré bien naturel

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Le carré ci-dessus est qualifié de **naturel**, car on y a écrit les nombres entiers naturels dans l'ordre, ligne après ligne, d'une façon toute « naturelle ».

1. Choisissez cinq nombres de ce carré de telle façon que deux quelconques d'entre eux n'appartiennent jamais ni à la même ligne, ni à la même colonne. Calculez ensuite la somme de ces cinq nombres. Recommencez avec cinq autres nombres choisis de la même façon. Que constatez-vous ?

2. En utilisant cinq couleurs différentes, coloriez les 25 cases du carré de telle sorte que deux cases quelconques de la même couleur n'appartiennent jamais ni à la même ligne, ni à la même colonne. On appellera un tel coloriage un « bon coloriage ».

Calculez la somme des nombres écrits sur les cases d'une même couleur. Que constatez-vous ?

3. Le nombre écrit à l'intersection de la 2$^{\text{ème}}$ ligne et de la 4$^{\text{ème}}$ colonne est 8.

Exprimez la valeur du nombre écrit à l'intersection de la ***i***-ème ligne et de la ***j***-ème colonne en fonction de ***i*** et de ***j***.

4. Démontrez que dans n'importe quel « bon coloriage » d'un carré naturel 5×5, la somme des nombres écrits sur les cases d'une même couleur est une constante.

5. Dans un carré de 100 cases sur 100 cases, on a écrit les nombres de 0 à 9 999.

On admet qu'il est possible de réaliser un « bon coloriage » à l'aide de 100 couleurs dans un carré 100×100.

Calculez la somme des nombres écrits dans les cases d'une même couleur d'un tel carré.

7-c : Même aire ?

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A, ABEF et AGHC sont des carrés.

On pose AB = a et AG = b.

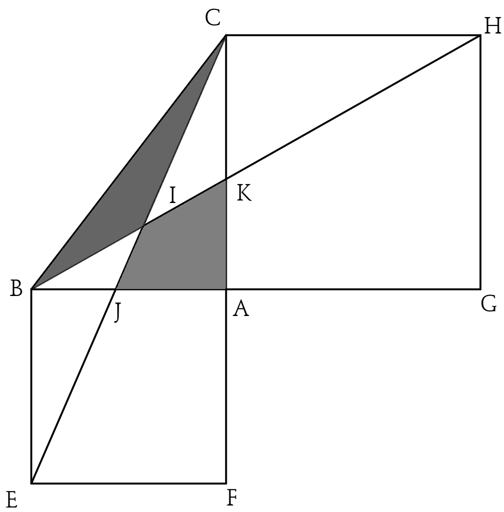
K est le point d'intersection des droites (AC) et (BH).

J est le point d'intersection des droites (AB) et (EC).

I est le point d'intersection des droites (EC) et (BH).

1. Exprimer AK en fonction de a et de b puis en déduire l'aire du triangle ABK en fonction de a et de b.

2. Montrer que le triangle IBC et le quadrilatère AJIK ont la même aire.



8. Corse

http://www.ac-corse.fr/math/Olympiades-2009_a70.html

8-a : Tri-angle

Soit ABC un triangle dont une mesure de l'angle en degrés est un réel α de]0 ; 90[. On note a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB en cm.

1. Démontrer que l'aire du triangle ABC en cm2 est égale à $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

2. a. Par un point I du segment [AB] on mène une parallèle à la droite (BC) qui recoupe [AC] en J. Déterminer un point de I de [AB] tel que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient la même aire ?

b. Dans un tel cas est-il possible que AIJ et BCJI aient aussi le même périmètre ?

3. Un triangle ABC est tel que et BC = 7 cm, AB = 8 cm et AC = 9 cm.

Soit I un point de [AB] et J un point de [AC], la droite (IJ) n'étant pas nécessairement parallèle à (BC).

Déterminer, s'ils existent, les points I et J tels que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient même aire et même périmètre.

8-b : Liste d'entiers

Dans cet exercice on admet que tout nombre entier naturel, supérieur ou égal à 2, se factorise de façon unique en produit de facteurs premiers.

On appelle « *L-liste* » un ensemble fini de nombres entiers naturels distincts non nuls, tel que

* Il y a au moins deux nombres entiers distincts dans la *L-liste.*

* L'un au moins des entiers de la *L-liste* est pair.

* Quels que soient les entiers pairs m et n de cette *L-liste*, le nombre $\frac{m+n}{2}$ est aussi un nombre entier de cette *L-liste*.

1. a. Les ensembles $\{1,2\}$, $\{2,5,6\}$, $\{2,5,7\}$ sont-ils des *L-listes* ?

b. Déterminer toutes les *L-listes* ayant exactement deux éléments.

c. Donner un exemple de *L-liste* ayant 5 éléments et un exemple de *L-liste* ayant 2009 éléments.

2. Démontrer que dans toute *L-liste* il existe au moins un nombre entier naturel impair.

3. a. Démontrer que si deux nombres pairs distincts d'une *L-liste* ont le même nombre k de facteurs 2 dans leur décomposition en facteurs premiers, alors il existe un entier de cette *L-liste* qui a dans sa décomposition en facteurs premiers un nombre de facteurs 2 strictement supérieur à k.

b. On considère un ensemble fini de fractions positives et irréductibles dont les dénominateurs forment une *L-liste*. Leur somme peut-elle être un nombre entier naturel ?

c. La somme suivante est-elle un entier naturel ?

$$\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\ldots+\frac{2008}{2007}+\frac{2009}{2008}.$$

9. Dijon

http://mathematiques.ac-dijon.fr/

9-a : Les nombres « sigma »

Prérequis - Dans cet exercice, on suppose connus les deux résultats suivants :

** il existe une infinité de nombres premiers ;*

** si un entier N supérieur ou égal à 2 admet la décomposition en facteurs premiers :* $N = p^a \times q^b \times \ldots$ *, où p, q, ... sont des nombres premiers distincts, alors le nombre de diviseurs positifs de N est égal à :* $(a+1)\times(b+1)\times\ldots$

Par exemple $12 = 2^2 \times 3^1$ *admet* $3\times 2 = 6$ *: 1, 2, 3, 4, 6 et 12.*

On dit qu'un nombre entier naturel non nul est «.*sigma* » lorsqu'il est divisible par le nombre de ses diviseurs positifs.

Par exemple, 12 est « *sigma* » car il possède 6 diviseurs positifs et 6 divise 12. En revanche, 22 n'est pas « *sigma* » car il possède 4 diviseurs positifs : 1, 2, 11, 22, et 4 ne divise pas 22.

1. 69 est-il « *sigma* »? 84 est-il « *sigma* »? Un nombre premier peut-il être « *sigma* » ?

2. Démontrer que si *N* est un entier « *sigma* » impair supérieur à 1, alors l'entier 2*N* est « *sigma* ».

3. Démontrer que si *N* est un entier « *sigma* » impair, alors *N* est nécessairement un carré parfait. La réciproque est-elle vraie ?

4. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres « *sigma* ».

9-b : « Concourantes ou parallèles »

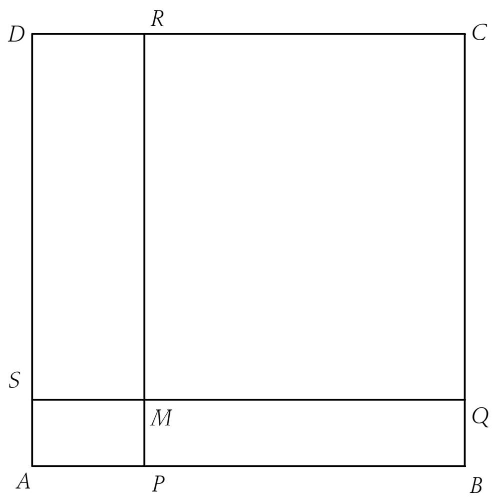
Sur la figure ci-contre, *ABCD* est un carré de côté 1, *M* est un point intérieur au carré, les quadrilatères *APMS* et *MQCR* sont des rectangles.

Premier cas particulier

Dans cette question, on suppose que $AP = \frac{3}{4}$ et que $AS = \frac{1}{4}$. Démontrer que les droites (*AC*), (*PQ*) et (*RS*) sont parallèles.

Deuxième cas particulier

Dans cette question, on suppose que $AP = \frac{1}{4}$ et que $AS = \frac{1}{3}$.

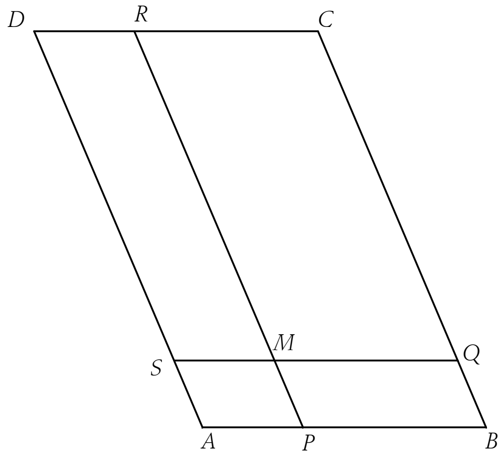


Déterminer une équation des droites (PQ) et (RS) dans le repère $(A\,;\vec{AB},\vec{AD})$ et en déduire que les droites (AC), (PQ) et (RS) sont concourantes.

Généralisation

Cette fois $ABCD$ est un parallélogramme, M est un point intérieur à ce parallélogramme et les quadrilatères $APMS$ et $MQCR$ sont des parallélogrammes.

Démontrer que les droites (AC), (PQ) et (RS) sont en général concourantes sauf pour certaines positions particulières de M que l'on précisera.



10. Grenoble

http://www.ac-grenoble.fr/maths/

10-a : S-STI - L'escalier

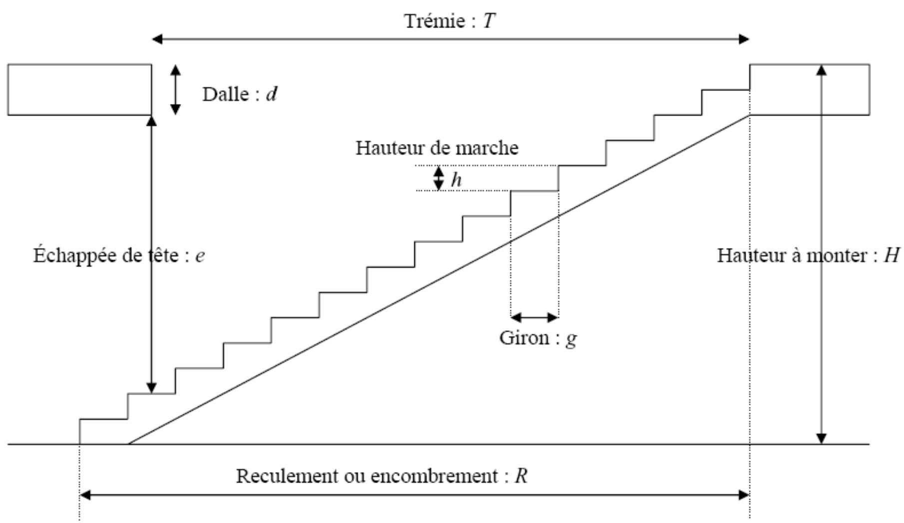
En 1675, François Blondel se penche sur la question du calcul de l'escalier dans son *Cours d'architecture enseigné à l'académie royale d'architecture*. Il constate « qu'à chaque fois qu'on s'élève d'un pouce, la valeur de la partie horizontale se trouve réduite de deux pouces et que la somme du double de la hauteur de la marche et de son giron doit demeurer constante et être de deux pieds ».

Autrement dit : $M = 2h + g$, où M est le module ou pas et vaut 2 pieds (64,8 cm), h la hauteur de la marche, et g son giron (profondeur d'une marche d'escalier mesurée en son milieu).

L'idée directrice est que l'effort fait par la personne qui monte soit constant, que l'escalier soit ou non droit.

De nos jours, le pas usuel est de 63 cm. Ainsi on a : $2h + g = 63$.

Dans cet exercice toutes les longueurs sont exprimées en centimètres. Les réponses seront arrondies à 0,1 cm.



