Olympiades académiques de mathématiques

1. Exercices communs

1-a : Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.

Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4, 3) elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3, 2, 2).

Avertissement : on considère que les répartitions (4, 3) et (3, 4) sont identiques. De même les répartitions (3, 2, 2), (2, 3, 2) et (2, 2, 3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).

Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations on obtient la répartition (4, 2, 1).

Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3. Paul et Virginie jouent ensemble.

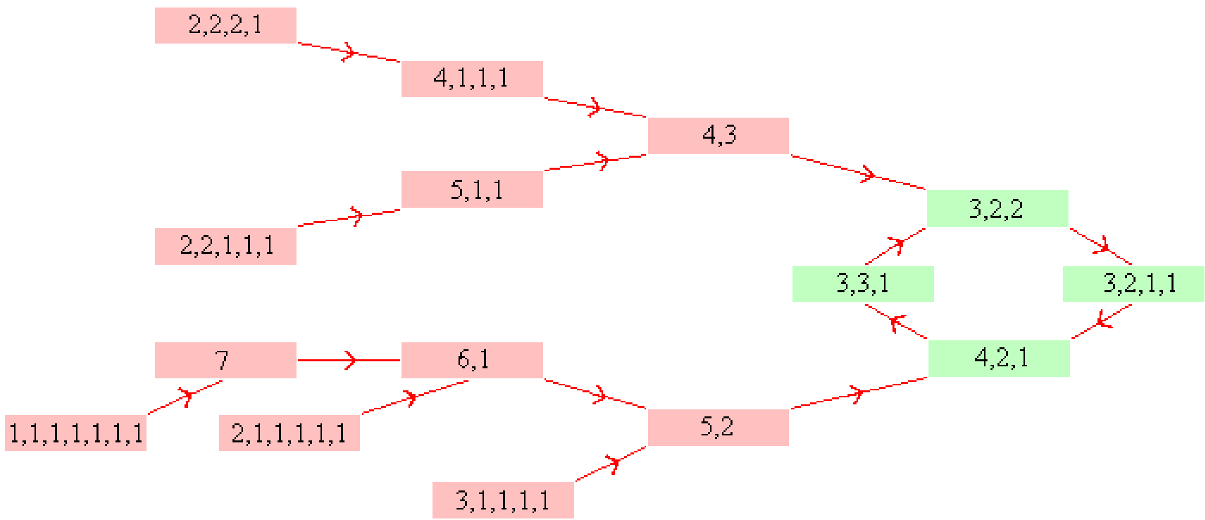
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.

Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.

Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Correction

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



Question 1

En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).

Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.

Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition $\boxed{(4,2,1)}$.

Questions 2 et 3

On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)

(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale (3,3,1) pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

1-b : Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m,p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

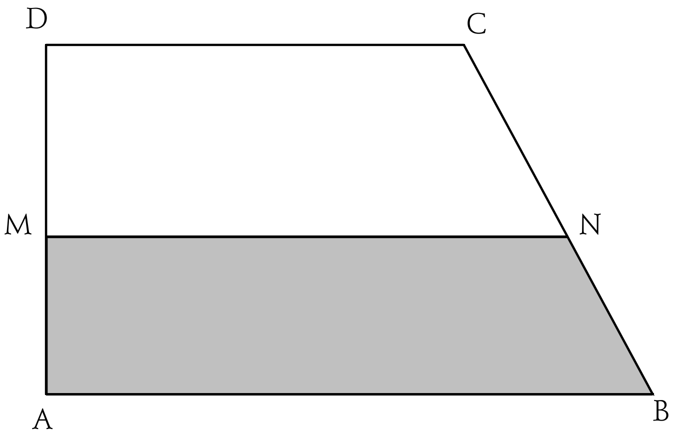
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

* $\widehat{ABC} = 45°$.
* les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD > 2.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Correction

1. De l'égalité $m^2 - p^2 = 8$, on déduit (*) : $m^2 = p^2 + 8$ donc : $p < m < p + 3$, et $m = p+1$ ou $m = p+2$.

Avec $m = p+1$, (*) est impossible. Avec $m = p+2$, il vient $p = 1$ et $m = 3$.

2. Une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que : DC= AB−AD ; MN=AB−2

L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2 = 8$.

