Olympiades académiques de mathématiques

Les sujets des académies accompagnées de (*) ne me sont pas connus.

1. Exercices communs

1-a : Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$ donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».

2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».

3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».

4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ». Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter Quadrature, n°3, avril 1990.

<u>Correction</u>

1. Pour répondre à cette question, nous ne considérerons que les décompositions des entiers compris entre 4 et 10 en sommes d'entiers ne faisant pas apparaître le nombre 1, attendu que dans ces cas, la somme des inverses des termes de la somme est strictement supérieure à 1.

La seule décomposition de 4 à considérer est : 4 = 2+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 4 est un bon nombre.

Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant deux 2. La seule décomposition de 5 à considérer est : 5 = 3+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 5/6. Donc 5 est mauvais.

Les décompositions de 6 à considérer sont : 6 = 4+2, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 3/4. 6 = 3+3, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 2/3. Donc 6 est mauvais.

Les décompositions de 7 à considérer sont : $7 = 5+2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 7/10, $7 = 4+3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 7/12. Donc 7 est mauvais.

Parmi les décompositions de 8 à considérer figure : $8 = 2+4+4$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 8 est un bon nombre.

Parmi les décompositions de 9 à considérer figure : $9 = 3+3+3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 9 est un bon nombre.

Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant trois 3.

Parmi les décompositions de 10 figure : $10 = 4+4+2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 10 est un bon nombre.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on peut écrire : $n^2 = n + n + n + ... + n + n$, somme de n termes.

La somme de leurs inverses vaut 1. Donc n^2 est un bon nombre.

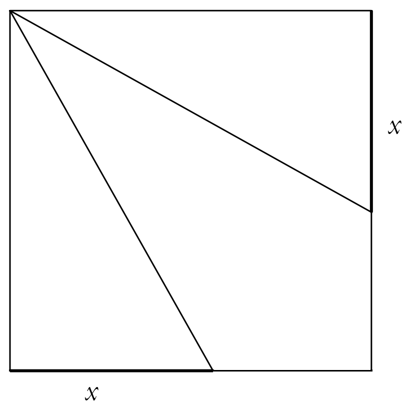
3. Si n est un bon nombre, il existe une décomposition $n = a + b + ... + k$ telle que $1/a + 1/b + ... + 1/k = 1$.

À la décomposition $2n = 2a + 2b + ... + 2k$ est donc associée la somme 1/2, et donc à la décomposition $2n + 2 = 2a + 2b + ... + 2k + 2$ la somme 1. $2n + 2$ est donc un bon nombre.

La même décomposition de $2n$, associée à la décomposition $9 = 3 + 6$, conduit au résultat : $2n + 9$ est un bon nombre.

4. On peut écrire : $56 = 2\times27 + 2$ et $57 = 2\times24 + 9$. Ces deux nombres sont donc bons. Tous les nombres pairs supérieurs à 56 sont donc bons. Il en est de même des nombres impairs supérieurs à 57.

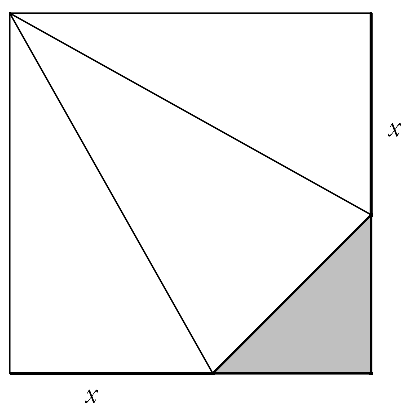
1-b : Un partage équitable



1. Léonard est géomètre.

Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

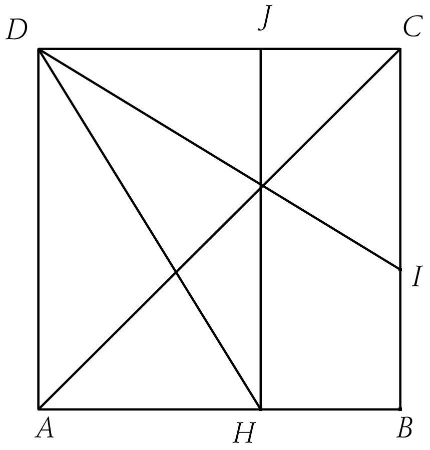
Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète.

Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire grisée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien.

Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

2. Amiens

http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/

2-a : Carré magique

Concours S

1	3	1
3	5	6
2	4	4

1. On peut modifier le tableau ci-dessus à l'aide des opérations suivantes :
   - multiplier tous les nombres d'une ligne par 2,
   - soustraire 1 à tous les nombres d'une colonne.

Montrer qu'en appliquant ces opérations on peut obtenir un tableau dont tous les nombres sont nuls.

2. Montrer qu'on peut obtenir le même résultat à partir de tout tableau de 3 lignes et 3 colonnes ne contenant que des entiers strictement positifs.

(On pourra numéroter les lignes L_1, L_2, L_3 et les colonnes C_1, C_2, C_3).

2-b : Aires de triangles

Concours S

1. Question préliminaire :

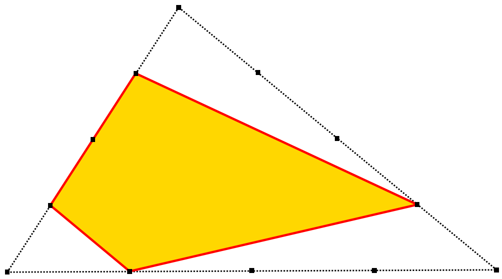
Soit deux triangles MNP et MNP' tels que (PP') soit parallèle à (MN). Démontrer que ces deux triangles ont la même aire.

2. Chaque côté d'un triangle T est partagé en 4 segments de longueur égale. On construit des polygones D_1, D_2, D_3 et D_4 comme indiqué sur la figure.

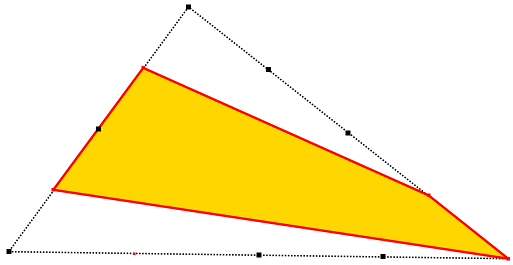
Voici quatre « photos » de ce triangle (en pointillés) et des polygones D_1, D_2, D_3 et D_4.

a. Montrer de proche en proche que D_1, D_2, D_3 puis D_4 ont des aires égales.

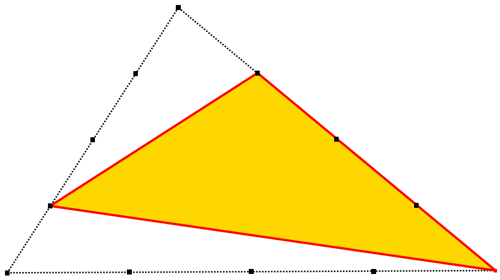
b. En déduire le rapport : $\dfrac{\text{aire}(D_1)}{\text{aire}(T)}$.



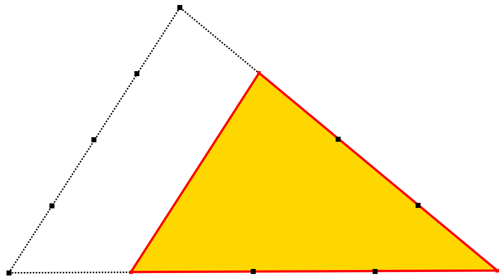
Polygone D_1



Polygone D_2



Polygone D_3



Polygone D_4

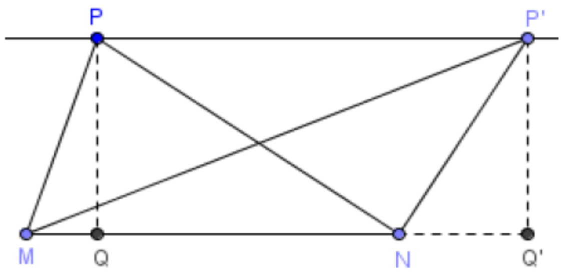
Correction

Question préliminaire :

puisque (PP’) est parallèle à (MN), alors les deux hauteurs [PQ] et [P’Q’] ont la même longueur.

Par conséquent :

$$\text{aire}(MNP) = \frac{MN \times PQ}{2} = \frac{MN \times P'Q'}{2} = \text{aire}(MNP')$$



a. Pour montrer que D_1 et D_2 ont la même aire il suffit de couper suivant la droite horizontale passant par les graduations les plus basses. D’après la réciproque du théorème de Thalès, cette droite est parallèle à la base horizontale du triangle T.

Alors, pour D_1 et D_2, les deux triangles situés au dessus sont identiques, et les deux situés en dessous de cette ligne horizontale ont la même aire (d’après la question préliminaire, en prenant pour base la droite horizontale).

Toujours avec cette même droite, pour D_2 et D_3, les deux triangles en dessous sont identiques, et les deux situés au dessus ont la même aire (car d’après la réciproque du théorème de Thalès la droite qui joint les deux graduations du haut est parallèle à la base horizontale de T, et donc à la ligne de séparation de D_2 et D_3).

Enfin, en utilisant la droite diagonale, on obtient que D_3 et D_4 ont la même aire.

b. D_4 est un triangle semblable au triangle T, avec un rapport de proportionnalité de $\frac{3}{4}$. Par conséquent on a : $\dfrac{\text{aire}(D_1)}{\text{aire}(T)} = \dfrac{\text{aire}(D_4)}{\text{aire}(T)} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$.

2-c : Mélanges ¿

Concours STI/STL

Dans un verre conique on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915).

Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger et forment trois couches d'égale épaisseur.

Le verre contient-il alors une masse plus importante de mercure, d'eau ou d'huile ?

Correction

Soit $3h$ la hauteur du verre conique et $3r$ son rayon au sommet.

D'après le théorème de Thalès la frontière entre le mercure et l'eau se trouve à une hauteur égale à h et décrit donc un disque de rayon r.

De même, la frontière entre l'eau et l'huile se trouve à une hauteur égale à $2h$ et décrit donc un disque de rayon $2r$.

Le volume de mercure vaut donc : $V_m = \dfrac{h\pi r^2}{3}$.

Ensuite, le volume d'eau vaut : $V_e = \dfrac{2h\times\pi(2r)^2}{3} - V_m = 8\dfrac{h\pi r^2}{3} - \dfrac{h\pi r^2}{3} = 7\dfrac{h\pi r^2}{3}$.

Enfin, le volume d'huile vaut : $V_h = \dfrac{3h\times\pi(3r)^2}{3} - V_e - V_m = 27\dfrac{h\pi r^2}{3} - 8\dfrac{h\pi r^2}{3} = 19\dfrac{h\pi r^2}{3}$.

On en déduit les masses des trois liquides :

$M_m = 13,59\times\dfrac{h\pi r^2}{3}$, $M_e = 7\times\dfrac{h\pi r^2}{3}$, $M_h = 0,915\times 19\times\dfrac{h\pi r^2}{3} = 17,385\times\dfrac{h\pi r^2}{3}$.

Finalement, c'est l'huile qui présente la masse la plus importante, suivie du mercure, et l'eau est loin derrière.

2-d : Inégalités

Concours STI/STL

1. Démontrer que pour tous réels u et v : $u^2+v^2 \geq 2uv$.

2. En déduire que, quels que soient les réels a, b et c : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$.

3. Déterminer alors le plus petit entier k tel que, quels que soient les nombres réels a, b et c :

$$(a+b+c)^2 \leq k(a^2+b^2+c^2).$$

Correction

1. C'est hyper-classique : $(u-v)^2 = u^2+v^2-2uv \geq 0$, donc $u^2+v^2 \geq 2uv$.

2. On calcule la différence :

$$\begin{aligned}&3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\\&= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac = a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2\\&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.\end{aligned}$$

Cette somme de carrés est positive, d'où le résultat.