Dans les constructions modernes l'échappée de tête doit être d'au moins 2 mètres.

Dans l'étude qui suit, la hauteur à monter H est de 3 mètres, la dalle a une épaisseur de 30 centimètres.

Un escalier est déterminé par le nombre de marches, leur hauteur et leur giron.

1. On réalise un escalier droit de 19 marches. La trémie mesure 4,8 mètres. Calculer le giron, le reculement et l'échappée de tête de l'escalier.

2. On dispose d'un reculement maximum de 4 mètres. Calculer les dimensions de l'escalier le moins pentu possible. Quelle doit être la dimension minimale de la trémie ?

3. On dispose d'une trémie de 2,60 mètres.

Quelles sont les dimensions de l'escalier le moins pentu possible ? Quel est son reculement ?

10-b : ES-L-T(sauf STI) : Fraction égyptienne

On appelle fraction unitaire ou fraction égyptienne une fraction d’entiers dont le numérateur est égal à 1. On démontre et nous admettrons que toute fraction comprise entre 0 et 1 peut s’exprimer comme somme de fractions unitaires dont tous les dénominateurs sont distincts deux à deux.

Cette somme est appelée un développement égyptien. Par exemple : $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ est un développement égyptien.

1. Donner un développement égyptien en une somme de deux fractions de :

a. $\frac{3}{20}$.   b. $\frac{2}{17}$.

2. Montrer qu’aucune fraction strictement comprise entre $\frac{5}{6}$ et 1 ne peut se décomposer comme somme de 2 fractions égyptiennes.

3. Donner un développement égyptien en une somme de trois fractions de :

a. $\frac{19}{20}$ b. $\frac{5}{121}$ c. $\frac{4}{17}$.

10-c : Un petit jeu

Voici un petit jeu. Au départ, on dispose de 16 cases numérotées comme indiquées ci-dessous.

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

On s’autorise à faire autant de fois que l'on veut les actions suivantes :

• Choisir les deux premières lignes ou les deux dernières et les échanger.

• Choisir les deux premières colonnes ou les deux dernières et les échanger.

• Choisir une ligne ou une colonne et échanger le premier terme avec le dernier et le deuxième avec le troisième.

1. Montrer que l’on peut obtenir la position suivante :

22	21	24	23
12	11	14	13
42	41	44	43
32	31	34	33

2. Peut-on obtenir n’importe quelle position ? Si oui pourquoi, sinon donner une position impossible et expliquer pourquoi.

11. Lille

http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/premS.html

11-a : S- Le jeu des inverses

Dans cet exercice on recherche les triplets de réels strictement positifs $(x\,;y\,;z)$ vérifiant les deux conditions suivantes : $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

1. Montrer que le triplet $\left(4\,;4\,;\frac{1}{8}\right)$ vérifie ces conditions.

2. On choisit $x = 2009$ et $y = \frac{1}{2009}$. Est-il possible de déterminer z ?

3. Montrer que le triplet $\left(\frac{1}{2009}\,;\frac{2009}{2}\,;\frac{2009}{2}\right)$ vérifie les conditions.

4. On choisit $x=1$: est-il possible de déterminer y et z ?

5. Peut-on avoir $x = y = z$?

6. Démontrer qu'au moins un des trois nombres x, y ou z est plus grand que 1.

7. Démontrer qu'au moins un des trois nombres x, y ou z est plus petit que 1.

8. A quelles conditions le triplet $\left(x\,;\frac{1}{2x}\,;\frac{1}{2x}\right)$ convient-il ? En déduire qu'il existe une infinité de triplets qui conviennent.

11-b : S- Et pourtant il tourne…

I. Un carré $ABCD$ de côté 1cm « roule » sans glisser dans le sens des aiguilles d'une montre sur un segment $[IJ]$ de longueur n cm (n entier naturel non nul).

La position initiale est représentée sur la figure 1.

figure 1

figure 2

Le carré pivote d'abord autour du point B (figure 2) jusqu'à ce que le point C soit sur $[IJ]$ puis le carré pivote autour du point C jusqu'à ce que le point D soit sur $[IJ]$. On continue ainsi jusqu'à ce qu'un sommet du carré $ABCD$ coïncide avec le point J.

1. Si $n = 10$, quel sera le sommet du carré $ABCD$ confondu avec J dans la position finale ?

2. Toujours pour $n = 10$, quelle est la longueur de la trajectoire parcourue par le point A depuis la position initiale jusqu'à la position finale ?

3. Pour quelles valeurs de n, le point B est-il confondu avec le point J dans la position finale ?

II. Cette fois le carré *ABCD*, toujours de côté 1 cm, « roule » sans glisser dans le sens des aiguilles d'une montre sur le pourtour d'un triangle équilatéral *EFG* de côté n cm (n entier naturel non nul). La position initiale est représentée sur la figure 3.

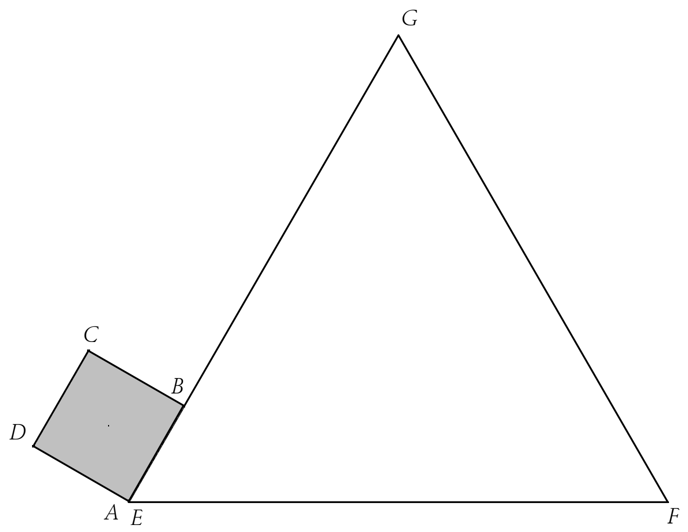


figure 3

Le périple du carré *ABCD* s'achève lorsqu'un sommet du carré *ABCD* coïncide avec le point *E*.

1. Si $n = 5$, quel sera le sommet du carré *ABCD* confondu avec *E* dans la position finale ?

2. Toujours pour $n = 5$, quelle est la longueur de la trajectoire parcourue par le point *A* depuis la position initiale jusqu'à la position finale ?

3. Pour quelles valeurs de n, le point *A* est-il confondu avec le point *E* dans la position finale ?

11-c : ES-L-T- Une multiplication olympique

Pour calculer le produit 2651×34, Luc a posé la multiplication suivante, pour obtenir le résultat 90134.

$$\begin{array}{r} 2651 \\ \times \quad 34 \\ \hline 10604 \\ 7953 \\ \hline 90134 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{OLYM} \\ \times \quad \mathrm{PI} \\ \hline 9394 \\ \mathrm{ADE}? \\ \hline ?????\end{array}$$

Dans la multiplication ci-contre, on a adopté la même disposition.

En sachant que deux lettres différentes représentent toujours deux chiffres différents, trouver le résultat de cette multiplication.

11-d : ES-L-T- Réussir 2009

On construit successivement des nombres de la façon suivante :

On débute avec le nombre 4 et on lui applique au choix l'une des règles suivantes :

– on le divise par 2 (cette règle ne peut être appliquée que si le résultat est entier)

– on le multiplie par 10

– on le multiplie par 10 et on ajoute 4.

On réitère le processus autant de fois que l'on veut.

Par exemple on construit la suite de nombres : 4 – 2 – 20 – 204 – 102 – 51 – 510 ….

1. Montrer que l'on peut obtenir 3 en 5 étapes.

2. Comment obtenir le nombre 100 ?

3. Peut-on obtenir 2009 ?

4. Peut-on obtenir 2009 si la première règle est remplacée par : « on le divise par 3 », les autres règles étant inchangées ?

12. Lyon

http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/spip.php?article164

12-a : Itération (toutes séries)

On considère une séquence composée des lettres X, Y, Z que l'on suppose, pour simplifier, rangées dans l'ordre alphabétique. Par exemple la séquence XYXZY s'écrira XXYYZ.

À chaque étape on choisit d'ajouter à la séquence une des trois lettres X, Y ou Z et d'enlever les deux autres selon le schéma suivant :

- si on ajoute un X, on enlève un Y et un Z (si bien sûr Y et Z sont présents, sinon on s'arrête) ;
- si on ajoute un Y, on enlève un X et un Z (si X et Z sont présents, sinon on s'arrête) ;
- si on ajoute un Z, on enlève un X et un Y (si X et Y sont présents, sinon on s'arrête).

Par exemple, partant de la séquence XXYYZ :

- si on ajoute X, on enlève un Y et un Z, on obtient alors XXXY ;
- si on ajoute Y, on obtient XYYY ;
- si on ajoute Z, on obtient XYZZ ;

enfin, partant de la séquence XYY, on ne peut ajouter que Z et on obtient alors : YZ.

On réitère le processus autant que possible.

1. Quelles sont toutes les issues possibles en partant de la séquence XYZZ ?

2. Quelles sont toutes les issues possibles en partant de la séquence XYYZZZ ?

3. On part d'une séquence composée de 6 lettres.

Lorsqu'il est possible d'arriver à une séquence d'une seule lettre, quel est le nombre d'étapes nécessaires ?

4. On part de la séquence composée de dix X, onze Y et douze Z. Quelle(s) lettre(s) obtient-on dans les issues formées d'une seule lettre ?

5. Trouver une séquence de dix lettres aboutissant à la seule lettre X.

12-b : Série S : Cercles inscrits

On considère un triangle ABC rectangle en A. On note a = BC ; b = CA ; c = AB.

On appelle (C) le cercle inscrit dans le triangle ABC ; on rappelle que le centre du cercle inscrit d'un triangle est le point d'intersection des bissectrices. On appelle r le rayon de ce cercle.

1. Démontrer que $r=\frac{1}{2}(b+c-a)$.

2. PQR est un triangle rectangle en P. H est le pied de la hauteur de PQR issue de P.

On appelle (C_1), (C_2) et (C_3) les cercles inscrits dans les triangles PQH, PQR et PRH. r_1 est le rayon de (C_1), r_2 celui de (C_2) et r_3 celui de (C_3). Démontrer que $\mathrm{PH}=r_1+r_2+r_3$.

3. Dans un triangle DEF, l'orthocentre est K et le pied de la hauteur issue de E est E_0.

Les cercles inscrits dans les triangles DE_0K et FE_0K ont même rayon. Que peut on dire du triangle DEF ?

12-c : Autres séries : Tablette de chocolat

Une tablette de chocolat rectangulaire, dont les bords sont lisses est constituée de a barres comportant chacune b carreaux.

Dans un premier temps on prendra a = 8 et b = 4.

On veut séparer tous les carreaux de la tablette et on s'intéresse au nombres de cassures à réaliser.

Les cassures sont rectilignes et laissent des bords irréguliers.

Partie A

1. On sépare les huit barres, puis les quatre carreaux de chaque barre. Combien de cassures a-t-on faites ?

2. On sépare quatre rangées de huit carreaux, puis les huit carreaux de chaque rangée. Combien de cassures a-t-on faites ?

3. On suppose maintenant que la tablette possède a barres de b carreaux.

On sépare les a barres, puis les b carreaux de chaque barre. Combien de cassures a-t-on faites ?

4. On sépare b rangées de a carreaux, puis les a carreaux de chaque rangée. Combien de cassures a-t-on faites ?

5. On commence par casser la tablette en deux tablettes, l'une avec c barres de b carreaux et l'autre avec $a-c$ barres de b carreaux, puis on utilise la technique de la question 3. pour chacune des deux tablettes.

Combien de cassures a-t-on faites ?

Partie B

Tous les carreaux d'une tablette $a \times b$ ont été séparés. On supposera dans cette question que $3 \leq a < b$. Le tiers des carreaux n'a aucun bord lisse.

1. Trouver une relation entre a et b.

2. Pour quelles valeurs de b a-t-on $a \geq 4$?

3. En déduire a et b.

13. Marseille

http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/olymp-an.htm

13-a : Une épreuve

Une épreuve de mathématiques comporte quatre questions.