On obtient avec 1. : AB=7, AD=6, DC=1.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

2. Amiens

http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/

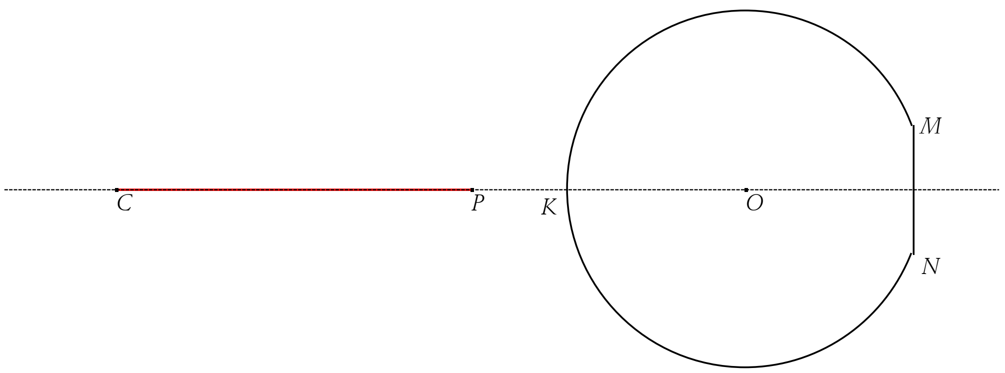
2-a : Le phare (toutes séries)

En sortant de son phare le gardien a laissé la porte ouverte, mais il a laissé son chien C (féroce, voir sa photo plus bas) attaché à un piquet P situé à 2m du pied K du phare avec une chaîne PC de 10 m, à l'opposé de la porte dont l'ouverture MN mesure 1 m de large.

Je connais bien le gardien mais malheureusement le chien ne me connaît pas.

Vais je pouvoir entrer pour attendre mon ami ?

Le rayon de la base circulaire du phare est 3 m.



2-b : Exercice 4 (Série S)

On dispose d'un ensemble de 5 entiers. Si on les ajoute deux à deux, on obtient les dix sommes suivantes :

2001, 2006, 2007, 2008, 2009, 2014, 2017, 2018, 2023, 2025.

Quels sont ces 5 nombres ?

2-c : Exercice 4 (Série ES)

Soient quatre réels a, b, c, d tels que $a < b < c < d$.

On pose $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$.

Comparer les nombres x , y et z .

2-d : Exercice 4 (Séries STI- STL)

On considère un parallélogramme ABCD et les bissectrices des angles au sommet : $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$.

Déterminer la nature du quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection de ces bissectrices deux à deux.

Correction :
http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/new/Olympiade/Olympiades2007/corrigee_exercices_academiques_2007.pdf

3. Besançon

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

3-a : Le jardin

Mon jardin est un rectangle ABCD. J'y ai planté un arbre avec un tronc très fin.

Mon arbre est situé exactement à 4 mètres de A, à 5,1 mètres de B et à 7,5 mètres de C.

A quelle distance de D se trouve-t-il ?

3-b : Les dés

On appelle **dé-numérique** un dé à six faces, sur lesquelles sont écrits six chiffres **différents** pris parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ou 9), 7, 8.

On dit que deux dés-numériques sont **semblables** s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

* Les six chiffres écrits sur le premier dé sont les mêmes que les six chiffres écrits sur le second.

* Lorsqu'on pose les deux dés sur une face ayant le même chiffre, on lit sur la face opposée deux chiffres identiques, et ceci quelle que soit la face sur laquelle on pose les dés.

Enfin, on dit que deux dés-numériques sont **distincts** s'ils ne sont pas semblables.

1. Combien existe-t-il de dés-numériques distincts dont les faces sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

2. Montrer que l'on peut construire deux dés-numériques qui, placés l'un contre l'autre, permettent d'obtenir toutes les dates d'un mois quelconque de l'année :

01, 02, 03, …, 29, 30, 31.

On énumérera les chiffres portés par les faces de chacun des deux dés.

3. Combien existe-t-il de paires de dés-numériques possédant la propriété de la question précédente ? (On considère que deux paires sont identiques lorsque les deux dés de la première paire sont semblables aux deux dés de la deuxième paire.)

4. Déterminer le plus grand entier N tel que l'on peut obtenir tout entier inférieur ou égal à N, à l'aide de deux dés-numériques.

Correction : http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

4. Bordeaux

http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/xjeux_mjc.htm

4-a : Le plus grand produit

N est un entier naturel non nul. Il se décompose de plusieurs façons comme somme d'entiers naturels. Pour chacune de ces décompositions, on effectue le produit des entiers non nuls et on note $P(N)$ le plus grand produit réalisé parmi toutes les décompositions de N.