3. D'après la question 2, le réel k est nécessairement plus petit que 3, puisque ça marche déjà pour 3 !

Or on constate que pour $a = b = c$ on obtient l'égalité $(3a)^2 = 3\times(3a^2)$. On ne peut donc pas faire mieux que 3. Par conséquent, 3 est le plus petit réel k qui vérifie l'inégalite.

2-e : Caramels

Concours ES/L/STL

Devant un bocal de caramels Pascal se dit :

« Pour être sûr d'avoir :

- Deux caramels de la même couleur, il faudrait que j'en prenne au minimum 4.
- Deux caramels de couleurs différentes, il faudrait que j'en prenne au minimum 12.
- Deux caramels bleus, il faudrait que j'en prenne au minimum 10.
- Deux caramels verts, il faudrait que j'en prenne au minimum 16. »

Combien y a-t-il de caramels dans le bocal ?

Correction

La 1ère propriété nous indique que le bocal ne contient que 3 couleurs différentes de caramels. En effet, dans le pire des cas, les trois premiers caramels choisis sont de couleurs différentes, mais alors le 4ème est forcément d'une couleur déjà obtenue.

La 2ème propriété nous indique qu'il y a au plus 11 caramels dans chaque couleur. Et plus précisément, qu'il y a une couleur dans laquelle il y a 11 caramels. En effet, dans ce cas, les 11 premiers caramels choisis sont de cette même couleur, et le 12ème est d'une autre couleur.

La 3ème propriété nous indique qu'il y a au moins 2 caramels bleus et exactement 8 caramels qui ne sont pas bleus. Et la 4ème nous indique qu'il y a au moins 2 caramels verts et exactement 14 caramels qui ne sont pas verts.

Supposons que les 3 couleurs sont bleu, vert et marron.

Notons b, v et m les nombres de caramels de ces trois couleurs.

Les propriétés 2, 3 et 4 se traduisent alors ainsi : $\begin{cases} 2 \le b \le 11,\ 2 \le v \le 11,\ m \le 11 \\ v+m=8 \\ b+m=14 \end{cases}$.

Puisque $v+m=8$, alors $v \le 8$ et $m \le 8$. Il ne peut donc pas y avoir 11 caramels verts ou 11 marrons. Donc il y a exactement 11 caramels bleus : $b=11$.

Par suite, on trouve immédiatement $m = 3$ puis $v = 5$. Le bocal contient donc 19 caramels.

2-f : Remises

Concours ES/L/STL

Un commerçant effectue trois remises successives sur un article d'un prix de 300 euros et le vend finalement 222,87 euros.

Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières ?

Correction

Notons r_1, r_2 et r_3 les pourcentages des trois remises.

On a donc : $300\left(1-\frac{r_1}{100}\right)\left(1-\frac{r_2}{100}\right)\left(1-\frac{r_3}{100}\right)=222,87$,

ou $(100-r_1)(100-r_2)(100-r_3)=222,87\times\frac{10000}{3}=742\,900$.

Il s'agit donc de décomposer le nombre 742 900 en produit de 3 entiers inférieurs à 100.

Or, $742\,900=2^2\times5^2\times17\times19\times23$; si on laisse 23 tout seul on peut ensuite faire au mieux $2^2\times19=76$, mais il reste $5^2\times17=425>100$, donc ça ne va pas.

Il faut donc associer 23 à un autre nombre. On ne peut pas l'associer avec 19, 17 ou même 5 (car on dépasse alors 100), donc on peut essayer $2\times23=46$. Ensuite on peut faire au mieux $5\times19 = 95$, mais il reste $2\times5\times17 = 170 > 100$, donc ça ne va pas.

Le dernier espoir est donc de faire $2^2 \times 23 = 92$. Il faut ensuite faire $5\times19 = 95$ et $5\times17 = 85$. Finalement la seule décomposition qui marche est $742900 = 95\times92\times85$.

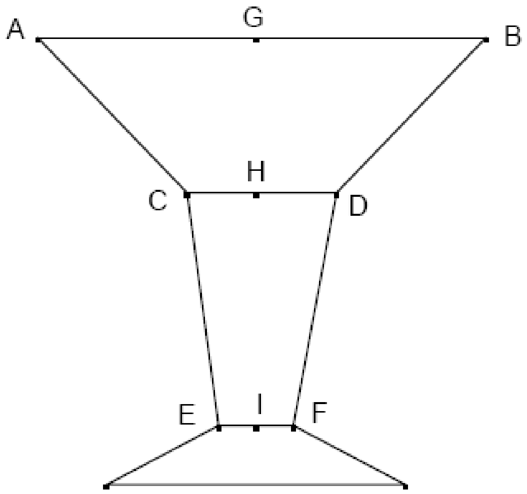
Les trois pourcentages de réduction sont donc de 5 %, 8 % et 15 % (et l'ordre n'intervient pas bien sûr !).

3. Besançon

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

3-a : Le verre à cocktail

Un verre à cocktail spécial est formé d'une base pleine, surmontée d'un pied en forme de tronc de cône puis d'un autre tronc de cône plus évasé. Les dimensions sont indiquées ci-dessous.



AB = 12 cm
CD = 4 cm
EF = 2 cm
GH = 4 cm
HI = 6 cm
Dessin fait à l'échelle 1/2

Le verre à cocktail

De la glace pilée au fond du verre doit occuper un sixième du volume. La boisson elle-même doit comporter 1/4 de sirop et 3/4 de limonade. Le verre doit être rempli à ras bord.

Mon ami me conseille de remplir de glace pilée le tronc de cône inférieur (jusqu'à la limite CD) puis de remplir de sirop jusqu'à 2 cm du bord supérieur.

Son conseil est-il bon ?

On rappelle que le volume d'un cône est donné par la formule $V = \frac{1}{3}\left(\pi R^2\right) \times h$.

3-b : Le chameau et les bananes

Je suis face au désert avec un stock de bananes.

Le chameau qui va me transporter ne peut porter plus de mille bananes à la fois et en consomme une par kilomètre.

Partant de ma ville, j'espère atteindre un marché situé à 1000 km où je compte vendre mes bananes. Je dispose d'un stock de trois mille bananes.

1. Montrer qu'il est possible d'apporter au moins deux cents bananes au marché.

2. Améliorer la solution précédente. Quel est le nombre maximal de bananes que je pourrai vendre au marché ?

4. Bordeaux

http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/xjeux_mjc.htm

4-a : Carré et cercles

ABCD est un carré de côté a. Le cercle Γ_1 est tangent aux segments [AD] et [DC].

1 a. Construire sur la figure 1 un cercle Γ_2 contenu dans le carré ABCD, tangent à la fois à Γ_1, [AB] et [BC].

b. Expliquer pourquoi cette construction n'est pas possible sur la figure 2.

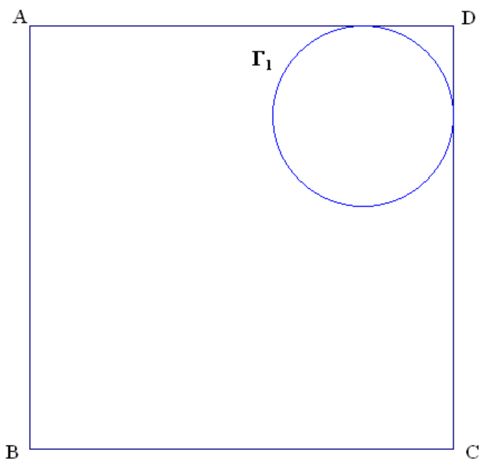


Figure 1

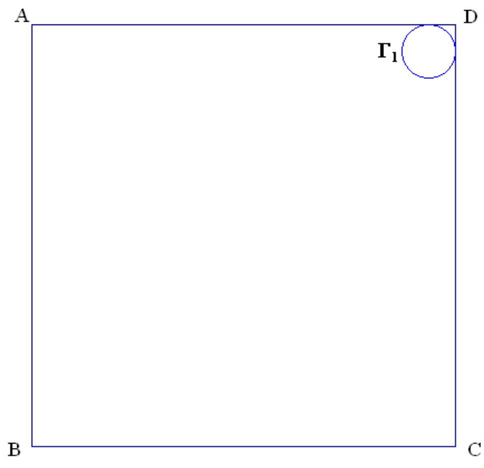


Figure 2

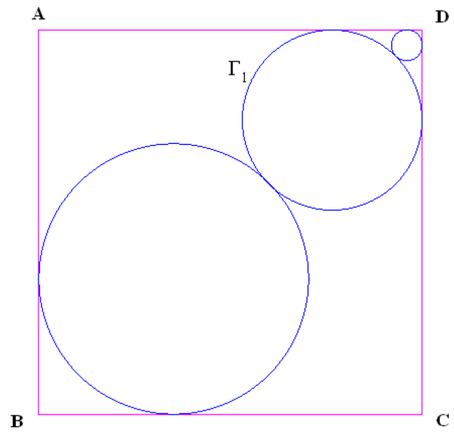
2. a. Montrer que si R_1 et R_2 désignent les rayons respectifs de Γ_1 et Γ_2, alors R_1+R_2 reste constant lorsque l'on fait varier la dimension des deux cercles.

b. Quelles sont la valeur minimale et la valeur maximale de R_1 ?

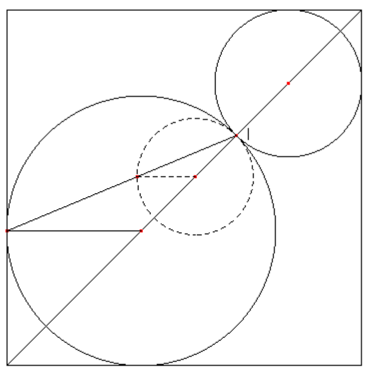
3. Soit S la somme des aires des disques limités par les cercles Γ_1 et Γ_2.

Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de S.

4. Le petit cercle représenté est tangent à Γ_1 et aux côtés [AD] et [DC]. Exprimer le rayon de ce cercle en fonction de R_1.



Correction

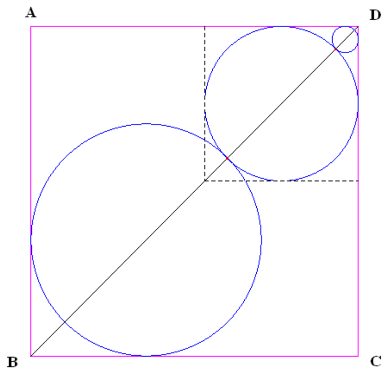


1. a. Les centres des cercles se trouvent sur la diagonale [BD]. Pour construire Γ_2 on peut utiliser une homothétie de centre I qui transforme le cercle pointillé en le cercle voulu.

b. Le cercle Γ_2 n'est pas, dans ce cas, à l'intérieur du carré.

2. a. En utilisant Thalès ou une méthode analytique ou que $BD = R_1\sqrt{2} + R_1 + R_2 + R_2\sqrt{2}$, on trouve $R_1 + R_2 = a(2-\sqrt{2})$.

b. La valeur maximale de R_1 est $\frac{a}{2}$, la valeur minimale est donc $a(2-\sqrt{2}) - \frac{a}{2} = a\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.



3. $S=\pi(R_1{}^2+R_2{}^2)=\frac{\pi}{2}[(R_1+R_2)^2+(R_1-R_2)^2]$.

Comme R_1+R_2 est constant, S est minimale quand

$R_1=R_2=a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ et maximale quand $R_1=\frac{a}{2}$ et $R_2=a\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

4. Dans le carré en pointillés, en appliquant 2.a., on a $R_3=2R_1(2-\sqrt{2})$.

4-b : Différence de deux carrés

On appelle E l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme différence des carrés de deux entiers naturels.

1. Montrer que 2008 est élément de E (on pourra chercher deux entiers a et b, tous deux supérieurs à 200 tels que $2008=a^2-b^2$).

2. Montrer que tout nombre impair est élément de E.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, n^3 est élément de E.

4. Décrire les entiers naturels qui ne sont pas éléments de E.

5. Donner un entier qui s'écrit comme différence des carrés de deux entiers naturels de cinq façons différentes exactement.