Pour chaque question, on obtient 0 point si la réponse est fausse ou 5 points si la réponse est bonne.

Une des questions consiste à trouver l'aire totale des six faces d'un cube dont le côté s'exprime par un nombre entier de mètres.

Une autre des questions est la suivante :

« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20 euros, baisse de 20 %. Quel est son nouveau prix ? »

Les réponses des élèves, sans unité, sont données par le tableau suivant :

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucille	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

Les notes 0 et 20 ont toutes deux été attribuées.

Quelles sont les notes de chacun des élèves ? Justifier les réponses données.

Correction

En ce qui concerne la surface totale des six faces du cube, les réponses possibles sont :$\{6 \times 1^2 \ ; \ 6 \times 2^2 \ ; \ 6 \times 3^2 \ ; \ \ldots\}$

Parmi les réponses proposées, seul 24 convient puisque nous savons qu'un élève a eu 20.

La réponse à la question est 24.

La réponse à la question « Le prix d'une chemise vendue avant les soldes à 20€, baisse de 20%. Quel est son nouveau prix ? » est $20 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 16$.

Supposons que 16 soit la bonne réponse à la première question.

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	**16**	18	16	**10**
Carina	12	**24**	12	14
Jérôme	12	**24**	16	18
Lucile	8	18	14	**10**
Myriam	**16**	26	16	14
Nicole	8	**24**	**18**	18
Saïda	8	20	16	**10**
Yves	**16**	**24**	**18**	**10**

Dans ce cas, comme nous le voyons dans le tableau ci-dessus, seul Yves aurait 20, et en considérant les bonnes réponses d'Yves, personne n'aurait 0. Ce cas est exclu.

16 est donc la réponse à la troisième question.

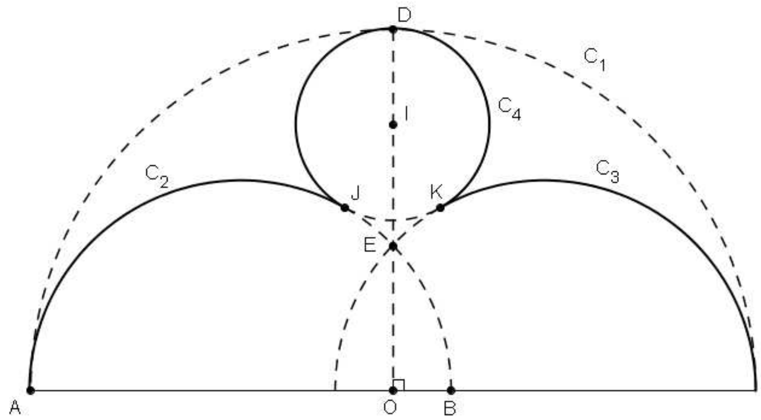
	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	**18**	**16**	10
Carina	**12**	**24**	12	14
Jérôme	**12**	**24**	**16**	**18**
Lucile	8	18	14	10
Myriam	16	26	**16**	14
Nicole	8	**24**	18	**18**
Saïda	8	20	**16**	10
Yves	16	**24**	18	10

Jérôme est le seul à pouvoir avoir 20. En considérant les bonnes réponses de Jérôme, les autres notes en découlent : Lucile a eu 10, Ales, Myriam, Saïda et Yves ont eu 5, Carina et Nicole ont eu 10.

13-b : S - Johnny Rockstar

Pour les besoins de son nouveau spectacle, le célèbre chanteur Johnny Rockstar souhaite créer une scène de spectacle moderne.

Cette scène est représentée vue de dessus par le schéma suivant :



Le demi-cercle C_1 de centre O passant par le point A et le demi-cercle C_2 de diamètre [AB] sont tangents en A. La droite (OD) est axe de symétrie de la figure et le point D appartient à C_1.

Le demi–cercle C_3 est le symétrique de C_2 par rapport à (OD).

Le point E est le point d'intersection du segment [OD] et de C_2.

Des contraintes de constructions imposent que OA=10 m et DE=6 m.

1. Calculer le rayon de C_2.

2. C_4 est le cercle de centre I passant par le point D. C_4 est tangent à C_1 en D, tangent à C_2 en J, et tangent à C_3 en K. Calculer le rayon de C_4.

Propriété admise :
Si deux cercles de centre Ω et Ω' sont tangents en un point M, alors Ω , Ω' et M sont alignés.

Correction

1. E $\in$ [OD], donc $OE = OD - ED = 10 - 6 = 4$.
Dans le triangle AOE rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :
$AE^2 = AO^2 + OE^2$
$AE^2 = 10^2 + 4^2 = 116$. On en déduit : $AE = \sqrt{116}$

Le point E appartient à $\mathcal{C}_2$, donc le triangle ABE est rectangle en E.

Les triangles AOE et ABE sont deux triangles rectangles qui ont un angle aigu en commun. Ils sont semblables.

Dès lors $\dfrac{AO}{AE} = \dfrac{AE}{AB}$. Il vient $AB = \dfrac{AE^2}{AO} = 11,6$.

Le rayon de $\mathcal{C}_2$ a donc pour mesure 5,8 m.

2. Soit Ω le centre du cercle $\mathcal{C}_2$ et r le rayon de $\mathcal{C}_3$. $\Omega I = 5,8 + r$.
D'autre part, I $\in$ [OD], donc $OI = OD - ID = 10 - r$, et $\Omega \in$ [AO], donc $\Omega O = AO - A\Omega = 10 - 5,8 = 4,2$.

Dans le triangle ΩOI rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $\Omega I^2 = \Omega O^2 + OI^2$, $(5,8 + r)^2 = 4,2^2 + (10 - r)^2$.

En développant, il vient : 31,6 r = 84, c'est-à-dire $r = \dfrac{210}{79}$ m.

13-c : ES-L-T - Triangles rectangles

1. Question préliminaire :

À l'aide de la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels a et b avec $a \le b$ tels que : $a^2 + b^2 = 225$.

2. On cherche tous les triangles ABC rectangles en A, tels que AB = 8 et tels que BC et AC s'expriment à l'aide de nombres entiers.

a. Calculer $\mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2$.

b. Donner toutes les décompositions possibles de 64 sous la forme d'un produit de deux entiers naturels.

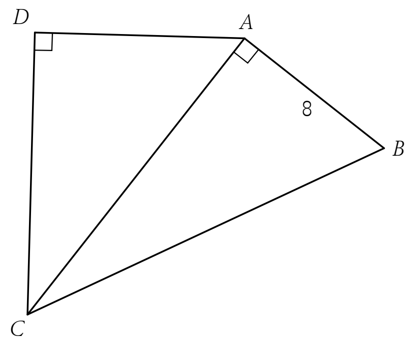
c. y et z étant deux nombres entiers naturels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z + y = 16 \\ z - y = 4 \end{cases}.$$

En déduire un couple de valeurs possibles pour AC et BC.

d. Peut-on trouver d'autres couples de valeurs pour AC et BC ?

3. On considère la figure suivante :



Déterminer les longueurs AC, BC, AD et CD sachant que ces longueurs s'expriment à l'aide de nombres entiers.

Correction

1. Question préliminaire
A l'aide de la calculatrice, $a = 9$ et $b = 12$ sont les seuls entiers naturels avec $a \leqslant b$ tels que $a^2 + b^2 = 225$.

2.a) Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où $BC^2 - AC^2 = AB^2 = 8^2 = 64$.

b) $64 = 1 \times 64$
$64 = 2 \times 32$
$64 = 4 \times 16$
$64 = 8 \times 8$.

c) Le couple $(y = 6 \; ; \; z = 10)$ est solution du système.
Dès lors, $64 = 16 \times 4 = (z + y)(z - y) = z^2 - y^2 = BC^2 - AC^2$.
Le couple $(AC = 6 \; ; \; BC = 10)$ répond donc à la question.

y et z ont joué le rôle de AC et BC.
Seules les valeurs entières positives de y et z nous intéressent.
Considérons les autres décompositions de 64 et étudions les systèmes associés compte tenu que $z + y \geqslant z - y$:

$$\begin{cases} z+y = 64 \\ z-y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} z+y = 32 \\ z-y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} z+y = 8 \\ z-y = 8 \end{cases}$$

Seul le deuxième système permet d'obtenir des valeurs entières strictement positives. Le couple $(AC = 15 \; ; \; BC = 17)$ répond donc à la question.

Remarque : on a déterminé tous les couples $(AC \; ; \; BC)$ répondant à la question.

3. D'après ce qui précède, soit $AC = 6$ soit $AC = 15$.
Or il n'existe pas d'entiers naturels avec $a \leqslant b$ tels que : $a^2 + b^2 = 36$.
Le cas $AC = 6$ est donc exclu.

D'autre part, d'après la question préliminaire, $9^2 + 12^2 = 15^2$, 9 et 12 étant les seuls entiers qui vérifient $a^2 + b^2 = 225$.
On en déduit : $AC = 15$, $BC = 17$, $AD = 9$ et $DC = 12$.

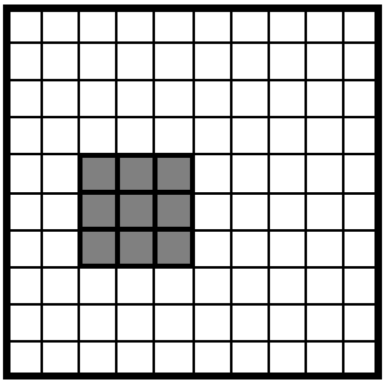
14. Montpellier

http://webpeda.ac-montpellier.fr/mathematiques/spip.php?article37

14-a : S- Le Cardiff de Khâré

Il y a fort longtemps, dans une province lointaine nommée Khâré, se trouvait le palais du « Grand Cardiff ». Dans ce palais on pouvait admirer une salle d'apparat de forme carrée, pavée avec a^2 carreaux carrés de taille identique. Parmi ceux-ci il y a b^2 carreaux carrés colorés dessinant un motif carré, le reste du pavage étant formé de carreaux carrés blancs.

Exemple de situation avec motif de 32 carreaux dans une salle de 102 carreaux



Le grand mathématicien Factos se présente au palais pour servir le Cardiff qui interpelle Factos ainsi :

– « Dans ma salle d'apparat, il y a deux mille neuf carreaux blancs, donne-moi le nombre total de carreaux de la salle alors tu seras à mon service.

– Mais, vénérable Cardiff, il y a trois solutions !

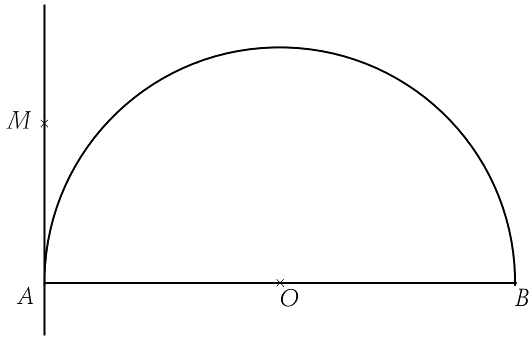
– C'est pour ce que tu viens de répondre que tu es engagé », répondit le Cardiff.

1. Vérifier que 1005^2 carreaux est une solution possible.

2. Déterminer les deux autres solutions de Factos au problème du Cardiff de Khâré.

14-b : S- Cercle et segment

1. Dans la figure représentée ci-dessous, le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O et les droites (AM) et (AB) sont perpendiculaires. Reproduire la figure ci-dessous et construire à la règle et au compas la droite passant par M, différente de (AM) et tangente au demi-cercle de diamètre $[AB]$.