Par exemple, pour $N = 4$:

Décomposition	Produit
1 + 1 + 1 + 1	1
1 + 1 + 2	2
2 + 2	4
1 + 3	3

0 + 4	4

Ainsi $P(4) = 4$.

1. Montrer que quel que soit l'entier N, on a $P(N+1) > P(N)$.

2. Déterminer $P(16)$, $P(17)$, $P(18)$ en expliquant la démarche.

3. À partir de quelle valeur de N, l'entier $P(N)$ dépasse-t-il 2007 ?

4-b : Dans un triangle

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. M est un point du segment $[BC]$, P et Q désignent les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AC) et (AB).

1. Montrer que si le point M est sur le diamètre issu de A du cercle circonscrit au triangle ABC, alors la droite (PQ) est parallèle à (BC).

2. a. Montrer que les points A, Q, M et P sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que $PQ = AM \times \sin \widehat{BAC}$.

c. En déduire toutes les positions du point M pour lesquelles la somme des diagonales du quadrilatère $AQMP$ est minimale.

3. Déterminer toutes les positions du point M pour lesquelles l'aire du quadrilatère $AQMP$ est maximale.

Correction : http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/olymp2007/olymp2007_cor.pdf

5. Caen

http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/maths/

5-a : Le rugby

Pour les candidats de la série S

Questions préliminaires

Sur une droite (D), on place dans cet ordre trois points A, B et H distincts deux à deux et (Δ) une droite perpendiculaire à (D) en H. On trace un cercle (C) de rayon R qui vérifie les deux conditions :

- il passe par A et B
- il coupe la droite (Δ) en deux points M et N.

1. Comparer les angles $\widehat{\text{AMB}}$ et $\widehat{\text{ANB}}$. (Justifier)

2. Si le rayon R augmente, dire (sans justification) comment évolue la mesure de l'angle $\widehat{\text{AMB}}$?

3. Si le rayon R diminue, que se passe-t-il pour l'angle $\widehat{\text{AMB}}$ et pour les points M et N ?

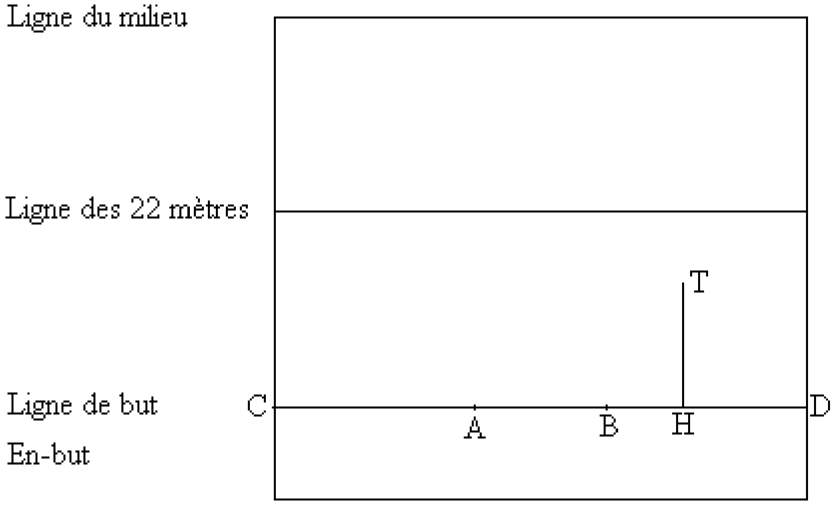
On admettra la relation suivante : soit une droite (Δ) tangente au point T à un cercle (C), A et B deux points de (C) et H le point d'intersection entre la droite (Δ) et la droite (AB), on a la relation : $HA \times HB = HT^2$.

Problème.

Pour transformer un essai au rugby, le botteur doit se placer en face de l'endroit où l'essai a été marqué (en H sur la figure ci-dessous) et faire passer la balle entre les deux poteaux A et B.

Pour simplifier on négligera la hauteur de la barre horizontale.

Plan partiel d'un terrain de rugby



On a : AB (largeur des poteaux) = 5,6m et CD (largeur du terrain) = 70m.

Le problème n'a un sens que dans le cas où H est entre B et D.

On note : BH = x et HT = y.

1. Montrer que se placer en T, point défini dans les préliminaires, est la meilleure position, c'est-à-dire celle où l'angle sous lequel le botteur voit les deux poteaux est le plus grand ?

2. Exprimer la distance y en fonction de x pour que l'angle sous lequel le botteur voit les deux poteaux soit le plus grand.

3. Dans cette question le point H est en D. Le botteur se place pour voir les poteaux sous l'angle le plus grand. Quelle est alors la longueur minimum du tir ?