Correction

1. $2008=253^2-249^2=503^2-501^2$.

2. $2p+1=(p+1)^2-p^2$.

3. $n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$ obtenu en posant $x-y=n$ et $x+y=n^2$.

4. $x+y$ et $x-y$ étant de même parité (somme paire), les seuls entiers qui ne peuvent s'écrire $(x+y)(x-y)$ sont ceux qui ont exactement un 2 dans leur décomposition, c'est-à-dire les entiers de la forme $2(2p+1)$.

5. Par exemple $405=5\times 3^4$ qui a dix diviseurs tous impairs ou encore $192=2^6\times 3$ qui parmi ses quatorze diviseurs en a deux impairs et donc exactement cinq paires utilisables.

5. Caen

http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/maths/

5-a : Un problème de cylindre

Les 2 expériences décrites ci-dessous sont indépendantes.

1. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement 3 sphères de telle sorte que la hauteur de l'ensemble des 3 sphères soit égale à la hauteur du cylindre. Ceci signifie que le rayon des sphères est le même que celui du cylindre.

La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre peut-elle être de 1 litre ?

2. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement une sphère puis un cône de révolution de même rayon que celui de cylindre de telle sorte que la hauteur de l'ensemble cône-sphère soit égale à la hauteur du cylindre.

La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre est de 1 litre.

a. Sachant que le rayon du cylindre est de 5 cm calculer la hauteur du cylindre.

b. Sachant que la hauteur du cylindre est de 20 cm déterminer le rayon du cylindre.

On pourra utiliser les formules suivantes :

Volume du cylindre : $\pi R^2 h$ *; volume du cône de révolution :* $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ *; volume de la sphère :* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

5-b : Problème des 3 chèvres

A chaque sommet d'un triangle équilatéral de 48 m de côté est attachée une chèvre à l'aide d'une corde. Les secteurs angulaires décrits par les chèvres, supposées ponctuelles, ne peuvent pas se croiser (au plus tangents).

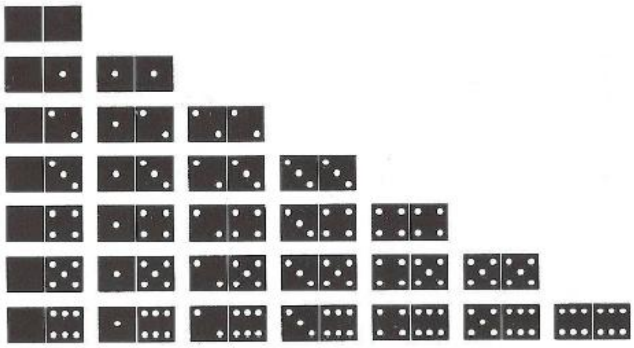
1. Chaque chèvre a une corde de 24 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?

2. Une des trois chèvres a une corde de 32 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?

3. Aucune chèvre ne peut avoir une corde plus longue que la distance qui sépare son point d'attache au côté opposé. Déterminer la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter.

5-c : Les dominos (séries autres que S)

Le jeu de dominos occidental est constitué des 28 pièces ci-dessous :



Un carré est *magique* si les sommes des nombres des rangées, des colonnes et des diagonales principales sont toutes égales à un même nombre que l'on appellera la *constante du carré*. Le *rang* d'un tel carré est son nombre de rangées (ou de colonnes).

On souhaite réaliser des carrés magiques avec ces pièces, sachant qu'une pièce utilisée ne pourra l'être qu'une seule fois.

1. Montrer qu'avec des dominos on ne peut réaliser que des carrés magiques de rang pair.

2. Peut-on réaliser un carré magique de rang 2 ?

3. Quel est le rang maximal que l'on peut espérer réaliser avec un seul jeu ?

4. a. Quelle est la constante minimale d'un carré de rang 4 ? Donner un exemple.

b. En déduire la constante maximale d'un carré de rang 4 ainsi qu'un exemple.

5-d : Les cyclistes (séries autres que S)

Sur une piste circulaire de longueur 400 m et de diamètre [*AB*], un cycliste part de *A* à une vitesse de 18 km / h et un autre part de *B* à une vitesse de 14,4 km / h (dans le même sens de circulation que le 1er cycliste.

1. a. Au bout de combien de temps le 1er cycliste va-t-il rattraper le 2ème cycliste pour la 1ère fois ? Pour la 2ème fois ?

b. Les 2 cyclistes restent une heure sur la piste. Combien de fois vont-ils se rencontrer ?

2. Le lendemain, à la même vitesse, le 2ème cycliste part dans le sens contraire de circulation que le 1er cycliste. Combien de fois vont-ils se rencontrer si ils restent 1 heure sur la piste?

6. Clermont Ferrand

http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/sampleolymp1.php

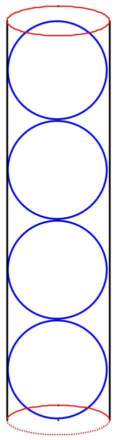
6-a : Puissance de calcul

Les organisateurs d'un concours mathématique ont découvert que le nombre total de participants avait la particularité suivante : il s'agit d'un nombre de quatre chiffres sans zéro qui est égal à la somme de ses chiffres élevés chacun à sa propre puissance (exemple : 22 ou 55).

1. Le chiffre 6 peut-il figurer dans ce nombre ?
2. Combien de fois le chiffre 5 doit-il figurer ?
3. Déterminer le nombre de candidats ?

6-b : Jeu de balles

Candidats de la série S



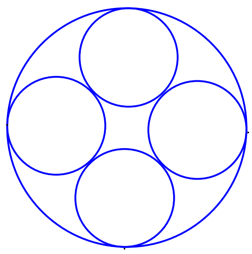


Schéma 1 Schéma 2

Quatre balles de tennis de rayon r sont rangées dans une boîte cylindrique en carton, ayant un couvercle qui a la forme du fond. Deux rangements sont envisagés :

(1) les balles sont rangées suivant le schéma 1, la balle n°4 étant en contact avec le couvercle de la boîte.

(2) Les quatre balles reposent sur le fond de la boîte tout en étant en contact avec le couvercle.

Quelle boîte nécessite le moins de carton, dans chacun des cas suivants :

1. les couvercles des boîtes sont en carton ?
2. les couvercles des boîtes sont en plastique ?

6-c : Autour de pourcentages…

Candidats des séries L, ES, STI, STL, STG, SMS

Jimmy possède une camionnette pour transporter sa batterie d'un lieu de concert à un autre.

Depuis plusieurs années, il a fait le choix de dépenser 100 euros de carburant par mois, en une seule fois, ni plus, ni moins. On suppose que le prix du carburant ne varie pas au cours d'un même mois.

1. Les volumes d'essence qu'il achète mensuellement sont-ils proportionnels aux prix du litre d'essence ?

2. En septembre 2003, il payait un litre d'essence 1,04 euros tandis qu'en septembre 2007 celui-ci s'élevait à 1,30 euros.

Jimmy a-t-il raison de dire que le volume de carburant acheté en septembre 2007 a diminué de 20% par rapport au volume de carburant acheté en septembre 2003 ?

3. Un mois donné, le prix d'un litre d'essence est p (p est exprimé en euros).

Les questions a. et b. sont indépendantes.

a. On suppose que le mois suivant le prix du litre d'essence a augmenté de moins de 10%. Jimmy a-t-il raison de dire que la diminution de volume de carburant acheté, qui en résulte, est inférieure à 10% ?

b. On suppose que le mois suivant le prix du litre d'essence a diminué de moins de 10%. Jimmy a-t-il raison de dire que l'augmentation de volume de carburant acheté, qui en résulte, est inférieure à 10% ?

7. Créteil

http://www.ac-creteil.fr/maths/olymp/olymp.html

7-a : Des rectangles amicaux

On considère deux rectangles R et S dont les dimensions sont des entiers naturels non nuls.

On dira que ces deux rectangles R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » lorsque le périmètre du rectangle R est égal à l'aire du rectangle S et lorsque l'aire du rectangle R est égal au périmètre du rectangle S.

1. a. Le rectangle R de dimensions 1 et 38 et le rectangle S de dimensions 6 et 13 constituent-ils « une paire de rectangles amicaux » ?

b. Le rectangle R a pour dimensions 2 et 10.

Peut-on trouver un (ou des) rectangle(s) S tel que R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » ? Si oui, déterminer ce (ou ces) rectangle (s).

c. On sait que le rectangle R a une dimension égale à 3 et que le rectangle S a une dimension égale à 8.

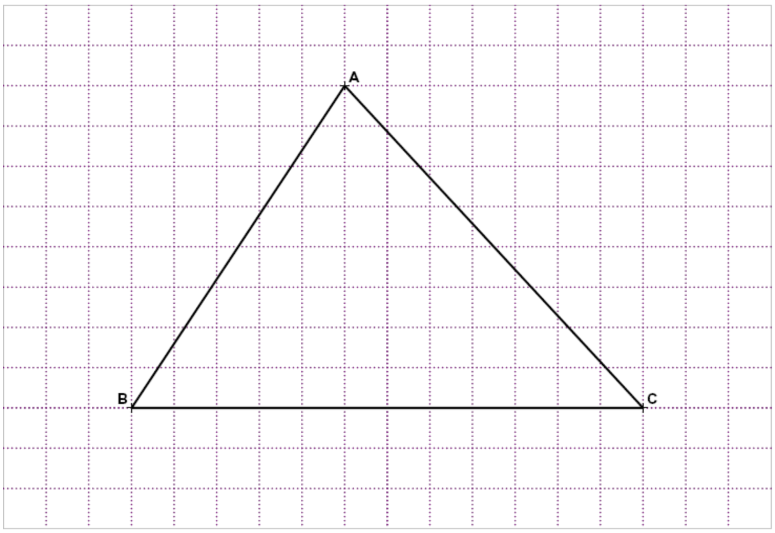
Peut-on trouver des rectangles R et S constituant « une paire de rectangles amicaux » ?

2. On note a, b les dimensions du rectangle R, c et d les dimensions du rectangle S. On suppose que les entiers naturels a, b, c et d vérifient : $a \leq b, c \leq d, a \leq c$.

Etablir que : $1 \leq c \leq 8$ et $1 \leq a \leq 4$.

Déterminer alors toutes « les paires de rectangles amicaux ».

7-b : Encore un peu d'aires



Soient A, B et C trois points représentés sur la figure ci –dessus.

1. On place le point N_1 sur le segment [AB] tel que $BN_1 = \frac{4}{5}BA$ et le point M_1 sur le segment [BC] tel que $BM_1 = \frac{5}{8}BC$.

Comparer les aires du triangle BN_1M_1 et du quadrilatère AN_1M_1C.

2. On place le point M_2 sur le segment [BC] tel que $BM_2 = \frac{2}{3}BC$.

Où placer le point N_2 sur le segment [AB] pour que l'aire du triangle BN_2M_2 soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC ?

3. On place le point I milieu du segment [BC].

a. Que peut-on dire des droites (IN_1) et (AM_1) ?

b. Que peut-on dire des droites (IN_2) et (AM_2) ?

c. Soient M un point du segment [IC] et N le point du segment [AB] tel que les droites (IN) et (AM) soient parallèles.

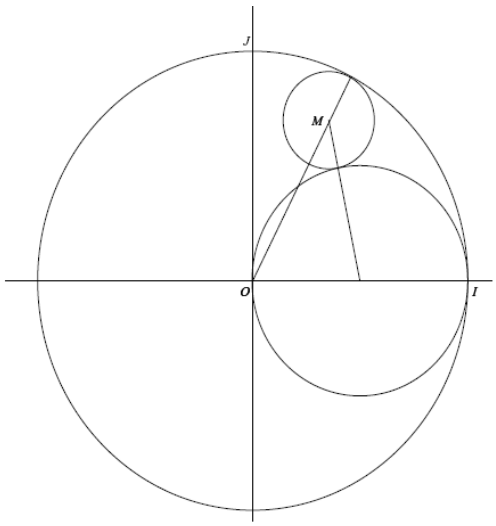
Comparer les aires du triangle BMN et du quadrilatère ANMC.