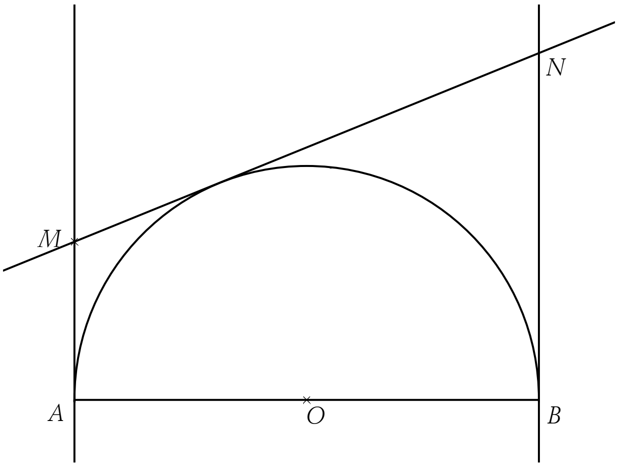
2. On reprend la même figure avec, de plus, les droites (BN) et (MN). Les droites (BN) et (AB) sont perpendiculaires et la droite (MN) est tangente au cercle de diamètre $[AB]$.

On pose : $AM = x$ et $NB = y$.

Montrer que :

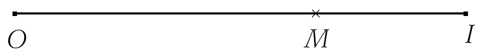
a. $x + y = MN$

b. $x.y = OA^2$



3. L'unité de mesure est définie par la longueur du segment $[OI]$. M est un point de la demi-droite $[OI)$ et le segment $[OM]$ mesure x.

Construire à la règle et au compas un rectangle d'aire 1 et dont un côté mesure x.



14-c : L-ES-T - Rugby

Au rugby, après décision de l'arbitre, les équipes marquent des points lors de trois phases de jeu :

– En réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points,

– En réussissant un drop pour 3 points,

– En marquant un essai qui sera soit « transformé » soit « non transformé » : s'il est « transformé » il rapporte 7 points, s'il est « non transformé », il rapporte 5 points.

1. Eric affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais. Est-ce possible ? Justifier.

2. Bénédicte rapporte que son équipe a marqué 36 points grâce à quatre essais et plusieurs pénalités. Combien de ces essais ont été « transformés » ?

3. Une équipe a marqué 30 points, trouver toutes les manières dont ces 30 points ont pu être obtenus.

4. Quels sont les scores impossibles au rugby ?

14-d : L-ES-T - La pièce et l'oie

Il s'agit d'un jeu de l'oie où l'on joue avec une pièce de monnaie. On part de la case départ (case 0), on lance la pièce ; si le pile sort on avance d'une case ; si le face sort on avance de deux cases. On appelle trajet une séquence de la forme (1 ; 1 ; 2 ; 1) qui résulte dans ce cas du tirage PILE/PILE/FACE/PILE (et qui fait tomber sur la case 5).

1. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 5.

2. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 5…

a. qui passent par la case 4 ?

b. qui ne passent pas par la case 4 ?

3. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 12 ?

4. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 12 en passant par la case 8.

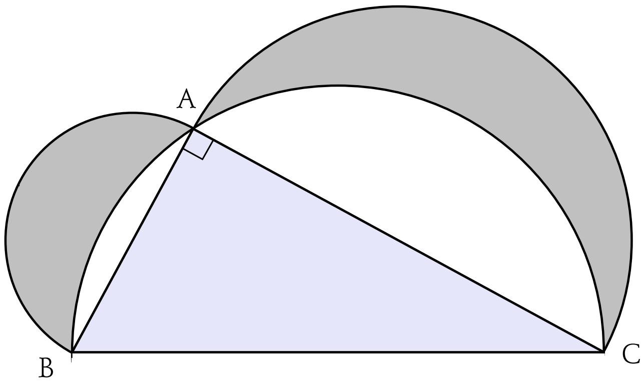
15. Nancy-Metz

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/olympiad.htm

15-a : Les tapis

1. « Les lunules d'Hippocrate de Chios »

Soit ABC un triangle rectangle en A. On construit le demi-cercle de diamètre [BC] passant par A et les demi-cercles extérieurs au triangle ABC de diamètres [AB] et [AC]. Les demi-cercles ainsi tracés délimitent deux « croissants de lune » ou « lunules ».



Montrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle ABC.

2. « Le principe des tapis »

On considère une pièce d'aire A et deux tapis de formes quelconques dont la somme des aires est égale à A. On dispose les deux tapis à l'intérieur de la pièce. Certaines zones ne sont pas recouvertes, d'autres sont couvertes par un seul des deux tapis et d'autres enfin le sont par les deux tapis superposés.

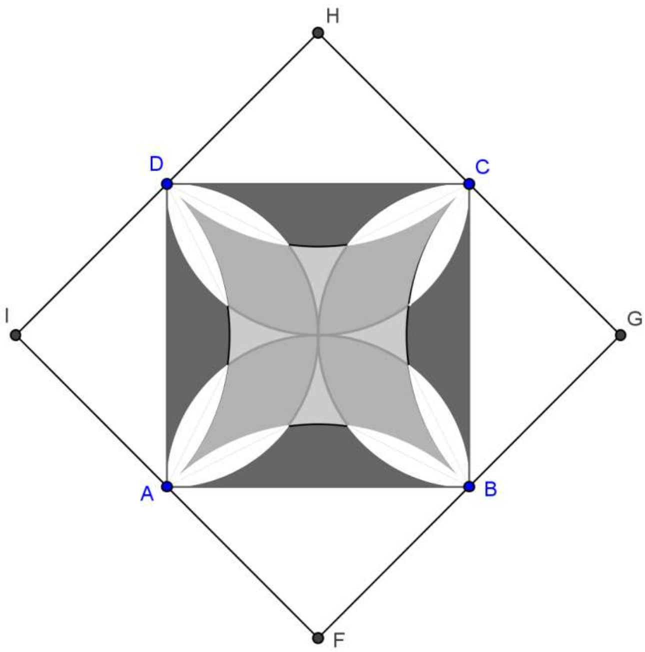
Justifier que l'aire de la partie de la pièce non recouverte est égale à l'aire de la partie couverte par les deux tapis en même temps.

3. Pour cette question, on peut utiliser :

- soit les résultats des questions 1 et 2 ;
- soit toute autre méthode.

Cette figure comporte deux carrés ABCD et FGHI, quatre demi-cercles dont les diamètres sont les côtés du carré ABCD et quatre quarts de cercle de centres F, G, H et I.

Montrer que l'aire colorée en gris moyen est égale à l'aire colorée en gris foncé.

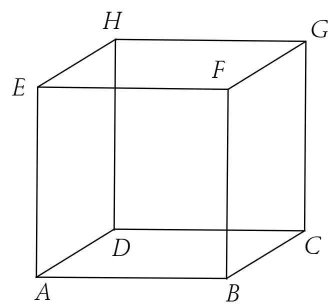
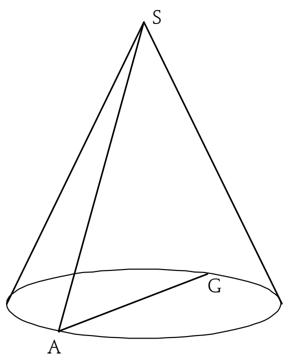
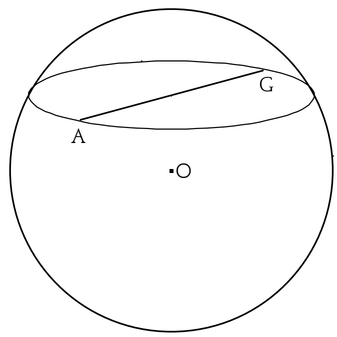


15-b : S-STI- La course des escargots

Trois escargots Li, Ma et Son adorent la compétition, mais à chaque fois qu'ils font une course, ils se retrouvent ex-æquo car ils se déplacent à la même vitesse.

Ils ont alors l'idée suivante : chacun va effectuer un parcours différent, Li sur un cube, Ma sur un cône, et Son sur une sphère (voir figures), chacun devant relier A à G en se déplaçant sur la surface extérieure du solide.

Les solides étant posés sur le sol, Li ne peut pas passer par la face ABCD et Ma ne peut pas passer par la base.

Parcours de Li	Parcours de Ma	Parcours de Son
		
L'arête du cube mesure 30 cm.	Le diamètre du cercle de base mesure 50 cm. A et G sont diamétralement opposés sur le cercle de base. Le segment [AS] mesure 60 cm.	Le rayon de la sphère de centre O mesure 30 cm. A et G sont diamétralement opposés sur le même parallèle. L'angle $\widehat{AOG}$ mesure 120°.

1. Parcours de Ma

Dessiner un patron du cône à l'échelle 1/10. Représenter sur ce patron la trace du trajet le plus court menant de A à G sur le cône. Calculer à 1 mm près la longueur de ce trajet.

2. Parcours de Li

Calculer à 1 mm près la longueur du trajet le plus court menant de A à G sur le cube.

3. Parcours de Son

Son peut-il espérer gagner la course ?

15-c : ES-L-T- La course des fourmis

Deux fourmis Four et Mi disputent une course. Chacune des deux fourmis doit partir d'un point A et rejoindre un point M par le chemin le plus court sur la surface d'un solide posé sur le sol.

Four se déplace sur un cône de révolution de sommet S tel que :

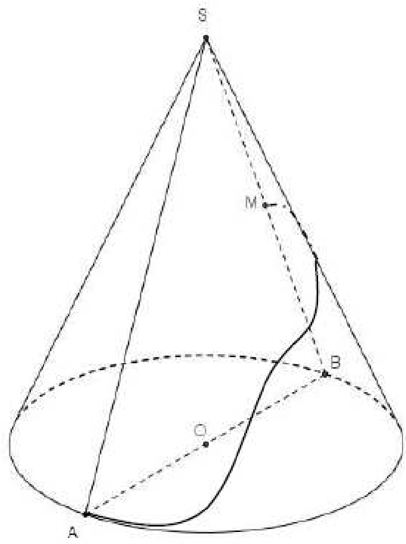
- le rayon de la base mesure 4 cm ;
- le segment [SA] mesure 12 cm ;
- B et A sont diamétralement opposés sur le cercle de base ;
- M est le milieu du segment [SB].

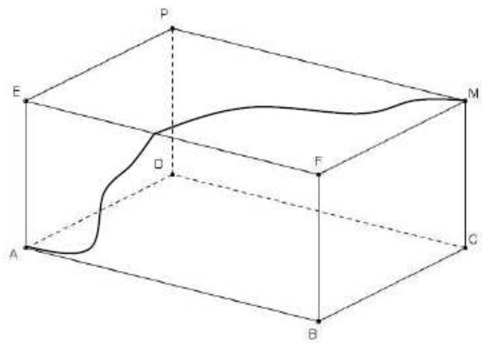
Mi se déplace sur un parallélépipède rectangle ABCDEFMP tel que :

- le segment [AB] mesure 7 cm ;
- le segment [AD] mesure 4 cm ;
- le segment [AE] mesure 3 cm.

La course est-elle équitable ? Autrement dit les deux fourmis ont-elles la même distance à parcourir ?

(On aura avantage à raisonner à partir de patrons des deux solides).





16. Nice

http://www.ac-nice.fr/maths/

16-a : S- 2009 Année étoilée !

On s'intéresse aux nombres entiers non nuls N possédant la propriété (*) suivante :

N peut s'écrire comme somme de deux entiers dont le produit est divisible par N, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers a et b tels que $N = a + b$ avec $a + b$ diviseur de ab (*)

On appellera composantes de N, des entiers a et b convenables et on pourra dire N est étoilé.

Exemple : 9 est étoilé car $9 = 3 + 6$ et $3 \times 6 = 18$ est divisible par 9.

On dit que le nombre entier N est un carré parfait s'il existe un nombre entier a tel que $a^2 = N$.

On dit qu'un nombre entier est premier s'il est plus grand que 1 et s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

1. Trouver tous les nombres entiers jusqu'à 20 qui sont étoilés et ceux qui ne le sont pas.

2. Montrer que 25 et 36 sont étoilés, puis montrer que si N est un carré parfait alors N est étoilé.

3. Soit N un entier étoilé et p un diviseur premier de N ($p > 1$) ; montrer que p divise les deux composantes de N.

4. Montrer que 2009 est étoilé.

5. Montrer que si $N = p \times q$ avec p et q premiers alors N n'est pas étoilé. Que dire de 2010 ?

6. Soit N un nombre entier non nul, donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit étoilé.

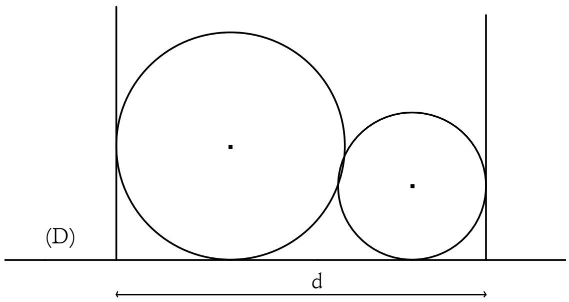
16-b : S- Le rangement des balles et les ballons

1. Deux ballons sont posés côte à côte comme le suggère le dessin ci-contre (les deux cercles sont tangents entre eux et à la droite (D)). L'un des ballons a pour rayon 9 cm.