4. Sur l'intervalle [0 ; 29], tracer la représentation de la fonction f définie par $f(x) = x$ et de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x(x+5,6)}$.

5. Lorsqu'un botteur, qui cherche à ouvrir au maximum son angle de tir, se place sur « la ligne des 22 mètres », que peut-on conjecturer sur l'endroit où a été marqué l'essai ?

6. Lors des matches, pour transformer un essai qui n'a pas été marqué à une distance trop proche du poteau B, le botteur se recule d'une distance égale à la longueur BH augmentée de 2 ou 3 pas. Justifier cette pratique.

5-b : Des carrés parfaits

Pour les candidats de la série S

1, 4, 9, 16, 25….. sont des carrés parfaits.

2, 3, 5, 6, 7…….. ne sont pas des carrés parfaits.

Le but de l'exercice est de déterminer des entiers naturels non nuls a et n (avec $a < n$) de telle sorte que les trois entiers naturels distincts $n - a$, n et $n + a$ soient des carrés parfaits.

Le triplet $(n - a, n, n + a)$ est appelé une solution du problème.

1. Peut-on trouver une solution pour $n = 9$? Pour $n = 16$? Pour $n = 25$?

2. Soit k, p, q, r des entiers strictement positifs.

Prouver que si $\left(p^2, q^2, r^2\right)$ est une solution du problème alors $\left((kp)^2, (kq)^2, (kr)^2\right)$ en est une autre.

3. En déduire trois solutions du problème.

4. Trouver une solution du problème telle que $n + a = 529$.

5. On cherche toutes les solutions de la forme $\left(1, q^2, r^2\right)$.

A l'aide d'une calculatrice, trouver toutes les solutions telles que $q \leq 250$.

5-c : Des triangles équilatéraux

Pour les candidats de toutes les séries sauf S

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral tel que $A_0B_0 = 1$ (exprimé en unité de longueur).

On définit les points A_1, B_1 et C_1 les milieux respectifs des côtés $[A_0B_0]$, $[B_0C_0]$ et $[C_0A_0]$, puis les points A_2, B_2 et C_2 les milieux respectifs des côtés $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$ et $[C_1A_1]$, et ainsi de suite, on définit les points A_n, B_n et C_n.

1. Montrer que C_2 puis A_2 appartiennent à la droite (A_0B_1).

2. Soit a_n l'aire du triangle $A_nB_nC_n$. Existe-t-il un entier naturel n tel que $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{16384}$?

3. Montrer que tous les triangles $A_nB_nC_n$ ont le même centre de gravité G.

4. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que le triangle $A_{n0}B_{n0}C_{n0}$ soit à l'intérieur du cercle de centre G et de rayon 10^{-3}.

Corrigés : http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/maths/olympiad/olympiad07/sujets07.htm

6. Clermont Ferrand

http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/sampleolymp1.php

6-a : Qui joue gagne !

1. Le système de numération que nous utilisons usuellement est le système décimal ou système à *base dix*.

On utilise pour écrire les nombres 10 chiffres qui sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9.

Dans cette base, l'écriture 2007 signifie que ce nombre est égal à : $2\times10^3+0\times10^2+0\times10^1+7$.

Mais on peut choisir d'autres bases, par exemple la *base six*. On utilise alors pour écrire les nombres seulement les chiffres de 0 à 5.

Par exemple, le nombre qui s'écrit 13143 en *base six* s'écrit $1\times6^4+3\times6^2+1\times6^2+4\times6^1+3=2007$ en base dix. On admet qu'un nombre écrit en base dix admet une écriture unique en base six.

Ecrire en base six le nombre qui s'écrit 3779 en base dix.

2. Olympe Hyade joue dans un casino. Elle vient de mettre au point une méthode, qui consiste à jouer 6 fois de suite 1 euro le premier jour, 6 fois de suite 6 euros le deuxième jour, 6 fois de suite 36 euros le troisième jour, 6 fois de suite 216 euros le quatrième jour et 6 fois de suite 1296 euros le cinquième jour. Si elle gagne à un jeu, on lui rend sa mise plus deux fois sa mise, et si elle perd, elle perd sa mise.

Aucune journée ne l'a vu ni perdre tous les jeux, ni gagner tous les jeux.

a. Quel est le gain maximal qu'Olympe Hyade peut espérer à l'issue de ces cinq jours ?

b. Quelle est la perte maximale qu'elle peut subir ?

c. Après cinq jours, elle a gagné 2007 euros. Combien de fois a-t-elle gagné pendant ces 5 jours ?

d. Pouvait-t-elle gagner 10 000 euros ?