8. Corse

8-a : Les cercles

Dans un repère orthonormé du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points I (1, 0) et J (0, 1).

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (C') le cercle de diamètre $[OI]$. Dans cet exercice on étudie des cercles tangents intérieurement à (C) et tangents extérieurement à (C'), comme le montre cette figure.



1. Déterminer le rayon du cercle (C_A) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C'), dont le centre A est un point du segment $[OJ]$.

2. Déterminer le rayon d'un cercle (C_B) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C'), dont le centre B a pour abscisse $\frac{1}{2}$.

3. Soit M un point de coordonnées positives (x, y) centre d'un cercle (C_M) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C') et à (C_A). Déterminer le rayon de (C_M) et les coordonnées de son centre.

8-b : La grille

Dans le plan on considère une « grille » notée G, formée par l'ensemble **des sommets** des triangles équilatéraux de côtés de longueur 1 comme le montre la figure.

Pour tous points A et B de cette grille, on appelle *G-distance* de A et B, notée $d_G(A, B)$ la longueur du plus court chemin reliant A à B par les côtés des triangles.

Pour tout point A de la grille et pour tout réel r, on appelle *G-cercle* de centre A et de rayon r, l'ensemble des points M de la grille tels que $d_G(A, M) = r$.

On appelle *G-disque* de centre A et de rayon r, l'ensemble des points M de la grille tels que $d_G(A, M) \le r$.

1. Soit A un point donné de la grille, donner le nombre de points de la grille du G-cercle de centre A et de rayon 2 et du G-disque de centre A et de rayon 2.

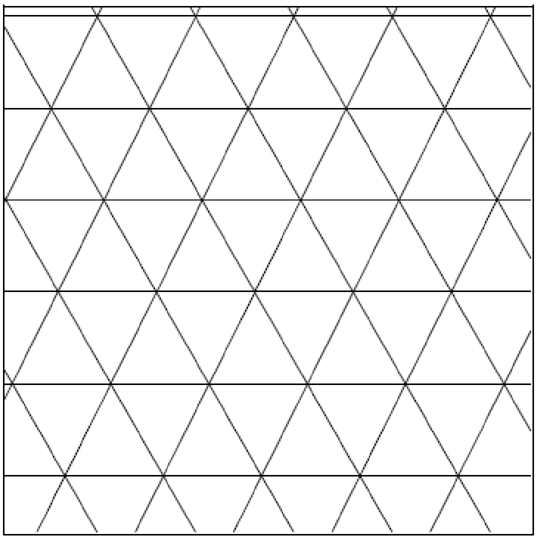
2. Déterminer le nombre de points de G appartenant au G-disque de centre A et de rayon 2008.

3. Démontrer que pour tous points M, N et P de G, $d_G(M, N) \leq d_G(M, P) + d_G(P, N)$.

4. On appelle *G-segment* MN, l'ensemble de tous les points P de G tels que $d_G(M, N) = d_G(M, P) + d_G(P, N)$.

a. Sachant que $d_G(M, N) = 4$, quel est le nombre de points du G-segment MN ?

b. Sachant que $d_G(M, N) = 2008$, quel est le nombre maximal de points du G-segment MN ?



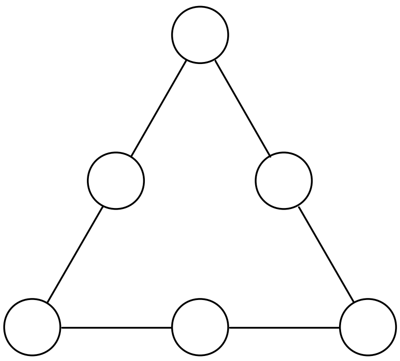
http://nuticiel.ac-corse.fr/math/download/olymp_2008_CorrectionSujetS2008.pdf

9. Dijon

http://mathematiques.ac-dijon.fr/

9-a : Les boules du triangle

On veut placer les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans les cercles représentés ci-contre, de telle sorte que la somme S des trois nombres placés sur chaque côté du triangle équilatéral soit la même sur les trois côtés.



1. Donner une configuration solution du problème.

2. Quelles sont toutes les valeurs possibles de la somme S ?

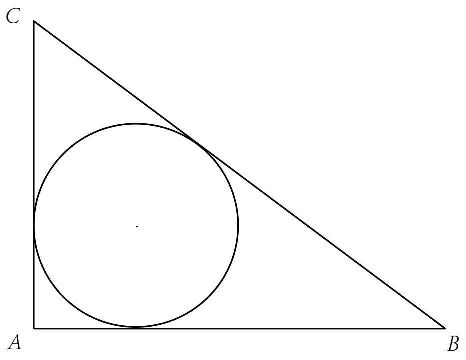
3. Donner les configurations solutions, lorsqu'elles existent, pour toutes ces valeurs de la somme S.

Deux solutions « images » l'une de l'autre par une rotation ou par une symétrie axiale laissant invariant le triangle seront considérées comme identiques.

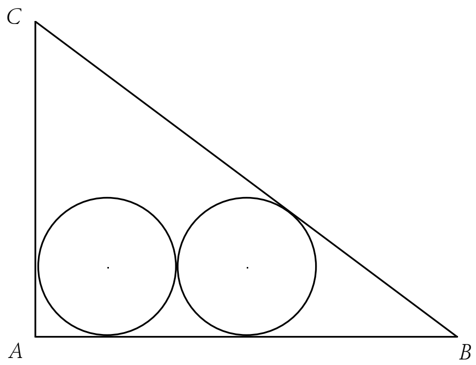
9-b : Sangakus

Au Japon, les Sangakus sont des tablettes commémoratives offertes dans un sanctuaire pour remercier les dieux de la découverte d'un théorème ; elles comportent des problèmes de géométrie qui mettent en jeu des cercles inscrits dans une figure donnée.

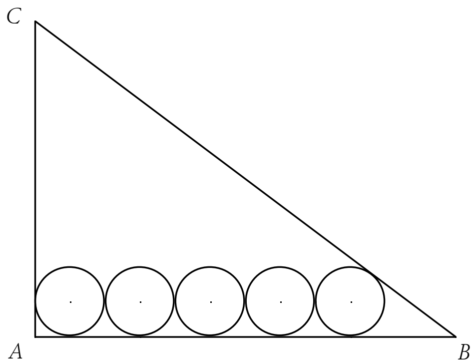
Dans le problème qui suit, on considère un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives : $AB = 4$ et $AC = 3$.



1. Calculer le rayon r_1 du cercle inscrit dans ce triangle.
(On pourra exprimer de deux manières l'aire de ce triangle.)



2. Deux cercles de même rayon sont tangents à deux côtés du triangle et tangents entre eux, comme sur la figure ci-contre.
Calculer le rayon r_2 de chacun de ces cercles.



3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère n cercles tous tangents au côté $[AB]$, tels que de plus :

- le premier est tangent au côté $[AC]$ et au deuxième cercle ;
- le dernier est tangent au précédent et au côté $[BC]$;
- chacun des autres est tangent à ses deux voisins.

La figure ci-contre représente le cas $n + 5$.

Exprimer en fonction de n le rayon r_n de chaque cercle. Pour quelle valeur de n ce rayon est-il égal à $\dfrac{1}{2008}$?

10. Grenoble

http://www.ac-grenoble.fr/maths/

10-a : La tour infernale

Dans une tour, un architecte a fait installer un ascenseur qui ne possède que deux boutons : le premier bouton permet à l'ascenseur de monter de 4 étages si le nombre d'étages de l'immeuble le permet, sinon l'ascenseur ne bouge pas. L'autre bouton permet à l'ascenseur de descendre de 7 étages si bien entendu le niveau où se situe l'ascenseur le permet, sinon il reste immobile.

De plus, on sait que si l'immeuble avait eu un étage de moins, la programmation n'aurait pas permis de servir tous les étages.

1. Combien l'immeuble a-t-il d'étages ?

2. L'ascenseur est au rez-de-chaussée et vous habitez au $7^{\text{ème}}$ étage. Quel nombre minimum d'arrêts est nécessaire pour rejoindre votre appartement ?

10-b : La fourmi non volante

Une salle rectangulaire a une largeur de 4 mètres ($AB = 4$), une longueur de 5 mètres ($BC = 5$), une hauteur de 3 mètres ($BF = 3$).

Une fourmi (non volante), ne se déplaçant qu'en ligne droite, est au coin F du plafond et veut atteindre par le plus court chemin une miette de pain située sur le plancher au centre de la pièce en O. Elle doit donc déterminer le plus court chemin pour aller de F à O en se déplaçant sur le plafond, le plancher et les murs de la pièce.

1. Elle envisage les trois parcours suivants :

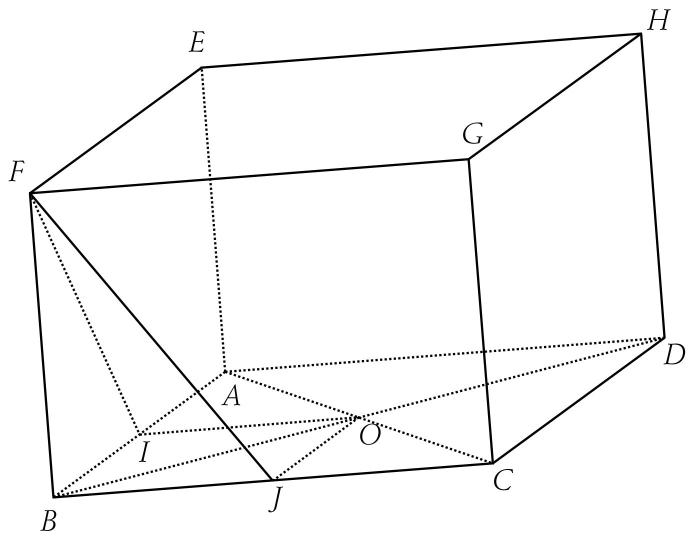
   - Se déplacer le long de l'arête FB puis sur le plancher en suivant la diagonale du rectangle $ABCD$ pour relier B à O.

   - Passer sur la face $FBAE$ pour atteindre le point I milieu de $[AB]$ puis sur le plancher suivant la médiane du rectangle $ABCD$ pour relier I à O.

   - Passer sur la face $FBCG$ pour atteindre le point J milieu de $[BC]$ puis sur le plancher suivant la médiane du rectangle $ABCD$ pour relier J à O.

Comparez les longueurs de ces trois parcours.

2. Déterminer le parcours le plus court possible que devra emprunter la fourmi pour relier F à O.



11. Lille

http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/premS.html

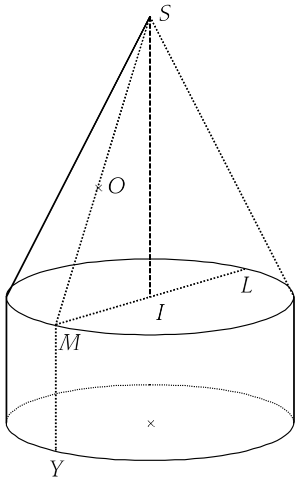
11-a : Un chapeau bizarre

Un chapeau a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur a (a réel strictement positif) et de base un cercle C de rayon a, surmonté d'un cône de révolution de sommet S et de base un cercle C' de centre I et de rayon a.

M et L sont deux points diamétralement opposés sur le cercle C', O est le milieu de $[MS]$ et Y est le point d'intersection de la parallèle à (SI) passant par M et du cercle C (voir figure ci-contre). De plus $SM = 2a$.

On veut décorer l'extérieur du chapeau avec un ruban d'extrémités O et Y passant par le point L.

Quelle est, en fonction de a, la longueur minimale d'un tel ruban ?



11-b : Le drôle de partage

Héloïse possède des jetons numérotés. Son petit frère Mathis lui en réclame quelques uns.