Si l'autre ballon a pour rayon 4 cm, que vaut la distance d ?

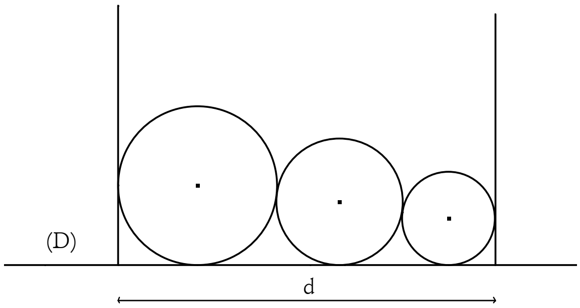
Si la distance d = 30 cm, que vaut le rayon du deuxième ballon ?

Mais si la distance vaut 18 cm, que vaut alors le rayon du deuxième ballon ?



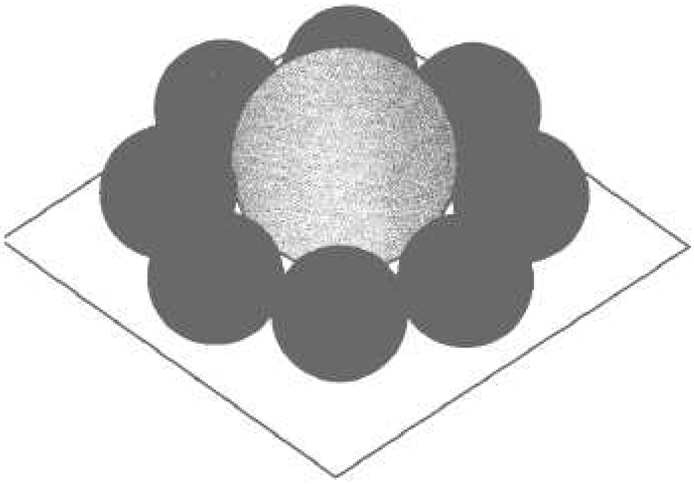
2. Je veux ranger maintenant 3 ballons de rayons respectifs 3, 4 et 5 cm, disposés côte à côte comme précédemment (les 3 cercles sont tangents entre eux et tangents à une droite (D)).

Dans quel ordre les disposer pour avoir la longueur d minimum ?



Si les ballons ont pour rayons respectifs r_1, r_2 et r_3, peut-on généraliser le résultat obtenu ?

3. Toujours pour gagner de la place, j'ai disposé mes 8 balles de tennis autour d'un ballon de telle sorte que les 8 balles soient tangentes entre elles, tangentes au plan sur lequel elles sont posées et tangentes au ballon qui a 4 cm de rayon. Quel est le rayon des balles de tennis ?



16-c : ES-L- Carte de fidélité

Un supermarché propose un jeu pour fidéliser sa clientèle.

On donne à chaque client une carte de 10 coupons et un capital fictif de 1 €.

A chaque passage en caisse, le client donne un coupon par tranche de 10 € d'achat et voit son capital multiplié par le nombre de coupons donnés.

Ainsi, si son achat est de 30 €, il donne 3 coupons et sa cagnotte est alors multipliée par 3.

Il pourra toucher son capital à la fin de sa carte.

1. Un client fait un premier achat de 100 €, quel est le montant de son capital ?
2. Un autre client, chaque jour pendant 10 jours, fait un achat pour un montant de 10 €, quel est au final le montant de son capital ?
3. Un troisième client fait un achat de 50 € suivi le lendemain d'un autre achat de 50€. Quel est le montant de son capital ?
4. Un client a fait plusieurs achats successifs pour un total de 100 € et il a un capital de 12€. Quels sont les montants de ses achats successifs ?
5. Comment peut-on répartir ses achats pour avoir le capital le plus élevé possible ?
6. Voyant le succès du jeu, le supermarché décide d'éditer des cartes de 20 coupons, mais il fait rapidement faillite ! Quel est le capital maximum pouvant être gagné par un client avec une carte de 20 coupons et un capital de départ de 1 € ?

16-d : ES-L- Distance sur un carré

ABCD est un carré de côté 4 cm et de centre *O*. Soit *M* un point qui décrit ce carré. On appelle « abscisse de *M* » la distance *x* (en cm) qu'a parcouru le point *M* à partir du point *A* lorsqu'il s'est déplacé sur le carré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

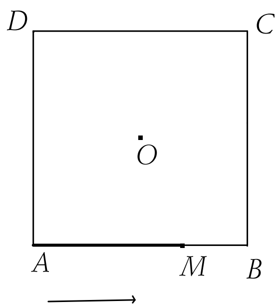


Figure 1

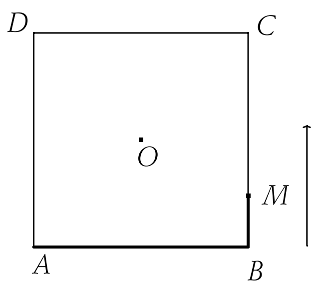


Figure 2

Ainsi, sur la figure 1, on a $x = 3$ et sur la figure 2, on a $x = 4 + 2 = 6$.

Question 1 : On note $f(x)$ la distance entre le point *O* et le point *M*.

Exemple : lorsque le point *M* est sur *A* alors $x = 0$ et $f(0) = OA$ soit, puisque $OA = \sqrt{2}$, $f(0) = \sqrt{2}$.

Représenter *f* sur le graphique 1 (voir annexe).

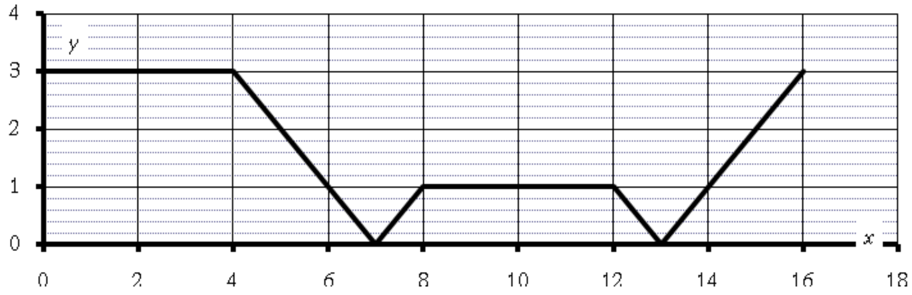
P et *Q* sont deux points distincts situés à l'intérieur du carré *ABCD* ou sur la frontière de celui-ci. On note $f(x)$ l'aire du triangle *MPQ*.

Question 2 : Dans cette question *P* est le milieu de [*OD*] et *Q* le milieu de [*OA*]. Tracer le triangle *MPQ* sur le graphique 2 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de *f* sur le graphique 3.

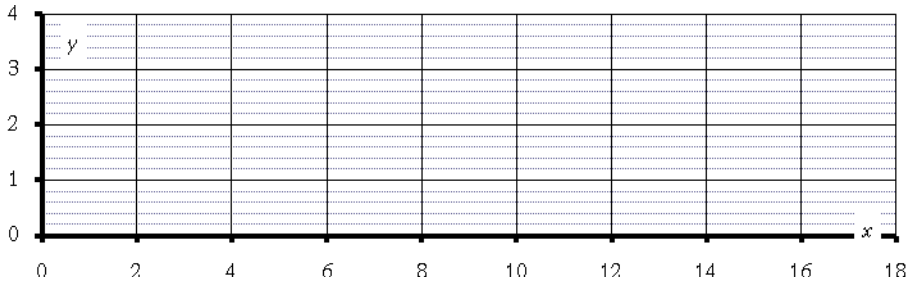
Question 3 : Dans cette question, *P* est le milieu de [*OD*] et *Q* le milieu de [*OB*]. Tracer le triangle *MPQ* sur le graphique 4 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de *f* sur le graphique 5.

Question 4 : Dans cette question, P est le milieu de $[OD]$, I est le milieu de $[AB]$ et Q le milieu de $[OI]$. Tracer le triangle MPQ sur le graphique 6 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de f sur le graphique 7.

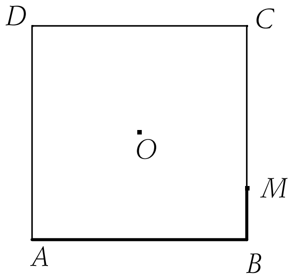
Question 5 : Dans cette question, P et Q sont des points à l'intérieur du carré. La représentation graphique de f est donnée ci-dessous. Déterminer avec précision les positions possibles de P et Q.



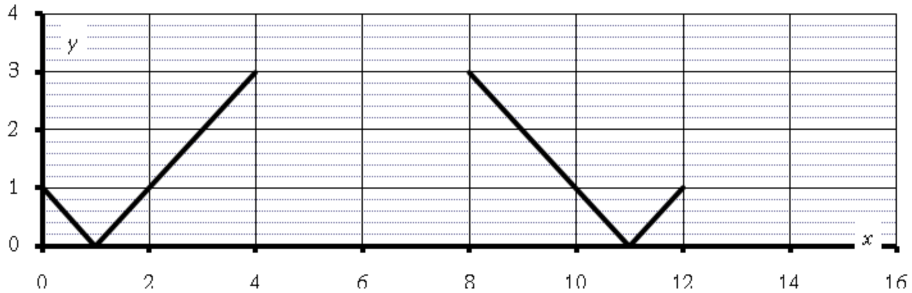
Annexe à rendre avec la copie



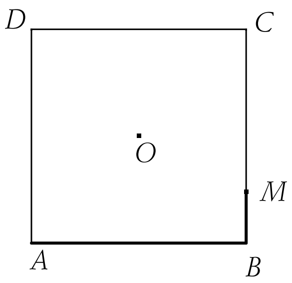
Graphique 1



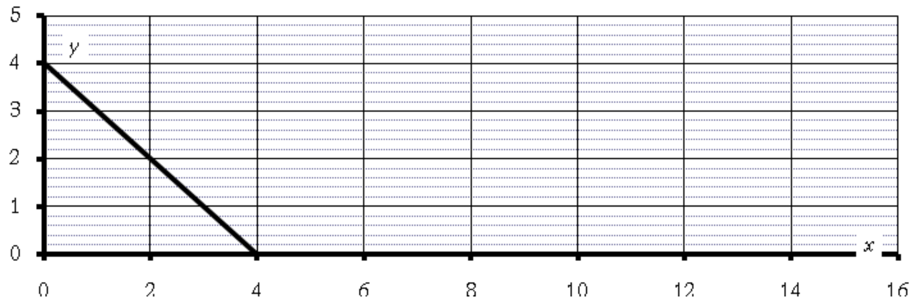
Graphique 2



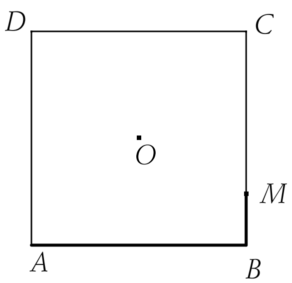
Graphique 3



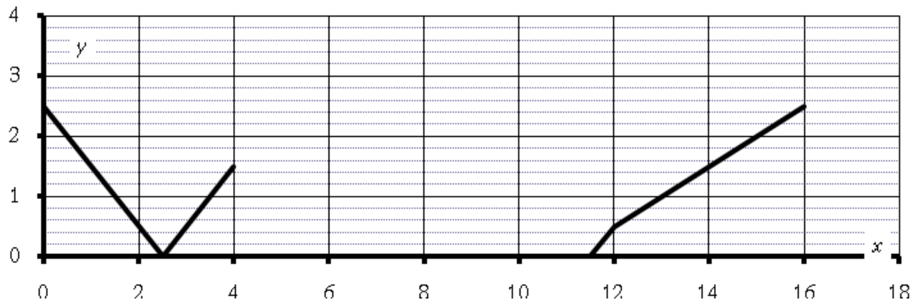
Graphique 4



Graphique 5



Graphique 6



Graphique 7

17. Orléans Tours

http://maths.tice.ac-orleans-tours.fr/php5/spip/

17-a : Simplifications scandaleuses

Un élève a écrit $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$, ce qui est juste mais il explique qu'il a obtenu cette égalité en « simplifiant par 6 » :

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}.$$

1. Montrer à l'aide d'un exemple qu'une simplification de ce type n'est pas toujours possible.

Dans la suite de l'exercice, a, b et c sont des nombres entiers pris parmi les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

On précise que la notation $\overline{ab}$ représente l'entier dont l'écriture décimale admet b pour chiffre des unités et a pour chiffres des dizaines. Autrement dit : $\overline{ab} = b + 10a$, la barre placée au dessus des chiffres a et b permettant d'éviter une éventuelle confusion avec le produit ab.