6-b : Dans mon livre de maths…

A traiter par les candidats de la série S

Les pages de mon livre de maths sont numérotées de un en un : page 1, page 2, page 3 …etc.

J'ai additionné tous les numéros de page et j'ai obtenu une somme égale à 2007. Mais j'ai compté deux fois un numéro de page. Lequel ?

6-c : Dans mon livre de maths…

A traiter par les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG, SMS.

Ma grand-mère m'a dit qu'à mon âge, elle avait un livre de maths comportant 300 pages et qu'elle en avait compris 95%.

En fouillant dans le grenier, j'ai retrouvé ce livre : des pages avaient été rongées par des souris, mais heureusement, la partie non comprise par ma grand-mère était intacte.

J'ai lu 90% des pages conservées et il ne me reste plus que la fameuse partie non comprise par ma grand-mère. Au fait combien de pages ont été rongées par des souris ?

Correction :
http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/olympiade2007/Olympiades_academiques_de_mathematiques_2007-correction.htm

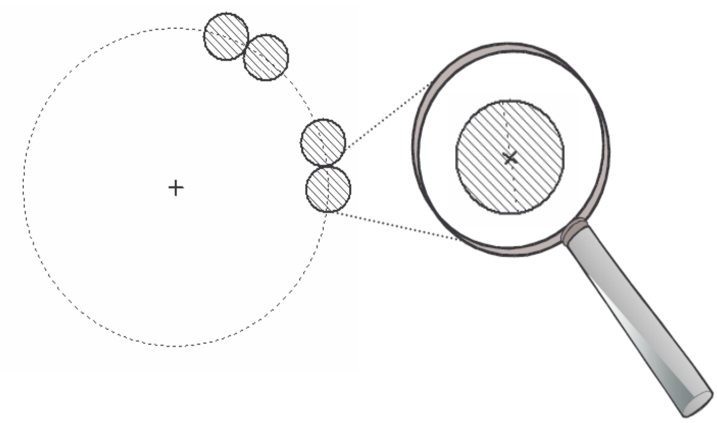
7. Créteil

http://www.ac-creteil.fr/maths/olymp/olymp.html

7-a : Le collier de perles

Un collier est composé de n perles de rayon r.

Hypothèse : il y a suffisamment de perles pour que l'on puisse schématiser le collier comme la figure ci-dessous et donc considérer que la longueur de fil du collier (représenté en pointillés) nécessaire pour chaque perle est égale à $2r$.



Calculer alors le rayon R du collier en fonction de n et r.

Que pensez-vous de la validité de l'hypothèse choisie ci-dessus quand $n = 10$, quand $n = 20$?

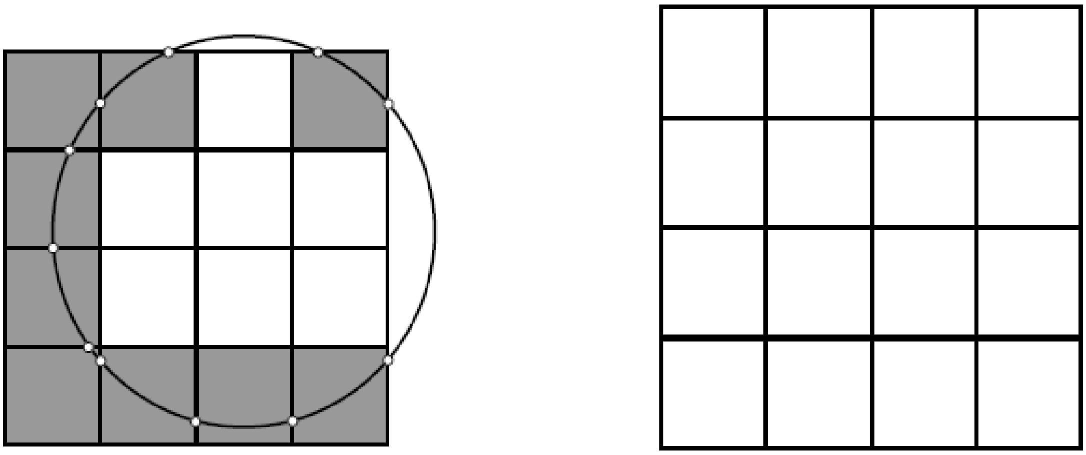
7-b : Cercle sur quadrillage

(cette feuille est à rendre avec la copie)