Héloïse observe tous les numéros, elle vient d'apprendre la multiplication par 2 et décide :

- lorsque deux jetons portent des numéros dont l'un est le double de l'autre, elle en donne un à Mathis et dans un premier temps conserve l'autre.

Exemple : Héloïse possède 5 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5.

Premier cas : elle voit d'abord que 2 est le double de 1,

- elle conserve 1, il lui reste donc 1, 3, 4, 5

- ou elle conserve 2, il lui reste 2, 3, 4, 5 mais 4 est le double de 2, elle donne donc le 2 ou le 4 ; finalement elle aura 3, 4, 5 ou 2, 3, 5.

Deuxième cas : elle voit d'abord que le double de 2 est 4

- elle conserve le 2, il lui reste 1, 2, 3, 5 mais 2 est le double de 1 donc finalement elle gardera 1, 3, 5 ou 2, 3, 5.

- elle conserve le 4, il lui reste 1, 3, 4, 5.

1. Héloïse possède 9 jetons numérotés de 1 à 9.

Montrer qu'Héloïse conserve nécessairement moins de 7 jetons. Préciser tous les choix possibles de 6 jetons.

2. Héloïse possède 2008 jetons numérotés de 1 à 2008. Combien peut-elle garder au maximum de jetons ?

12. Marseille

http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/olymp-an.htm

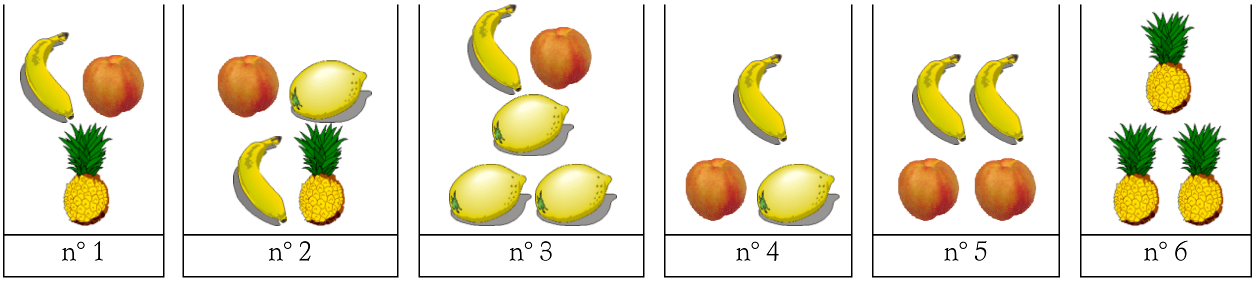
12-a : Des pommes, des poires, etc.

Concours S

On considère quatre variétés de fruits : pomme , citron , banane , ananas .

Les poids exprimés en grammes de ces objets sont des nombres entiers strictement positifs et distincts.

Les contenus des cagettes ci-dessous pèsent dans le désordre : 150 g, 210 g, 240 g, 270 g, 300 g et 450 g.



Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes en détaillant avec précision les étapes du raisonnement.

1. Le contenu de la caissette n° 5 pèse 240 g ou 300 g.

2. Le poids du contenu de la caissette n° 6 est supérieur ou égal à la moitié de celui du contenu de la caissette n° 5.

3. Un ananas pèse 150 g.

4. Une pomme pèse 60 g.

12-b : ***Billard***

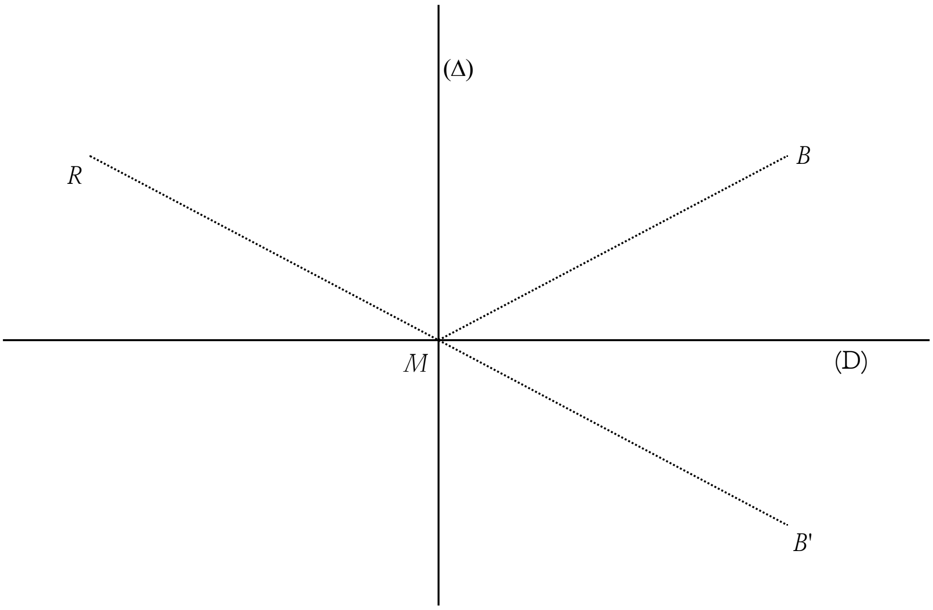
Concours S

1. a. <u>Question préliminaire :</u> Sur la figure ci-dessous, les points B et B' sont symétriques par rapport à la droite (D). On note M le point d'intersection de la droite (RB') et de la droite (D), et (Δ) la droite prependiculaire à la droite (D) passant par M.

Justifier que la droite (Δ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RMB}$.

b. Le billard français se joue avec trois billes : une rouge et deux blanches. On peut y jouer de différentes façons et notamment dans la modalité « 3 bandes ».

Dans ce cas, pour marquer un point, un joueur doit parvenir à faire entrer en contact la bille rouge (avec laquelle il joue) avec les deux autres billes en faisant en sorte que la bille rebondisse sur au moins trois côtés (bandes) avant de toucher la dernière bille blanche.



Dans cette question on ne considère que deux billes : une rouge (R) et une blanche (B).

Tracer sur le schéma n°1, en laissant apparents les traits de construction, une trajectoire possible pour la bille R afin qu'elle percute la bille B après 3 rebonds sur les bandes 1, 2 et 3 du billard (lorsqu'une bille rebondit sa trajectoire est symétrique par rapport à la perpendiculaire à la bande au point de contact).

2. Nous sommes maintenant en 2050 et les billards circulaires ont remplacé les billards rectangulaires. On ne considère plus que la bille R.

a. Question préliminaire : *ABC* est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon r ; montrer que le cercle inscrit dans *ABC* a pour rayon $\frac{r}{2}$.

b. Construire sur le schéma n°2 une trajectoire possible pour la bille R lui permettant de repasser par sa position initiale après trois rebonds sur le bord sans passer par le centre O du billard. Préciser soigneusement le raisonnement en justifiant la construction.

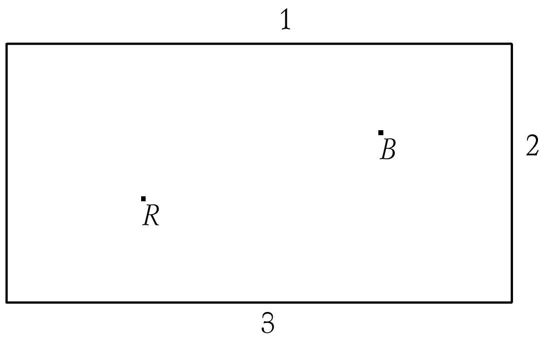


Schéma n° 1

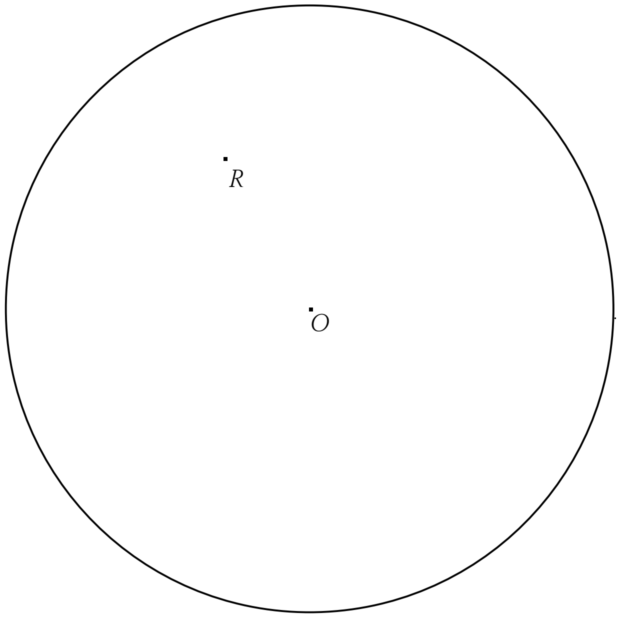


Schéma n° 2

12-c : Match

Concours ES, L, Technologiques

Lors d'un match de rugby, les équipes peuvent marquer :

- 3 points en réalisant un drop ou une pénalité,
- 5 points à l'issue d'un essai non transformé,
- 7 points à l'issue d'un essai transformé.

À titre d'exemple une équipe peut marquer 13 points de deux façons (en ne tenant pas compte de l'ordre dans lequel les points sont marqués) :

- en marquant un essai transformé et deux drops ou pénalités $(13=7+3+3)$,

- en marquant deux essais non transformés et un drop ou une pénalité $(13=5+5+3)$.

1. Déterminer toutes les façons de marquer 17 points au rugby.

2. Jérôme prétend que son équipe a marqué 21 points en réalisant deux essais et plusieurs drops. Est-ce possible ?

3. Pierre affirme que son équipe a marqué 39 points en réalisant deux essais et autant de drops que de pénalités. Est-ce possible ?

4. L'Australie a gagné la coupe du monde de rugby en 1999 en battant la France sur le score de 35 à 12. Deux essais ont été réalisés au cours du match et aucun drop n'a été marqué. Combien de pénalités a marqué chaque équipe ?

12-d : Chaud devant !

Concours ES, L, Technologiques

Deux des unités de mesure de température sont le degré Celsius (largement utilisé en Europe) et le degré Fahrenheit (toujours utilisé aux Etats-Unis et dans certains pays anglophones).

On considère le tableau de correspondance suivant entre des mesures de températures exprimées en degrés Celsius (°C) et en degrés Fahrenheit (°F) :

°C	°F	°C	°F
110	230	30	
100		20	
90		10	50
80		0	
70		-10	
60		-20	
50		-30	
40			

Par définition de ces deux unités de mesure, les *accroissements* de températures exprimées en degrés Celsius sont proportionnels aux *accroissements* de températures exprimées en degrés Fahrenheit.

1. Recopier et compléter le tableau précédent. Expliquer la démarche.

2. Un jour d'été, on a mesuré une température de 36 degrés Celsius. Déterminer la valeur correspondante en degrés Fahrenheit.

3. Le titre « *Fahrenheit 451* » du célèbre roman de Ray Bradbury fait référence à la température, exprimée en degrés Fahrenheit, à laquelle le papier commence à brûler spontanément au contact de l'air.

À quelle température, exprimée en degrés Celsius, le papier commence-t-il à brûler spontanément au contact de l'air ?

4. Plus généralement, si une même température vaut x degrés Celsius et y degrés Fahrenheit, quelle relation y-a-t'il entre x et y ?

13. Montpellier

http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/pedago/jeumath/olymp.htm

13-a : 2008 dans tous ses états

Série S

On construit une suite de nombres rangés dans un ordre croissant, constitués des seuls chiffres 0, 2 et 8.

Le premier nombre est ainsi 0 qui est de rang 1, le deuxième est 2 qui est de rang 2, le troisième est 8 qui est de rang 3 et ainsi de suite.

Le tableau suivant donne les dix premiers éléments de cette suite :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre	0	2	8	20	22	28	80	82	88	200

1. Quel est le plus grand nombre qui s'écrit avec exactement un 0, un 2, et un 8 ? Préciser son rang.
2. Quel est le rang, en fonction de l'entier naturel non nul n, du nombre qui s'écrit avec n chiffres 8 ?
3. Déterminer le rang du nombre 2008.
4. Comment s'écrit le nombre qui est de rang 2008 ? Justifier.