De même $\overline{abc}$ représente l'entier dont l'écriture décimale admet c pour chiffre des unités, b pour chiffres des dizaines et c pour chiffre des centaines. Autrement dit : $\overline{abc} = c + 10b + 100a$, etc…

2. Le but de cette question est de déterminer toutes les fractions du type $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ où la « simplification scandaleuse » $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \dfrac{a}{c}$ est possible.

a. Démontrer que l'on a l'égalité $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \dfrac{a}{c}$ si et seulement si $b = \dfrac{9ac}{10a - c}$.

b. En examinant tous les cas possibles pour les chiffres a et c, indiquer toutes les fractions du type $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ où la « simplification scandaleuse » est possible.

3. On s'intéresse maintenant aux fractions telles que $\dfrac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \dfrac{a}{c}$.

a. Exprimer b en fonction de a et c pour que l'on ait l'égalité $\dfrac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \dfrac{a}{c}$.

b. En déduire toutes les fractions du type $\dfrac{\overline{abb}}{\overline{bbc}}$ où la « simplification scandaleuse » $\dfrac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \dfrac{a}{c}$ est possible.

4. Conjecturer quelles sont les fractions du type $\dfrac{\overline{ab\ldots b}}{\overline{b\ldots bc}}$ (avec 2009 chiffres b au numérateur et au dénominateur) où la « simplification scandaleuse » $\dfrac{\overline{ab\ldots b}}{\overline{b\ldots bc}} = \dfrac{a}{c}$ est possible.

17-b : MILA est très carré …

Le Docteur Watson rapporte à Sherlock Holmes une affaire étonnante.

« Mon cher Holmes, j'ai lu cette énigme dans le « Times » :

> *Le Colonel Mila, agent secret surnommé « Mila le carré » dans les milieux du contre-espionnage pour sa carrure herculéenne, a disparu hier en laissant derrière lui les plans d'un sous-marin. Or, il se fait que le Colonel a caché ces plans dans l'une des cabines d'un paquebot lors de son dernier voyage.*
>
> *On ne connaît pas le numéro de la cabine, ni le pont sur lequel elle se trouve, mais on dispose des indications suivantes :*
>
> - *ABC est un triangle tel que BC = 8 cm.*
> - *Les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].*
> - *Le point M est le symétrique du point J par rapport au point K, et le point L est le symétrique du point K par rapport au point J.*
> - *Le quadrilatère MILA a au moins un angle droit.*
> - *Le numéro du pont est donné par la longueur en cm du segment [AI], et celui de la cabine par la mesure en cm² de l'aire du quadrilatère MILA* ».

1^ère PARTIE

Retrouver le numéro du pont sur le lequel se trouve la cabine du Colonel Mila.

2^ème PARTIE

Holmes réfléchit et, un peu agacé, dit :

« Il doit certainement manquer un élément dans votre énigme, mon cher Watson ! ».

Watson répond :

« Ah, oui ! Je n'avais pas vu la fin ... Il est aussi écrit que :

- *Le quadrilatère $MILA$ est un carré.*

Qu'en pensez-vous, mon cher Holmes ? ».

Retrouver le numéro de la cabine dans laquelle se trouvent les plans cachés par le colonel Mila, avant de pouvoir répliquer : « *Elémentaire, mon cher Watson* ! ».

3ème PARTIE

Piqué au vif, Watson poursuit seul la lecture de l'article :

« L'espion avait aussi caché les plans d'une base navale alliée dans une autre cabine dont le numéro est donné par la mesure de l'aire, en cm², du pentagone CLAMB ».

Sachant que le quadrilatère MILA est un carré, déterminer dans quelle cabine se trouvent les plans de la base navale.

18. Paris

http://mathematiques.ac-paris.fr/

18-a : Cercle inscrit - tous sauf S

Un cercle de rayon 1 est inscrit dans un triangle équilatéral ABC. Les points D et E sont tels que $BCDE$ soit un rectangle, le point A étant le milieu de $[DE]$. Quel est le diamètre du cercle passant par les points B, C, D et E ?

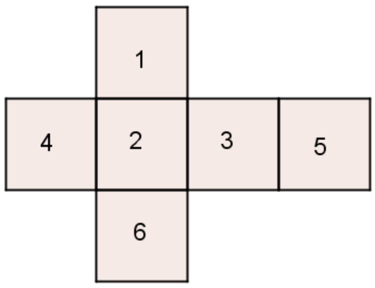
18-b : Y'a des dés – tous sauf S

On superpose n dés (n entier naturel non nul) identiques dont un patron est donné ci-dessous et on calcule la somme des points marqués sur toutes les faces visibles de la pile.

On remarque qu'ne posant le dernier dé de la pile,

- si la face supérieure est 1, la somme est un nombre premier,
- si la face supérieure est 2, la somme est un multiple de 2,
- si la face supérieure est 3, la somme est un multiple de 3,
- si la face supérieure est 4, la somme est un multiple de 4,
- si la face supérieure est 5, la somme est un multiple de 5,
- si la face supérieure est 6, la somme est un multiple de 6.

Quelle est la plus petite valeur de n possible ?



18-c : Repneuf - S

Le but de l'exercice est de démontrer que si m est un entier naturel non nul, il existe un entier M multiple de m, tel que l'écriture de l'entier M comporte de gauche à droite une succession de 9 suivie ou non d'une succession de 0. Le nombre M sera par exemple égal à 9 ou 99 ou 90 ou 9999000…

1. Vérifier cette propriété pour les entiers m compris entre 1 et 6.

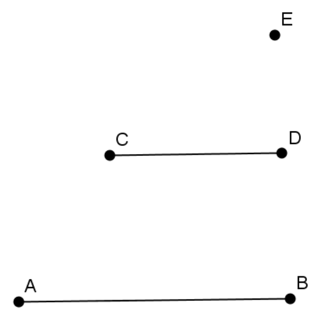
2. Déterminer un entier M répondant à la question dans le cas où m = 7 (on pourra chercher l'écriture décimale du nombre $\frac{1}{7}10^6 - \frac{1}{7}$).

3. Déterminer un entier M répondant à la question dans le cas où $m = 84$.

4. Démontrer la propriété dans le cas d'un entier naturel m quelconque non nul.

18-d : A la règle seule - S

1. Soit A, B, C, D quatre points du plan tels que les droites (AB) et (CD) soient strictement parallèles et tels que $AB \neq CD$. Montrer que l'on peut construire uniquement à l'aide d'une règle non graduée le milieu O du segment [AB]. Faire la construction ci-contre.



2. Soit A et B deux points distincts du plan, O le milieu du segment [AB] et E un point quelconque du plan. Montrer que l'on peut construire uniquement à l'aide d'une règle non graduée une parallèle à la droite (AB) passant par E.

3. Soit O un point du plan et r un réel strictement positif, Γ le cercle de centre O et de rayon r, [AB] un diamètre du cercle Γ. Montrer que l'on peut construire uniquement à l'aide d'une règle non graduée le symétrique B_1 de B par rapport à O. Faire cette construction.

19. Poitiers

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?rubrique26

19-a : La formule de Lagrange

Explicitez les calculs et raisonnements qui justifient le dialogue suivant où tous les nombres envisagés sont des entiers naturels.

- Quel est le reste de la division par 7 d'un carré ?
- Hum, on doit pouvoir s'en sortir en étudiant un nombre limité de cas...
- Si la somme de deux carrés est divisible par 7 alors les deux carrés sont, eux-mêmes, divisibles par 7 !
- Entendu, ils sont d'ailleurs tous divisibles par 49 !
- Au fait, 2009 est la somme de deux carrés !
- C'est vrai !
- On peut voir les choses autrement en considérant quatre nombres a, b, c et d. Si on développe l'expression

$$(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2$$

on constate que c'est le produit de deux facteurs...

- Oui, c'est épatant ! Cela porte un nom ?
- On dit que c'est la formule de LAGRANGE, elle est très utile. Prends 1105, c'est le produit de 3 nombres qui sont eux mêmes sommes de deux carrés !
- En effet, et grâce à la formule précédente, le produit de deux de ces facteurs est aussi la somme de deux carrés... Cela fait beaucoup de possibilités pour écrire 1105 comme somme de deux carrés !
- Tu en trouveras 4 !
- C'est fait. Et 2009, a-t-il aussi plusieurs décompositions en somme de deux carrés ?
- Tu peux utiliser la formule de LAGRANGE, mais cela ne donne qu'une seule décomposition.
- C'est normal, il n'y en a pas d'autres !

19-b : La chèvre de Monsieur Seguin

L'herbe est bien haute autour de la bergerie de Monsieur Seguin.

Il faudrait tondre.

Blanquette, son inséparable chèvre, va s'en charger. Monsieur Seguin l'attache au bout d'une corde et fixe l'autre bout de la corde à un piquet planté **le long d'un des murs** de la bergerie.

La chèvre peut ainsi brouter toutes les herbes que la corde lui permet d'atteindre. La base de la bergerie est un rectangle de 6 m de long sur 4 m de large, et la longueur de la corde disponible pour les mouvements de la chèvre est de 10 m. On suppose que le terrain est bien plan et on assimile le piquet et la chèvre à des points.

1. Calculer l'aire exacte que peut brouter Blanquette si monsieur Seguin plante son piquet à l'un des coins de la bergerie.

2. Montrer que monsieur Seguin doit justement placer son piquet à l'un de ces coins s'il veut que Blanquette broute une aire maximale.

19-c : Les quatres fille du docteur Marc

Les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG, ST2S avaient le choix de traiter l'exercice 4 de la série S ou bien l'exercice suivant :

Les quatre filles du Dr Marc sont toutes nées un 14 mars. Aujourd'hui c'est le jour de l'anniversaire collectif et, pour la première fois, le nombre de diviseurs de l'âge de l'ainée est strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la deuxième, qui est lui même strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la troisième, qui est bien sûr strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la plus jeune.

1. Quel est, au minimum, l'âge de l'ainée des quatre sœurs Marc ?

2. En supposant que l'ainée ait bien l'âge minimum demandé dans la première question, dans combien d'années cette curieuse situation se reproduira-t-elle pour la première fois ? (à condition, évidemment, que les quatre soeurs vivent jusqu'à ce moment.)

19-d : Les cinq fils du docteur April

Les cinq fils du Dr April sont tous nés un 1er avril. Lors de leur anniversaire collectif, le 01/04/2005, leur père s'est exclamé : « Les différences d'âge entre deux quelconques d'entre eux sont toutes différentes ! ».

1. Quel est, au minimum, l'âge de l'ainé des cinq frères April ?

2. En supposant que l'ainé ait bien l'âge minimum demandé dans la première question, dans combien d'années au minimum aucun des cinq âges ne sera-t-il un nombre premier ?

20. Reims (*)

21. Rennes

http://espaceeducatif.ac-rennes.fr/jahia/Jahia/lang/fr/pid/16941

21-a : Un peu de calcul

Evariste et Leonhard après un cours de mathématiques viennent se détendre au club des mathématiciens de leur université. Sur le comptoir trône une fontaine à eau qui se compose d'un cube de coté de longueur a surmonté d'une cruche.