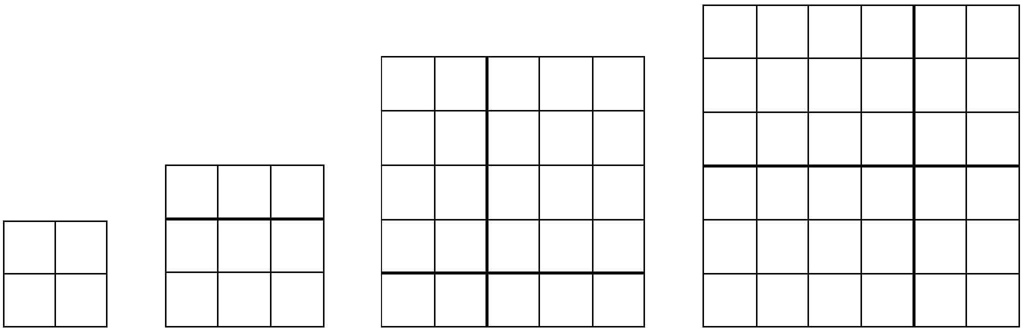
Dans un plan on dispose de damiers carrés de n cases de côté ($n \geq 2$), toutes les cases étant des carrés dont le côté est pris comme unité de longueur.

Sur chaque damier, l'objectif est de tracer un cercle qui traverse le plus grand nombre possible de cases. On considère qu'un cercle traverse une case s'il passe à l'intérieur de celle-ci.

1. Sur le damier 4×4 représenté ci-dessous, on a tracé un cercle qui traverse neuf cases. Peut-on en tracer un qui traverse davantage de cases ? Si oui, dessiner un tel cercle sur le damier de droite. Quel peut-être le nombre maximal de cases traversées ? Justifier la réponse.



2. Sur chacun des damiers représentés ci-dessous, tracer un cercle traversant un nombre maximal de cases. Indiquer pour chaque damier le nombre de cases traversées.



3. Formuler une conjecture sur le nombre maximal de cases traversées par un cercle sur un damier $n \times n$ où $n \geq 2$.

Démontrer cette conjecture.

8. Corse

http://nuticiel.ac-corse.fr/math/index.php3?action=page&id_art=3470

8-a : Pentagone

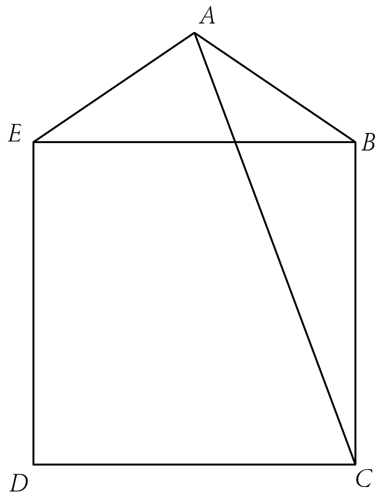


figure 1

1. $ABCDE$ est un polygone convexe à 5 côtés tel que $BCDE$ soit un carré et les triangles ABC et ABE aient la même aire égale au quart de celle de $BCDE$ (figure 1).

Déterminer l'angle $\widehat{BAE}$.

On dira que le segment $[DC]$ est « la base » du polygone et que les segments $[AE]$ et $[AB]$ forment le « toit » du polygone.

2. On construit à l'extérieur de $ABCDE$ deux polygones de même forme que $ABCDE$ dont les bases sont les segments de son toit. On poursuit cette construction de façon à ce que, sur chaque toit, viennent les bases de deux polygones de même forme, comme le montre la figure 2 (qui n'est pas complète).

Sachant que le segment $[DC]$ mesure 3 cm, est-il possible que l'aire de la surface recouverte par tous les polygones construits dépasse 2007 cm^2 ¿