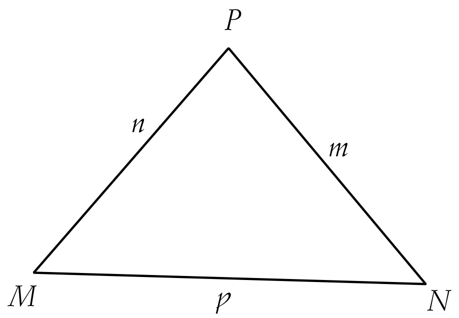
13-b : Quadrisection

Série S

1. Construire un triangle rectangle ABC tel que la hauteur, la bissectrice et la médiane issues de A partagent, dans cet ordre, l'angle de sommet A en quatre angles de même mesure. Vous préciserez les mesures des trois angles du triangle.

2. Prouver qu'un triangle ayant un de ses angles partagé en 4 angles de même mesure par la hauteur, la bissectrice et la médiane issues du sommet de cet angle, dans cet ordre, est obligatoirement rectangle.

On rappelle les formules suivantes :



$aire(MNP) = \frac{1}{2} mn \sin(\widehat{P})$ avec $m = PN$, $n = PM$

et $\widehat{P} = \widehat{MPN}$,

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$,

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b[2\pi] \\ \text{ou} \\ a = \pi - b[2\pi] \end{cases}.$$

13-c : Coktails

Séries autres que S

On dispose de trois récipients A, B et C de 2 litres chacun.

Le récipient A contient un litre d'un cocktail constitué de 60% de jus d'ananas et de 40% de jus de banane.

Le récipient B contient un litre d'un cocktail constitué de 40% de jus de banane et de 60% de jus de mangue.

Le récipient C contient un litre d'un cocktail constitué de 20% de jus d'ananas, de 10% de jus de banane et de 70% de jus de mangue.

On effectue deux manipulations successives :

1$^{\text{ère}}$ manipulation : On verse la moitié du cocktail contenu dans le récipient A dans le récipient B et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

2$^{\text{ème}}$ manipulation : On verse alors un tiers du mélange obtenu dans le récipient B dans le récipient C et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

1. A l'issue de ces deux manipulations :

Quel est le volume de jus de fruits contenu dans chaque récipient ?

Quel est la proportion de jus d'ananas, de jus de banane et de jus de mangue dans chaque récipient ?

2. A l'issue de ces deux manipulations, quelle proportion du mélange contenu dans le récipient B et quelle proportion du mélange contenu dans le récipient C faut-il verser dans le récipient A pour que dans le récipient A, il y ait autant de jus d'ananas que de jus de banane que de jus de mangue ?

13-d : Mini-sudoku

Séries autres que S

Dans le mini-sudoku, on complète une grille formée de 4 carrés 2x2 avec les chiffres 1, 2, 3, 4 de telle façon que, sur chaque ligne, chaque colonne et dans chacun des 4 carrés 2x2, il n'y ait qu'une seule fois chaque chiffre.

Exemple :

	a	*b*	*c*	*d*
A	1	2	3	4
B	3	4	1	2
C	2	1	4	3
D	4	3	2	1

1. Résoudre le problème ci-dessous, c'est-à-dire compléter la grille en respectant les règles du mini-sudoku. Expliquer le raisonnement.

On pourra utiliser la notation naturelle des cases pour expliquer le raisonnement. Par exemple, *Aa* désigne la case contenant le 1 déjà placé, la ligne *B* contient le 2 déjà placé et la colonne *b* contient le 3 déjà placé, enfin le carré *CDcd* contient le 4 déjà placé.

	a	*b*	*c*	*d*
A	1			
B			2	
C		3		
D				4

2. Si on retire le chiffre 4 du tableau de la question 1., on obtient le tableau ci-dessous ; déterminer les cases dont le remplissage reste imposé.

	a	*b*	*c*	*d*
A	1			
B			2	
C		3		
D				

3. Démontrer que si on retire un quelconque des 4 chiffres du tableau de la question 1., le problème admet alors toujours 3 solutions et 3 seulement.

14. Nancy-Metz

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/olympiad.htm

14-a : Plus petit chiffre

Séries S/STI

On note $p(n)$ le plus petit chiffre figurant dans l'écriture décimale du nombre entier naturel n. Ainsi, $p(306) = 0$, $p(4512) = 1$ et $p(798) = 7$.

1. Calculer la somme $S_2 = p(10) + p(11) + p(12) + \ldots\ldots + p(98) + p(99)$.

2. a. Montrer qu'il y 9^3 nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 1 à 9.

b. Combien y'a-t-il de nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 2 à 9 ?

c. En déduire qu'il y a $9^3 - 8^3$ nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 1$.

3. Combien y a-t-il de nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 2$?

4. Calculer la somme $S_3 = p(100) + p(101) + p(102) + \ldots\ldots + p(998) + p(999)$.

14-b : Le circuit

Séries S/STI

On pourra utiliser sans les démontrer les résultat suivants :

Étant donnés deux cercles C_1 et C_2 de centres respectivement O_1 et O_2 et tangents en un point A,

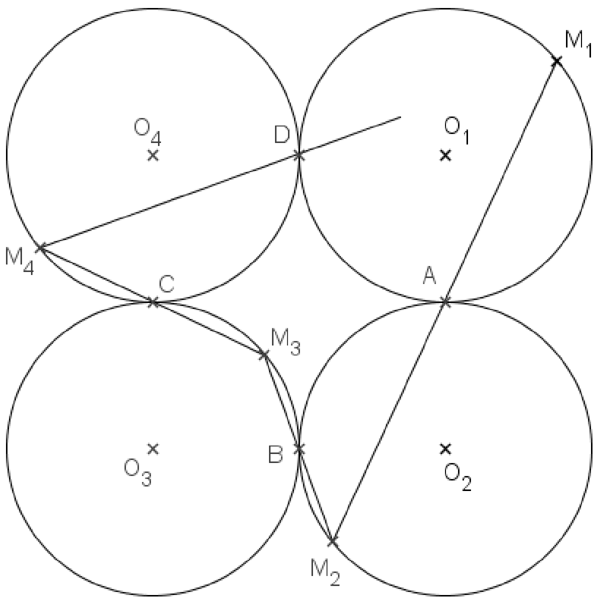
(1) A est le milieu de $[O_1O_2]$;

(2) Si M_1 est un point du cercle C_1, son symétrique M_2 par rapport à A appartient au cercle C_2.

La figure ci-dessous représente un circuit formé de quatre anneaux circulaires identiques de rayon r, tangents deux à deux et dont les centres O_1, O_2, O_3 et O_4 sont les sommets d'un carré.

A, B, C et D sont les points de contact des cercles tangents.

On choisit un point M_1 sur le cercle de centre O_1 et l'on construit successivement M_2 symétrique de M_1 par rapport à A, M_3 symétrique de M_2 par rapport à B, M_4 symétrique de M_3 par rapport à C, M_5 symétrique de M_4 par rapport à D.



Le but de l'exercice est de montrer que $M_5 = M_1$ et que l'aire $\mathcal{A}$ de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à l'aire du carré $O_1O_2O_3O_4$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

2. Démontrer que les points M_3, M_1 et M_5 sont alignés et que $M_5 = M_1$.

3. Dans la figure tracée ci-dessus, $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère. Préciser pour quelle(s) position(s) de M_1 cela n'est pas le cas.

4. Dans cette question on se place dans le cas où $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère.

a. Montrer que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires.

b. Calculer en fonction de r les longueurs M_1M_3 et M_2M_4.

c. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à $4r^2$.

Ce résultat demeure-t-il valable dans les cas particuliers de la question 3 ?

14-c : Plus petit chiffre

Séries autres que S/STI

On note $p(n)$ le plus petit chiffre figurant dans l'écriture décimale du nombre entier naturel n. Ainsi, $p(306) = 0$, $p(4512) = 1$ et $p(798) = 7$.

1. Calculer la somme $S_2 = p(10) + p(11) + p(12) + \ldots\ldots + p(98) + p(99)$.

2. a. Montrer qu'il y 9^3 nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 1 à 9.

b. Combien y'a-t-il de nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 2 à 9 ?

c. En déduire qu'il y a $9^3 - 8^3$ nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 1$.

3. Montrer qu'il y a $8^3 - 7^3$ nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 2$.

4. Calculer la somme $S_3 = p(100) + p(101) + p(102) + \ldots\ldots + p(998) + p(999)$.

14-d : Le circuit

Séries autres que S/STI

On pourra utiliser sans les démontrer les résultat suivants :

Étant donnés deux cercles C_1 et C_2 de centres respectivement O_1 et O_2 et tangents en un point A,

(1) A est le milieu de $[O_1O_2]$;

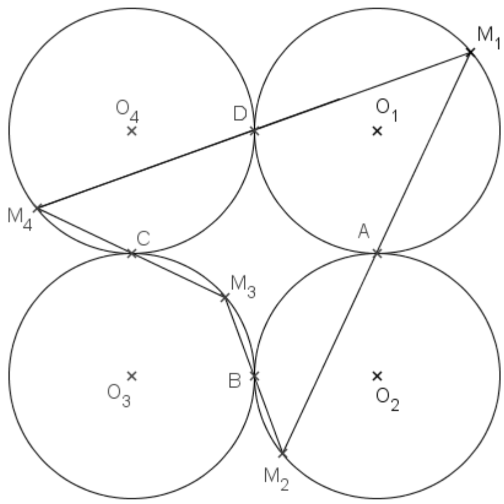
(2) Si M_1 est un point du cercle C_1, son symétrique M_2 par rapport à A appartient au cercle C_2.

La figure ci-dessous représente un circuit formé de quatre anneaux circulaires identiques de rayon 1, tangents deux à deux et dont les centres O_1, O_2, O_3 et O_4 sont les sommets d'un carré.

A, B, C et D sont les points de contact des cercles tangents.

On choisit un point M_1 sur le cercle de centre O_1 et l'on construit successivement M_2 symétrique de M_1 par rapport à A, M_3 symétrique de M_2 par rapport à B, M_4 symétrique de M_3 par rapport à C.

On admet que le circuit se ferme, c'est-à-dire que M_1 est le symétrique de M_4 par rapport à D.



Le but de l'exercice est de montrer que l'aire de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à l'aire du carré $O_1O_2O_3O_4$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

2. Dans la figure tracée ci-dessus, $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère. Préciser pour quelle(s) position(s) de M_1 cela n'est pas le cas.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère.

a. Démontrer que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires.

b. Calculer M_1M_3 et M_2M_4.

c. Montrer que l'aire A de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à 4.

4. Ce résultat demeure-t-il valable dans les cas particuliers de la question 3 ?

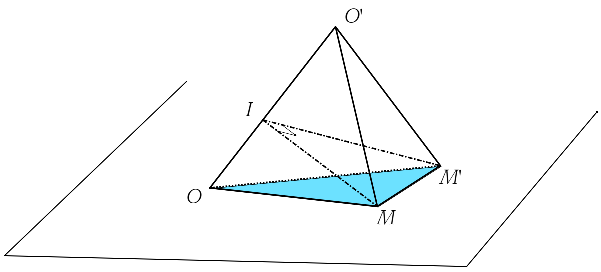
15. Nice

http://www.ac-nice.fr/maths/

15-a : Des pliages version 3

Concours S, STI

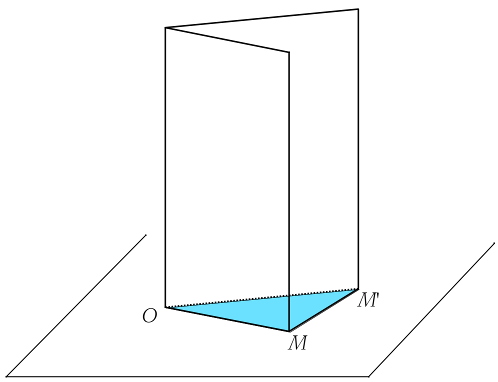
1. Marie plie une feuille de papier carrée de côté 30 cm suivant une diagonales avec un angle d'ouverture de 90° et elle pose ce pliage sur une table ; elle s'intéresse au triangle découpé sur la table appelé « polygone de sustentation ».