On suppose que a est un nombre entier de *dm* et que la cruche contient 5 litres. Evariste demande à Leonhard s'il pense que le volume total de cette fontaine peut être un multiple entier de l'aire d'une face du cube.

Leonhard lui répond qu'il n'y a qu'une solution et à son tour il lui demande si à son avis ce volume peut-être un multiple de cette aire augmentée de 7 dm^2.

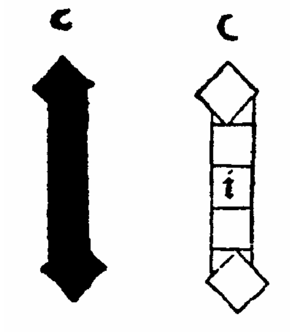
Quelle est la réponse de Leonhard ? Que pensez-vous de sa question ?

21-b : Cela aurait pu Durer …

Albrecht Dürer (1471-1528) est un peintre important de la Renaissance allemande. Il est particulièrement célèbre pour ses gravures. Il était aussi mathématicien et a publié en 1525 un livre « Instructions sur la manière de mesurer à l'aide du compas et de l'équerre » dont une partie est consacrée au tracé géométrique des lettres de l'alphabet.

Partie A Tracé de la lettre « i » en police *textura*

1. Lire le texte de Dürer ci-dessous.



Les lettres de l'ancienne gothique textura ont été formées à peu près comme celles que je vais décrire dans la suite, encore qu'on les fasse maintenant d'une manière différente.

Bien que l'alphabet débute par la lettre a, j'ai de bonnes raisons de lui préférer la lettre i, car à partir d'elle on peut former pratiquement toutes les autres lettres, soit en y ajoutant soit en y enlevant quelque chose.

Premièrement, forme la lettre i à l'aide de carrés, dont tu en empiles trois verticalement. Divise le côté supérieur du carré supérieur et le côté inférieur du carré inférieur, chacun par deux points en trois segments égaux.

Ensuite, place dessus un carré en pointe, c'est-à-dire tel que sa diagonale soit à la verticale sur le premier point du côté du carré. Ainsi, les sommets du carré en pointe débordent davantage à gauche qu'à droite. Ensuite, prolonge de part et d'autre les arêtes des carrés superposés jusqu'au carré en pointe.

Procède de même au bas de la lettre, mais place le sommet supérieur du carré sur le deuxième point, le plus à droite, du côté inférieur du carré. Abaisse latéralement les deux arêtes des carrés verticaux jusqu'au carré en pointe. Ainsi est formée la lettre i. Dessine au-dessus, avec une plume plus fine, une petite demi-lune.

2. Construire selon ses instructions le « i » à la règle et au compas dans la grille fournie. Les lignes de construction seront laissées apparentes et les théorèmes de géométrie utilisés seront indiqués. Proposer une construction alternative du « carré en pointe » inférieur.

3. Déterminer par le calcul de combien déborde à droite et à gauche le carré en pointe par rapport au rectangle vertical du corps du « i ».

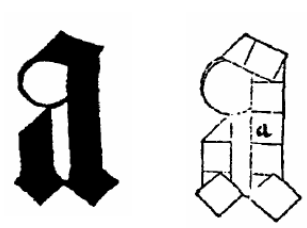
Partie B Tracé de la lettre « a »

1. Lire le texte de Dürer ci-dessous.

Item forme la lettre n à partir de deux jambages de la lettre i de sorte que leurs têtes et pieds respectifs se touchent. Ainsi, l'espace compris entre les jambages sera plus étroit qu'un trait de lettre. Mais n'y mets plus de lunule.

Donne la même hauteur à toutes les lettres brèves de l'alphabet. [...]

Construis le r comme le i, mais rajoute en tête à droite un carré dont un sommet touche le i.



Item le a, forme sa moitié inférieure comme le n, mais tronque l'extrémité en haut à gauche du jambage gauche le long de la diagonale du carré médian. Conserve dans le jambage droit les trois carrés empilés, **mais incline un peu davantage le carré en pointe de telle sorte que, joint à un demi carré, ils atteignent la hauteur de la lettre.**

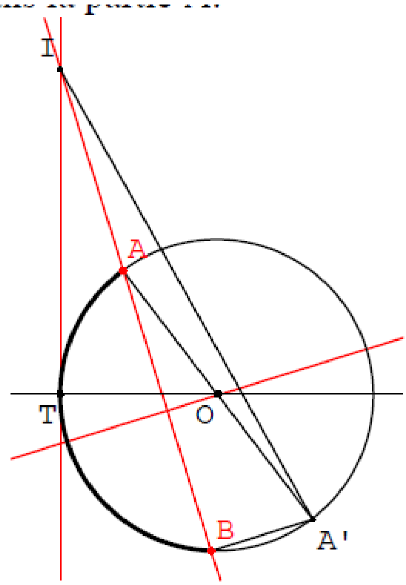
Coupe le carré de manière oblique afin que son extrémité inférieure soit plus saillante que son extrémité supérieure. Décris un arc circulaire vers la gauche et vers le bas, qui passe par l'extrémité supérieure du jambage gauche.

On se propose de tracer le « a » suivant les descriptions de Dürer. Sur la grille ci jointe on a déjà représenté le « r ». Cette représentation fixe la hauteur du « a ».

2. On considère un carré $ABCD$ de côté unité et un point E sur le côté $[AB]$ tel que $AE = d$ avec $0 < d < 1$. Comment doit être placé le point F sur le côté $[CD]$ pour que les quadrilatères $AEFD$ et $EBCF$ aient la même aire ?

3. Construire la lettre « a » sur la feuille fournie en annexe.

Pour la construction du « carré en pointe de telle sorte que, joint à un demi carré, ils atteignent la hauteur de la lettre », on utilisera le fractionnement du côté du carré réalisé dans la partie A.



Question bonus :

Pour le tracé de l'arc de cercle extérieur Dürer dit

« Décris un arc circulaire vers la gauche et vers le bas, qui passe par l'extrémité supérieure du jambage gauche ».

Il y a une infinité de cercles répondant à cette contrainte. On se propose d'imposer que la verticale gauche de la jambe gauche du « a » lui soit tangente.

Il s'agit de construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à une droite donnée. Il n'existe pas de construction géométrique simple, on recherche ici une solution numérique.

On suppose avoir répondu à la question avec la figure ci-contre : A et A' sont diamétralement opposés et O est l'intersection de la médiatrice de [AB] avec la perpendiculaire à la tangente en T.

Démontrer que $IA \times IB = IT^2$.

4. Déterminer, à 10^{-3} près, de combien le quadrilatère de pointe décrit par la partie en gras, dépasse de la verticale droite de la jambe droite.

Annexes

21-c : Et s'il pleuvait en bretagne ?

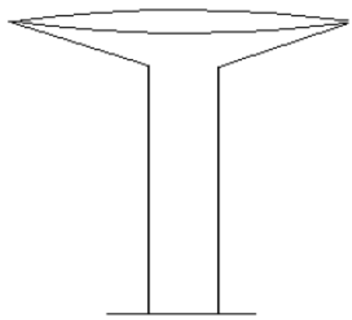
Pour mesurer la hauteur de pluie tombée pendant une période donnée, on utilise deux types de pluviomètres . Ils ont tous en commun la propriété suivante :

S'il tombe une hauteur x de pluie, le volume d'eau recueillie par le pluviomètre est égal à l'aire de l'ouverture du pluviomètre multipliée par la hauteur de pluie x.

On rappelle la formule du volume V du cône de base B et de hauteur H : $V = \frac{1}{3} B \times H$.

1. Pluviomètre cylindrique surmonté d'un entonnoir

Le récipient de la figure ci-contre est un cylindre de diamètre 2 cm et de hauteur 20 cm surmonté d'un entonnoir dont l'ouverture a un diamètre de 10 cm.



a. Supposons qu'il soit tombé 5 mm de pluie.

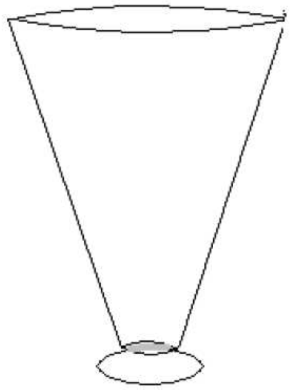
Calculer la hauteur d'eau dans le cylindre.

b. Supposons maintenant qu'il y ait 15 cm d'eau dans le pluviomètre. Calculer la hauteur de pluie correspondante.

c. La hauteur d'eau dans le pluviomètre est-elle proportionnelle à la hauteur de pluie tombée ?

2. Pluviomètre en cône tronqué.

Le récipient de la figure ci-contre est un cône tronqué de 10 cm de diamètre dans sa partie supérieure et 2 cm dans sa partie inférieure, sa hauteur est de 20 cm.



a. La hauteur d'eau dans le pluviomètre est-elle proportionnelle à la hauteur d'eau tombée ?

b. Montrer que le volume d'un cône tronqué de rayon R dans sa partie supérieure et r dans sa partie inférieure et de hauteur H est : $V = \frac{\pi}{2} H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

c. Revenons à notre pluviomètre. Supposons qu'il y ait 15 cm de hauteur d'eau dans le pluviomètre, quelle hauteur d'eau de pluie est-il tombé ?

21-d : Marianne fait la fête.

Marianne souhaite organiser une grande fête le 14 juillet 2009. Très méthodique, elle recense les différentes tâches qu'elle devra effectuer avant le 14 juillet.

Tâche	Temps nécessaire	Tâches préalablement réalisées
A : Autorisation d'organiser le rassemblement en Ille-et-Vilaine	4 semaines	Aucune
B : Etablir la liste des invités	2 s	A
C : Choisir une ville en Ille-et-Vilaine	4 s	A
D : Choisir un restaurateur	3 s	A
E : Obtenir l'autorisation de la ville	4 s	C
F : Impression des invitations	2 s	B E
G : Mettre les invitations sous enveloppe, libeller les enveloppes et les poster	1 s	F
H : Attendre les réponses et les décompter	7 s	G
I : Passer commande du menu	1 s	D H
J : Obtenir l'autorisation d'un lâcher de ballons	4 s	E
K : Organiser le transport	4 s	H C E
L : Prendre connaissance de la météo	1 jour	C
M : Achat de la décoration	1 jour	J H L
N : Installation (tables, décor).	2 jours	M
O : Faire la fête		N M K I

Combien de semaines sont nécessaires à la réalisation du projet ?

22. Rouen (*)

23. Strasbourg

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php?frame=.%2Fcompet%2Fsujets.php&m0=comp&m1=oly&m2=suj&categ=olymp

23-a : S - Les nappes

On dispose de deux nappes rondes de même diamètre et d'une table carrée.

On se demande si il est possible de recouvrir entièrement la table avec les deux nappes.

Le carré a pour côté 1,8 mètre.

1. On suppose que le diamètre des nappes est 2,009 mètres. Est-ce possible ?

2. Déterminer le diamètre minimal des nappes pour que ce soit possible.

23-b : S - Partition

On appelle partition d'un entier strictement positif toute décomposition de cet entier en somme d'entiers strictement positifs (dans un ordre quelconque).

Par exemple, les partitions de 5 sont 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 et 1+1+1+1+1.

On effectue le produit des termes intervenant dans chaque partition et on cherche à obtenir le produit maximum.

Dans l'exemple précédent, le produit maximum est donc obtenu avec la partition $5=3+2$ et vaut $3\times 2=6$.

1. Quel est ce maximum pour les entiers 6, 7 et 8 ?

2. Pour les entiers 2007, 2008 et 2009, déterminer ce maximum et la(les) partition(s) correspondante(s).

23-c : ES, L, T - Roues

Une voiture a roulé 20 000 kilomètres, chacune des cinq roues (dont la roue de secours) est usée de la même façon. Chaque roue a un diamètre de 50 centimètres.

1. Combien chaque roue a-t-elle parcouru de kilomètres ?

2. Combien de tours chaque roue a-t-elle fait ?

23-d : ES, L, T – Partition 2

On appelle partition d'un entier strictement positif toute décomposition de cet entier en somme d'entiers strictement positifs.