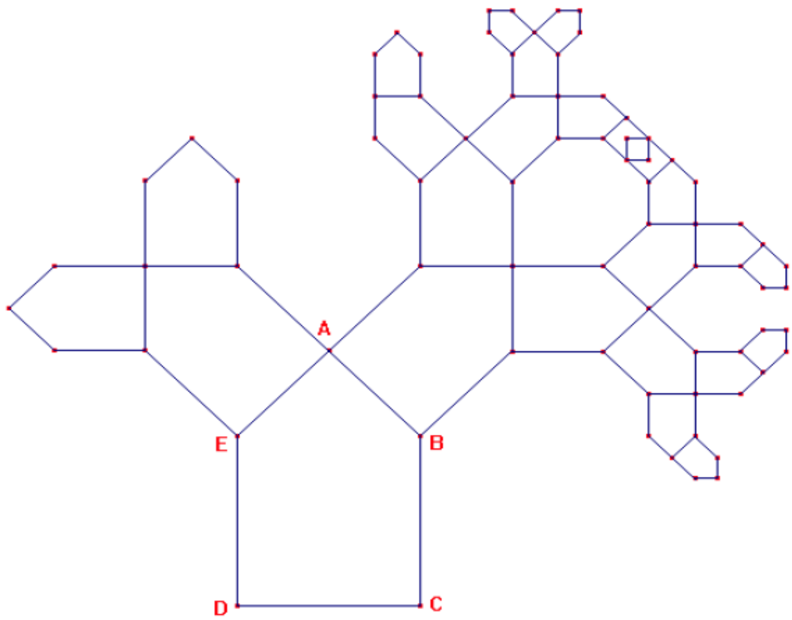


figure 2

8-b : Le film

Un caméraman décide de filmer une scène d'un film qui se passe au pied d'une tour génoise.

1. Dans cette question, il est envisagé le cas d'une tour modélisée par un cylindre dont la base est un cercle de rayon R « posé » sur un plan. La caméra est considérée comme un point dans ce plan. Le caméraman place sur sa caméra un objectif dont l'angle de prise de vue horizontalement est de 90 degrés. Déterminer la partie du plan autour de la tour dans laquelle la caméra ne doit pas rentrer pour que la base de la tour reste toute entière dans le champ de la caméra.

2. Dans cette question, il est envisagé le cas d'une tour dont la base est un carré de côté a. Le caméraman place encore sur sa caméra un objectif dont l'angle de prise de vue horizontalement est de 90 degrés.

a. Déterminer la partie du plan dans laquelle la caméra ne doit pas rentrer pour que la base de la tour reste toute entière dans le champ de la caméra.

b. A l'extérieur de cette zone, le caméraman envisage de placer sa caméra sur un cercle de rayon r et de même centre O que la base de la tour, et sur un des axes de symétrie de cette base. Il doit changer d'objectif. Déterminer suivant les valeurs de r et a, les positions où il voit la base de la tour sous le plus grand angle.

9. Dijon

http://mathematiques.ac-dijon.fr/

(corrigés sur le site)

9-a : Une pesée frauduleuse

Vers l'an 250 de notre ère, vivait à Alexandrie le mathématicien Diophante.

Celui-ci avait remarqué que certains marchands d'orge truquaient leur balance à plateaux en raccourcissant l'un des fléaux : ils trompaient les clients sur la quantité en plaçant les masses du côté du fléau le plus court. (En effet, à l'équilibre, le produit de la masse par la longueur du fléau, exprimés dans la même unité, est le même de chaque côté.)

Pour punir les marchands malhonnêtes, Diophante leur proposait de mettre alternativement les masses dans un plateau, puis dans l'autre : un client serait lésé, le suivant avantagé… et les fraudeurs étaient heureux de s'en tirer à si bon compte.

1. Un marchand ayant raccourci un fléau de 10 % avait réalisé dans la journée 180 pesées d'un kilogramme, en suivant la règle de Diophante. Quelle quantité d'orge avait-il perdue ?

2. Même question pour un marchand ayant raccourci un fléau de 20 %, après avoir réalisé 160 pesées d'un kilogramme.

3. Montrer qu'avec la règle de pesée de Diophante, tout fléau raccourci cause un préjudice à son auteur, après un nombre pair de pesées.

9-b : Une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 1] par : $\begin{cases} f(x) = 2x \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x \text{ si } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$.

1. Représenter graphiquement la fonction f et montrer que si $0 \le x \le 1$, alors $0 \le f(x) \le 1$.

2. Un nombre $x_0 \in [0, 1]$ étant choisi, on fabrique une suite de nombres en posant :

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2).$$

3. Où l'on étudie quelques cas particuliers.

a. On pose $x_0 = \dfrac{1}{48}$. Montrer que la suite obtenue est constante à partir de x_5.

b. On pose $x_0 = \dfrac{2}{11}$. Ecrire les 5 premiers termes de la suite obtenue et en déduire la valeur de x_{2007}.

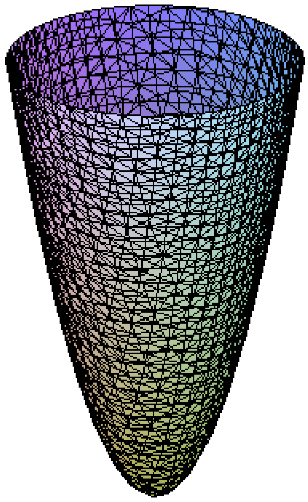
c. Peut-on trouver une valeur de x_0 telle que la suite de nombres se répète tous les 7 termes ? Tous les p termes (p étant un entier non nul quelconque) ?