I est le milieu de $[OO']$, l'angle $\widehat{MIM'}$ est droit et le polygone de sustentation est OMM'.

Quelle est l'aire du polygone de sustentation obtenu ?

2. Marie plie maintenant cette feuille suivant la médiatrice d'un côté. Elle la pose debout sur une table et s'intéresse au polygone de sustentation. Sur la figure il s'agit du triangle OMM'.

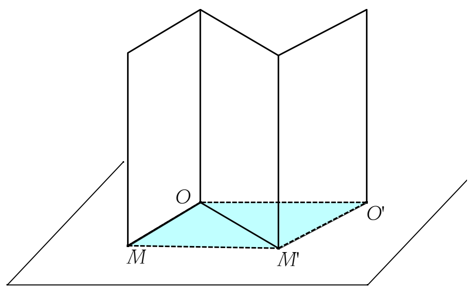


a. Quelle est l'aire du polygone de sustentation si l'angle d'ouverture est 60° ?

b. Elle cherche le polygone de sustentation de cette forme ayant l'aire la plus grande possible. On appelle α l'angle d'ouverture ; déterminer l'aire de MOM' en fonction de α puis déterminer α pour obtenir l'aire maximale et donner l'aire obtenue (on pourra utiliser l'angle $\frac{\alpha}{2}$ ainsi que la formule $\sin 2a = 2\sin a \cos a$).

3. Marie plie à nouveau cette feuille de papier en trois parties de largeur égale. Elle a deux possibilités de l'ouvrir debout : en zigzags et en trapèze.

Déterminer dans chaque cas les angles d'ouverture pour lesquels le polygone de sustentation a l'aire maximale et déterminer l'aire obtenue.

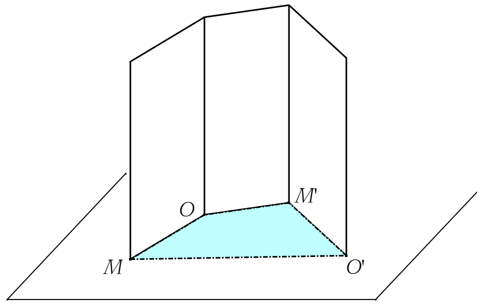


zigzags

Remarque concernant la troisième partie : on n'étudiera l'aire maximale du polygone de sustentation que dans les cas où :

zig-zag : les angles $\widehat{MOM'}$ et $\widehat{OM'O'}$ sont égaux,

trapèze : les angles $\widehat{MOO'}$ et $\widehat{OO'M'}$ sont égaux.



trapèze

15-b : Un comptage de points

Concours S, STI, ES, STG

On décide de numéroter les points du plan à coordonnées entières de la façon suivante :

au point (0 ; 0) on associe le nombre 0,

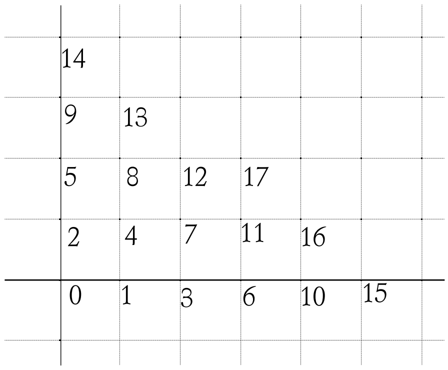
au point (1 ; 0) on associe le nombre 1,

au point (0 ; 1) on associe le nombre 2,

au point (2 ; 0) on associe le nombre 3,

au point (1 ; 1) on associe le nombre 4,

etc. comme sur la figure ci-contre.



1. En continuant de cette façon :

a. Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (3 ; 4) ?

b. Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (0 ; 50) ?

c. Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (50 ; 0) ?

2. Si n est un nombre entier naturel non nul :

a. Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (0 ; n) ?

b. Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (n ; 0) ?

3. Soient x et y deux entiers naturels tels que $x+y=n$.

Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (x ; y) ?

4. De façon générale quel nombre associe-t-on au point de coordonnées (x ; y) avec x et y entiers naturels ?

5. Réciproquement, à quelles coordonnées est associé le nombre 2008 ?

On rappelle que pour tout entier n, $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

15-c : Ce n'est pas gagné !

Concours ES, STG

Je joue à Pile ou Face avec les règles suivantes :

je commence avec une mise a de 1 euro et je ne m'arrête de jouer que lorsque je n'ai plus d'argent (j'ai alors perdu) ou lorsque j'ai gagné b = 5 euros (j'ai alors perdu).

A. A chaque lancer, si j'ai 1 ou 2 euros je les mise, et si j'ai plus je mise la différence à 5 euros (par exemple si j'ai 4 je mise 1) ; par ailleurs

- si j'obtiens Pile je perds ma mise,
- si j'obtiens Face je récupère le double de ma mise.

On appelle « avoir » la somme possédée après un lancer. On note pour simplifier (PFFP) la suite de résultats Pile, Face, Face, Pile.

1. Je commence la partie en faisant (FP). Quel est mon avoir ?

2. Même question avec (FFPP).

3. Quel est le nombre minimum de lancers pour gagner ?

4. Au bout de 2008 lancers je n'ai toujours ni gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?

B. On change les règles avec une mise $a = 1$ et arrêt lorsque $b = 9$. A chaque lancer si j'ai entre 1 et 4 euros je mise cette somme et si j'ai plus je mise la différence à 9.

1. Je commence la partie en faisant (FP). Quel est mon avoir ?

2. Donner une suite de résultats pour laquelle mon avoir repasse à 1 euro.

3. Au bout de 2008 lancers je n'ai toujours ni gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?

C. J'arrive dans un lieu où une partie de ce type est en cours avec $a = 1$ et b m'est inconnu. Pendant ma présence les avoirs successifs du joueur sont 10, 20 et 5.

1. Combien vaut b ?

2. A partir du moment où le joueur a 5 euros quels sont les avoirs possibles du joueur dans cette partie ?

16. Orléans Tours

http://www.ac-orleans-tours.fr/maths/rubrique.php3?id_rubrique=40

16-a : Le bon ordre

Les égalités proposées ci-après définissent trois nombres réels A, B et C.

Pour faciliter la lecture, il est précisé que chacune des écritures décimales qui apparaissent comporte neuf zéros après la virgule.

$$A = \frac{1,0000000001}{2,0000000001-(1,0000000001)^2}, \quad B = \frac{1,0000000001}{2,0000000003-(1,0000000002)^2},$$

$$C = \frac{1,0000000002}{2,0000000002-(1,0000000001)^2}$$

Parmi ces trois nombres réels A, B et C, lequel est le plus grand ? Lequel est le plus petit ?

16-b : Des cercles au carré

Dans le plan on considère un carré $ABCD$.

Un point E est placé à l'intérieur du carré.

On désigne par F le point d'intersection du segment $[AB]$ et de la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point E.

On considère le cercle (C) de centre E qui est tangent en F à la droite (AB). On supposera $AB = 1$ pour les calculs, et on posera $x = AF$ et $y = FE$.

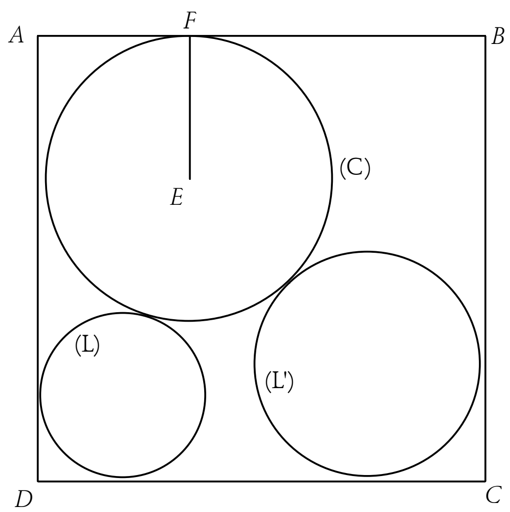
1. Faire une figure et hachurer l'ensemble des points E pour lesquels le cercle (C) est entièrement situé à l'intérieur du carré $ABCD$. Justifier votre choix par un raisonnement.

Dans la suite, on supposera la condition précédente réalisée. On considère alors, comme sur la figure ci-dessous, les deux cercles (L) et (L') intérieurs également au carré $ABCD$ et définis de la façon suivante :

- le cercle (L) est tangent à la droite (DC), tangent à la droite (AD) et tangent extérieurement au cercle (C) ; le centre du cercle (L) appartient au segment $[BD]$;

- le cercle (L') est tangent à la droite (DC), tangent à la droite (BC) et tangent extérieurement au cercle (C) ; le centre du cercle (L') appartient au segment $[AC]$.

On admettra que de tels cercles existent et on ne cherchera pas à les construire, hormis dans le cas particulier de la question 4. b.



On note r et r' les rayons respectifs des cercles (L) et (L').

2. Déterminer l'ensemble des points E tels que $r = r'$.

3. Existe-t-il une position du point E telle que les cercles (L), (L') et (C) aient le même rayon ? Si oui laquelle ?

4. a. Démontrer qu'il existe une position du point E pour que $r = r'$ et que, de plus, les cercles (L) et (L') soient tangents extérieurement.

b. Proposer dans ce cas une construction du point E et des trois cercles, en utilisant exclusivement une règle non graduée et un compas.

17. Paris (*)

http://mathematiques.scola.ac-paris.fr/actualites.htm

18. Poitiers (*)

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?rubrique26

19. Strasbourg

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php?frame=.%2Fcompet%2Fsujets.php&m0=comp&m1=oly&m2=suj&categ=olymp

Toutes sections sauf S

19-a : Les carrés et les cubes

On écrit tous les entiers de 1 à 2008 qui ne sont ni des carrés ni des cubes d'entiers.

Combien en écrit-on ?

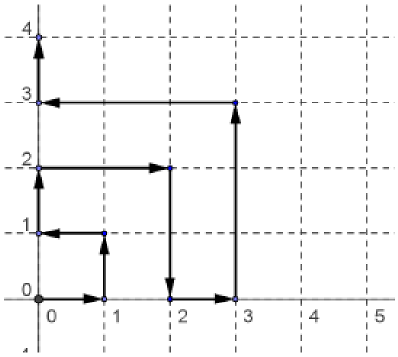
19-b : Les balles de tennis

On dispose de n balles de tennis identiques à répartir entre trois joueurs : Paul, Henri et Mathieu. Un joueur peut ne recevoir aucune balle.

1. Déterminer le nombre de répartitions différentes possibles dans les cas $n=3$ puis $n=4$.
2. Déterminer le nombre de répartitions différentes possibles dans le cas général.

Série S

19-c : Les déplacements sur un réseau



Une fourmi se déplace à vitesse constante de 1 cm par seconde.

Elle se déplace comme indiqué sur le schéma ci-contre, partant de (0 ; 0) et visitant tous les points $(a ; b)$ à coordonnées entières positives ou nulles.

1. Combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre ainsi les points (3 ; 0), (4 ; 0), (4 ; 4) et (5 ; 5) ?

2. p désigne un entier naturel.

Combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point $(2p ; 0)$ au point $(2p+2 ; 0)$?

3. p désigne un entier naturel. Combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point $(2p+1 ; 0)$ au point $(2p+3 ; 0)$?

4. n désigne un entier naturel. Combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre le point $(n ; 0)$? le point $(n ; n)$?

5. Où se trouvera la fourmi au bout de 2008 secondes ?

19-d : Les triplets

On part d'un triplet de réels de réels (a, b, c) que l'on transforme en $(a+b, b+c, c+a)$.

On recommence cette opération indéfiniment.