Par exemple, les partitions de 5 sont 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 et 1+1+1+1+1.

On effectue le produit des termes intervenant dans chaque partition et on cherche à obtenir le produit maximum.

Dans l'exemple précédent, le produit maximum est donc obtenu avec la partition $5=3+2$ et vaut $3\times 2=6$.

1. Quel est ce maximum pour les entiers 6, 7 et 8 ?

2. Pour les entiers 12, 13 et 14, déterminer ce maximum et la(les) partition(s) correspondante(s). Justifier votre réponse. (On ne demande pas de lister toutes les partitions possibles des entiers 12, 13 et 14…)

24. Toulouse

http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades/annales.php

24-a : ES-L-T- Le distributeur

Des DVD de films peuvent être loués pour 24 heures à un distributeur automatique selon deux tarifs :

* 5 euros pour les « nouveautés ».
* 3 euros pour les films plus anciens.

1. Un client peut-il dépenser exactement 13 euros pour louer des DVD à ce distributeur ?

2. Un certain soir, entre 19h et 20h, le distributeur a enregistré une recette de 45 euros. Combien de films anciens ont-ils pu être loués pendant cette période ? Donner tous les cas possibles.

3. Le distributeur peut-il enregistrer des recettes de 101, 102, 103 euros ? Si oui comment ? Si non pourquoi ?

4. En supposant que le distributeur n'est jamais en rupture de stock, quelles sont toutes les recettes possibles ?

24-b : ES-L-T- Ce soir c'est la fête !

1. Pour la Saint-Fiacre, un banquet de neuf couverts est prévu autour d'une table ronde. Lorsque Jean-Marie arrive, certains invités sont déjà attablés et Jean-Marie constate qu'il doit nécessairement s'installer à côté de l'un d'eux.

Combien y a-t-il, au minimum, d'invités déjà attablés à l'arrivée de Jean-Marie ? Décrire leurs positions respectives dans ce cas « minimal ».

2. La même question se pose à l'occasion du banquet républicain de la Sainte-Barbe.

Quarante couverts sont disposés autour d'une table ronde et Jean-Marie, lorsqu'il arrive, est obligé de s'installer à côté d'un convive déjà attablé.

Combien y a-t-il, au minimum, d'invités déjà attablés à l'arrivée de Jean-Marie ? Décrire plusieurs dispositions possibles dans ce cas « minimal ».

3- La légende raconte que, lorsque le barde Joachim et ses deux amis arrivèrent au dîner d'anciens de la guerre des Gaules auquel ils étaient invités, ils ne purent s'asseoir tous les trois côte à côte.

Sachant que la table était rectangulaire et comportait quarante couverts, vingt de chaque côté et aucun en bout de table, combien de Gaulois, au minimum, étaient déjà attablés à l'arrivée du barde et de ses amis ?

Présenter plusieurs dispositions des convives déjà installés dans ce cas « minimal ».

24-c : S- En Egypte

Dans l'Antiquité, les Egyptiens utilisaient essentiellement les fractions de numérateur 1 et de dénominateur un entier naturel non nul, qu'on appelle maintenant fractions égyptiennes.

Dans le problème, on s'intéresse à la possibilité d'écrire la fraction $\frac{4}{N}$, avec N entier naturel, $N > 2$, sous la forme d'une somme trois fractions égyptiennes.

On cherche donc a, b et c entiers naturels, non nuls, tels que : $\frac{4}{N}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

En 1950, le mathématicien hongrois Paul ERDÖS (1913-1996) a conjecturé que cette décomposition de la fraction $\frac{4}{N}$ était toujours possible pour $N > 2$.

On étudie ici ce problème pour différentes formes de l'entier N.

1. Etude du cas où N est pair, $N > 2$.

a. Trouver une décomposition de $\frac{4}{2008}$ et de $\frac{4}{2010}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

b. Plus généralement, peut-on, pour tout entier naturel N pair, $N > 2$, décomposer la fraction $\frac{4}{N}$ en somme de trois fractions égyptiennes ? Justifier.

2. Etude du cas où N est impair et de la forme $4k - 1$ avec k entier naturel non nul.

a. Décomposer $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{11}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

b. Plus généralement, peut-on, pour tout entier naturel N pouvant s'écrire $N = 4k - 1$ avec k entier naturel non nul, décomposer la fraction $\frac{4}{N}$ en somme de trois fractions égyptiennes ?

3. Etude de deux exemples où N est impair mais pas de la forme précédente.

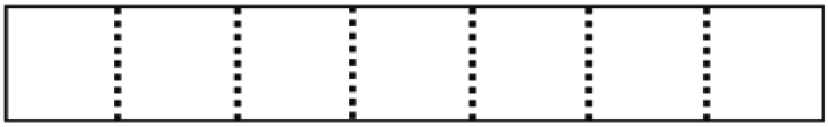
a. Décomposer $\frac{4}{41}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

b. Donner plusieurs décompositions de $\frac{4}{2009}$ en somme de trois fractions égyptiennes.

4. A supposer qu'on veuille prouver que la conjecture de Paul ERDÖS est fausse, proposer des entiers naturels ou des familles d'entiers naturels auxquels on devrait encore s'intéresser.

24-d : S - Les timbres d'Eliott

Eliott achète un carnet de timbres comportant sept timbres disposés « en bande » séparés par une ligne prédécoupée en pointillés comme sur la figure :



Chaque timbre a pour valeur 1 Phoebus.

1. Eliott pense qu'en détachant seulement le troisième timbre – par découpage des deux lignes en pointillés correspondantes - il peut réaliser tous les affranchissements de valeur entière entre 1 et 7 Phoebus. A-t-il raison ?

2. Il achète un nouveau carnet de timbres plus long pour lequel les timbres sont toujours disposés en bande. En découpant exactement trois lignes en pointillés, il remarque qu'il peut de nouveau réaliser tous les affranchissements de valeur entière entre 1 et k Phoebus où k est un entier naturel. Déterminer le nombre k le plus grand possible pour qu'il en soit ainsi.

Eliott se met à rêver de carnets de timbres de plus en plus longs …

3. Reprendre la question précédente en découpant six lignes en pointillés d'un nouveau carnet.

4. Combien de découpes devrait prévoir Eliott s'il devait atteindre tous les affranchissements de valeur entière de 1 à 2009 Phoebus ?

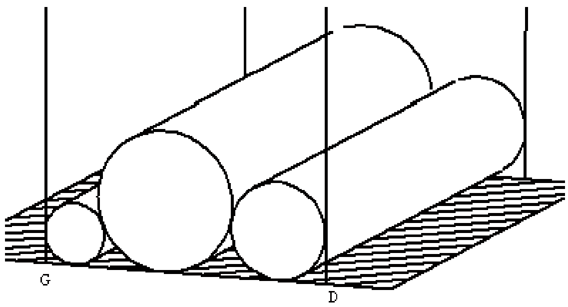
On pourra utiliser la formule : $1+2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$, vraie pour tout entier naturel n.

25. Versailles

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades.htm

25-a : S - Tas de bois

Trois rondins cylindriques sont posés côté à côte sur une même surface plane horizontale. Sur la figure, les cercles apparents sont situés dans un même plan P perpendiculaire aux axes des cylindres. Les points G et D sont les intersections de deux droites contenues dans P, verticales et tangentes au premier et au dernier cercle.



À chaque ensemble de trois rondins, dont les rayons sont notés, de gauche à droite, a, b et c, on associe la distance GD, appelée largeur et notée $l(a, b, c)$.

On étudie cette largeur en fonction des rayons des rondins et de leur position. On se place dans le cas où le cylindre central est tangent aux deux autres et où les verticales passant par G et D ne sont au contact que d'un seul cylindre chacune.

1. Montrer que $l(9, 16, 36) = 117$. Calculer $l(16, 9, 36)$.

2. a. Calculer $l(a, b, c)$ en fonction de a, b et c.

b. Calculer $l(b, a, c) - l(a, b, c)$. *On pourra faire apparaître* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ *en facteur.*

3. On utilise dans cette question trois rondins de rayons respectifs 1, x et y. On suppose que $1 < x < y$. Dans quel ordre faut-il les placer pour que la largeur soit :

a. La plus grande possible ?

b. La plus petite possible ? Discuter.

25-b : S - Moyennes de puissances de 2

Dans cet exercice, ont dit qu'un entier naturel non nul est *joli* s'il peut s'écrire comme la moyenne d'un certain nombre de puissances de 2, non nécessairement distinctes.

Par exemple, 92 est *joli*, car $92=\dfrac{2^7+2^7+2^7+2^7+2^7+2^5+2^5+2^5}{8}$; on a aussi : $92=\dfrac{2^8+2^4+2^2}{3}$.

1. a. Montrer que si n est *joli*, alors $n+1$ est *joli*.

b. Quel est l'ensemble des entiers *jolis* ?

c. Donner une décomposition de 2009 comme moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2.

2. On dit qu'un entier naturel non nul est *superbe* s'il peut s'écrire comme moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2, deux à deux distinctes.

Par exemple, 92 est *superbe*, puisque $92 = \dfrac{2^8 + 2^4 + 2^2}{3}$.

a. Prouver que 7 est *superbe*.

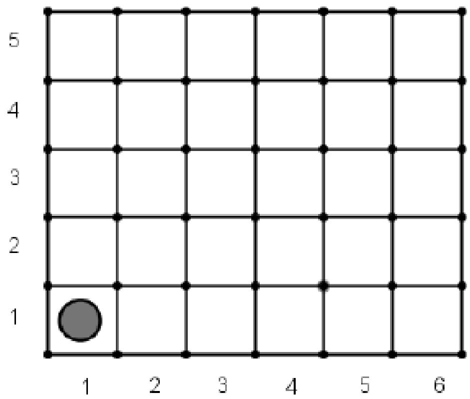
b. Prouver que l'entier n est *superbe* si et seulement si $2n$ est *superbe*.

c. Prouver que 13 n'est pas *superbe* (on pourra admettre que, pour tout entier k supérieur ou égal à 7, $13k < 2^k - 1$).

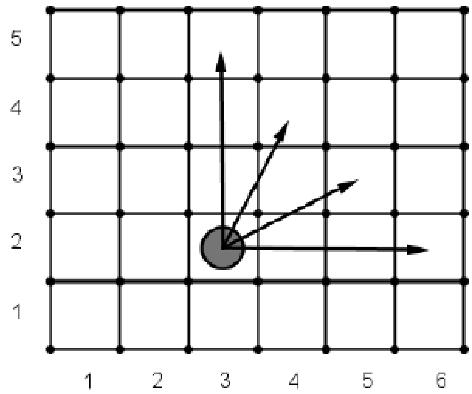
25-c : ES-L-T - Au-delà des grilles

On considère un damier rectangulaire composé de n colonnes et p lignes (on prendra $n \geq p$).

Un jeton est placé sur la première case, en bas à gauche. On le déplace dans le damier. Un *mouvement* consiste à déplacer le jeton de trois cases au total, vers la droite ou vers le haut (voir figure).



Damier 6x5
Situation de départ



Déplacements possibles
à partir d'une position

1. Combien faut-il au plus de mouvements pour sortir d'un damier de 6 colonnes et 5 lignes ? d'un damier de n colonnes et p lignes ?

2. On donne des entiers i et j. Est-il possible d'atteindre la case située sur la i-ième colonne et la j-ième colonne ?

25-d : ES-L-T - « Too many notes »

Un professeur donne aux travaux que lui rendent les élèves une note, comprise entre 0 et 20, comportant une décimale au plus.

Albert, qui a obtenu 3,1 pour le premier travail rendu et 19,5 pour le second, observe que la moyenne 11,3 de ces deux notes a pour décimale le chiffre des unités de la première (3) et pour chiffre des unités la décimale de la première (1).

Béatrice, qui n'a pas encore sa seconde note, se demande s'il peut en être de même pour elle.

1. Montrer que c'est possible si sa première note est 3,2.

2. Est-ce toujours possible pour des notes non nulles strictement inférieures à 20 ?