Par exemple avec (1, 3, –4) on obtient successivement (4, –1, –3), (3, –4, 1), (–1, –3, 4), (–4, 1, 3), (–3, 4, –1), (1, 3, –4) qui est le triplet initial : le processus est donc périodique.

Déterminer à quelle condition portant sur a, b et c le processus est périodique et préciser alors le nombre d'étapes nécessaires pour retomber sur le triplet initial (a ,b ,c).

20. Toulouse

http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades/annales.php

20-a : Chapeau les chameaux !

Candidats toutes séries. Les questions sont indépendantes.

1. Un chamelier et son chameau, quand ils se déplacent, consomment pour leur subsistance une banane par kilomètre à eux deux. Ils doivent transporter des bananes d'une bananeraie A à une oasis B distante de 300 km.

Il y a 20 000 bananes stockées au point A. Le chameau, un animal adulte très vigoureux ne peut porter que 2 000 bananes au maximum en un chargement.

Quel est le nombre maximal de bananes que le chamelier peut faire parvenir en B, en tenant compte du fait que, son travail accompli, il retourne, avec son chameau, à son point de départ A.

2. Parmi les bananes livrées au point B, 7 000 doivent être maintenant acheminées jusqu'à deux villes D et E, situées respectivement à 100 km et 200 km de l'oasis B dans des directions distinctes.

Deux jeunes chameaux vont transporter ces bananes. Du fait de leur jeune âge, chacun ne peut transporter que 1 000 bananes au maximum en un seul chargement. La consommation de ces chameaux, et de leurs chameliers, est toujours de 1 banane par kilomètre. De plus, le même nombre de bananes exactement doit être livré, à la fin, à chacune des deux villes D et E, et les deux chameaux doivent revenir à leur point de départ.

Proposer et justifier un ensemble de trajets effectués par ces deux chameaux, permettant de livrer effectivement le plus grand nombre de bananes possible aux villes D et E.

3. En partant de la bananeraie A, le chamelier et son chameau vigoureux qui peut porter jusqu'à 2 000 bananes en un seul chargement doivent maintenant transporter des bananes jusqu'à une ville C située à 1 000 km de A.

Comme précédemment, ils consomment une banane par kilomètre. Il y a maintenant 3 200 bananes stockées au point A. Son travail achevé le chamelier reste à la ville C. Dans ces conditions le chamelier constate que ce qu'il peut faire de mieux est de faire parvenir 1 000 bananes à la ville C en effectuant un seul aller mais en laissant 1 200 bananes à la bananeraie.

Le chamelier se propose alors, pour ce transport, d'utiliser un point de stockage intermédiaire I, situé à une distance x de A et de faire des allers-retours.

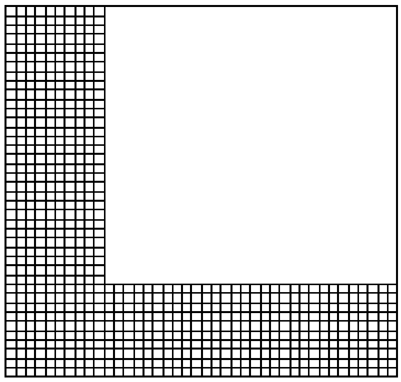
Comment doit s'organiser le chamelier pour faire parvenir un nombre maximum de bananes en C ? Décrire en détail le trajet effectué, préciser la position choisie pour le point de stockage intermédiaire et préciser le nombre de bananes acheminées en C.

20-b : Nombres L

Candidats des séries autres que la série S

Dans une feuille de papier quadrillé, on a découpé un carré en s'aidant du quadrillage : la longueur du côté correspond à un nombre entier de carreaux.

Dans ce carré de papier, on enlève, toujours en s'aidant du quadrillage, un carré plus petit (confère figure ci-dessous).



Le carré enlevé a donc pour côté un nombre entier de carreaux. On appelle L le polygone restant ; son aire n est un nombre entier de carreaux.

Ainsi, si le grand carré a pour côté 4, le petit pour côté 2, L a pour aire $n = 16 - 4 = 12$ carreaux.

On se demande si l'aire de L peut être n'importe quel entier naturel.

1. Quelles sont les aires que l'on peut obtenir pour L lorsque le grand carré a 5 carreaux de côté ?

2. Trouver les dimensions d'un grand carré et d'un petit permettant d'obtenir un polygone L ayant 3 carreaux pour aire.

3. Peut-on obtenir $n = 15$ carreaux ? De combien de façons différentes ?

4. Plus généralement, dans le cas où n est impair, peut-on trouver un grand carré et un petit carré permettant d'obtenir un polygone L ayant une aire d'exactement n carreaux ?

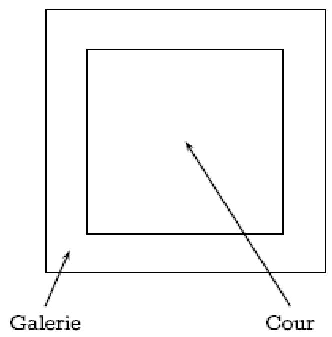
5. Et dans le cas où n est pair ?

20-c : Constructions à la manière des compagnons du Moyen-Âge

Candidats de la série S

Un cloître est constitué d'une cour intérieure centrale entourée d'une galerie latérale. La forme des cloîtres est généralement carrée et est telle que l'aire de la galerie est égale à celle de la cour centrale (voir figure 1).

Figure 1



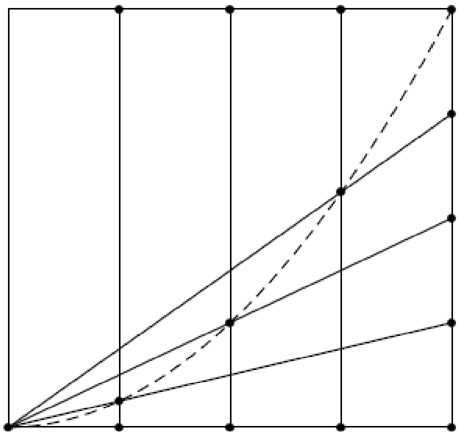
Les compagnons ont construit un mur extérieur délimitant un enclos carré que l'on veut aménager comme un cloître. Ils disposent pour cela de cordes qu'ils peuvent :

- tendre entre deux points, ce qui permet de tracer des segments de droites ;
- tendre à partir d'un point fixe, ce qui permet de tracer des arcs de cercle.

1. Proposer une méthode permettant de tracer dans l'enclos un carré délimitant la future cour intérieure centrale du cloître.

2. Les compagnons ont tracé, dans la cour intérieure, un chemin. Voici la construction qui a été réalisée :

Figure 2



Comment les compagnons ont-ils pu partager les côtés du carré en 4 parties égales avec leurs cordes ?

L'idée des compagnons serait de poursuivre en partageant en 8, puis en 16, etc. Le chemin a été ébauché en pointillés sur la figure 2. Que dire de sa forme possible ?

21. Versailles

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades.htm

21-a : Permutations

Concours S, STI

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On écrit les nombres entiers, de 1 à n, dans l'ordre croissant puis dans un ordre quelconque. On obtient ainsi deux listes, $L_1 = \{1, 2, 3, ..., n\}$ et $L_2 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.

On calcule ensuite les distances entre 1et x_1, 2 et x_2, ..., n et x_n.

Le tableau suivant donne un exemple de permutation et de calcul dans le cas où $n = 5$ (ce n'est pas le seul).

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	4	2	1	5	3
Distances	3	0	2	1	2

1. Dans le cas où $n = 4$, puis dans le cas où $n = 5$, donner un exemple de liste L_2 telle que toutes les distances soient deux à deux distinctes.

2. On suppose que $n=6$. Montrer que, quelle que soit la liste L_2, deux des distances obtenues, au moins, sont identiques.

3. Plus généralement, montrer que s'il existe une liste L_2 telle que toutes les distances obtenues soient deux à deux distinctes, alors n est un multiple de 4 ou $(n-1)$ est un multiple de 4.

21-b : Dominos

Concours S, STI

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un damier carré de côté n est divisé en n^2 cases carrées de côté 1.

On recouvre **certaines** de ces cases par des dominos rectangles de largeur 1 et de longueur 2. Chaque domino recouvre exactement deux cases ayant un côté commun (disposées l'une à côté de l'autre ou l'une sous l'autre).

Aucun domino ne sort du damier et aucune case n'est recouverte par plus d'un domino. Certaines cases ne sont pas recouvertes, mais il n'est pas possible d'ajouter un domino et aucun des dominos placés ne peut glisser vers une case non recouverte.

Un tel recouvrement est dit *rigide*.

L'objet du problème est d'étudier le nombre maximal de cases non recouvertes dans le cas d'un recouvrement rigide.

1. On considère un recouvrement rigide du damier de côté n.

a. Prouver qu'il n'y a aucune case non recouverte parmi celles qui forment le bord du damier.

b. Prouver que dans tout sous-damier de 2×2 cases, il n'y a pas plus d'une case non recouverte.

c. Prouver que dans tout sous-damier rectangle de 5×2 cases, il n'y a pas plus de deux cases non recouvertes.

2. Donner un exemple de recouvrement rigide du damier carré 7×7 où 5 cases ne sont pas recouvertes.

3. Prouver que dans un recouvrement rigide du damier $n\times n$ il n'y a pas plus de $\dfrac{n(n+5)}{5}$ cases non recouvertes.

4. Prouver que, pour tout n supérieur ou égal à 7, on peut trouver un recouvrement rigide avec au moins $\dfrac{(n-6)^2}{5}$ cases non recouvertes.

5. On note $f(n)$ le plus grand nombre de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide d'un damier $n\times n$. Vers quelle limite tend $\dfrac{f(n)}{n^2}$?

21-c : Circulez !

Concours L, ES, STG

Dans un pays se trouvent 5 villes reliées deux à deux par des routes. Il n'y a jamais plus d'une route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres au moyen de ponts. Chaque route est à sens unique.

Des responsables du Ministère du sens de la circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sort d'une ville quelconque, il est impossible d'y revenir.

Un tel réseau de routes entre les 5 villes est dit *catastrophique*.

1. Donner un exemple de réseau catastrophique.

2. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.

3. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres.

4. Combien, au minimum, faut-il changer de sens de circulation pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (en plusieurs étapes, éventuellement) dans le nouveau réseau routier obtenu ?

5. Prouver qu'il y a exactement 120 réseaux routiers catastrophiques possibles.

21-d : Carré latin diagonal

Concours L, ES, STG

Soit n un entier naturel non nul.

On considère un tableau carré à n lignes et n colonnes, dont chaque case contient un entier compris entre 1 et n, de telle sorte qu'il n'y ait pas deux fois le même nombre sur la même ligne, ni sur la même colonne, ni sur chacune des deux diagonales principales. On dit qu'un tel carré est un carré latin diagonal.

On appelle masse du tableau la somme des nombres situés dans les cases en bas à gauche sous la première diagonale (celle qui contient la case située en haut à gauche). Cette masse est notée M.

La figure ci-contre représente un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes. Sa masse est égale à la somme des nombres situés dans les cases grisées : $M = 28$.

1	3	4	5	2
2	4	1	3	5
3	2	5	4	1
5	1	3	2	4
4	5	2	1	3

1. Y a-t-il des carrés latins diagonaux à 2 lignes et 2 colonnes ? à 3 lignes et 3 colonnes ?

2. On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 4 lignes et 4 colonnes.

- Donner un exemple d'un tel carré et calculer sa masse.
- Montrer que tout carré latin diagonal de ce type a une masse inférieure à 17.
- Donner un exemple d'un tel carré latin diagonal de masse 17.
- Quelle est la valeur minimale de la masse d'un carré latin diagonal à 4 lignes et 4 colonnes ?

3. On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 5 lignes et 5 colonnes.

- Compléter le carré ci-contre pour obtenir un carré latin diagonal de masse 30 (on expliquera d'abord comment remplir les cases grisées).
- Donner un exemple de carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes de masse 32.
- Déterminer la valeur maximale de la masse d'un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes.

1				2
		5		4
4				3