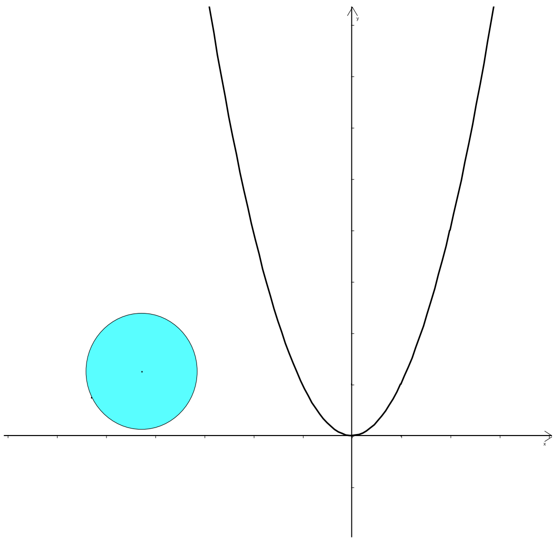
4. Montrer que si x_0 est un nombre rationnel, la suite de nombres est périodique (c'est-à-dire qu'elle se répète à partir d'un certain rang).

10. Grenoble

10-a : Chute des corps

Une urne a la forme d'un paraboloïde de révolution de hauteur 9 cm. La section de ce paraboloïde par un plan passant par son axe est la parabole dont une équation dans un repère orthonormal bien choisi est $y = x^2$.





1. On fait tomber dans l'urne une bille sphérique B de rayon 0,1 cm. La bille va-t-elle toucher le fond de l'urne ?

2. On fait tomber dans l'urne une seconde bille sphérique B' de rayon 1 cm. La bille B' va-t-elle toucher la bille B ?

10-b : Cubes en bois

On dispose de cubes en bois blanc tous identiques et on désire les peindre de façon à obtenir des cubes différents, chaque face d'un cube étant unicolore.

1. On dispose de deux tubes de peinture, l'un de couleur rouge, l'autre de couleur noire. Combien de cubes bicolores peut on obtenir ?

2. On dispose de six tubes de peinture de couleurs différentes et on utilise exactement les six couleurs (c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux faces colorées avec la même couleur) pour peindre chaque tube. Combien de cubes différents peut-on obtenir ?

http://www.ac-grenoble.fr/maths/

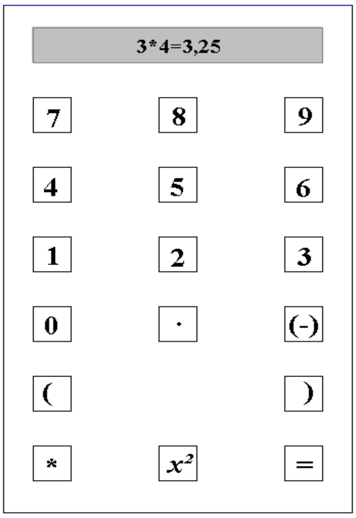
11. Lille

http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/premS.html

11-a : Ma calculatrice bizarre

Ma calculatrice ne dispose que de trois fonctions :

- le passage à l'opposé : touche $(-)$,
- l'élévation au carré : touche x^2,
- l'opération * définie par $y * x = y + \dfrac{1}{x}$ pour y réel quelconque et x réel non nul : touche *.



On dispose également de parenthèses, du symbole d'exécution =, des chiffres de 0 à 9 et de la virgule (.).

Comment peut-on déterminer :

* l'inverse d'un réel non nul ?
* la somme de deux nombres non nuls ?
* la moitié d'un nombre réel non nul ?
* le produit de deux nombres réels non nuls ?

Correction

Pour y et x non nul, on définit l'opération * par $y * x = y + \frac{1}{x}$.

Formulaire : (x est toujours un nombre réel non nul)

Inverse : $\frac{1}{x} = 0 * x$

Somme : $y + x = y * \frac{1}{x} = y * (0 * x)$

Double : $2x = x * (0 * x)$ et $\frac{2}{x} = \frac{1}{x} * (0 * \frac{1}{x}) = (0 * x) * [0 * (0 * x)]$

Moitié : $\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{2}{x}} = 0 * \frac{2}{x} = 0 * \{(0 * x) * [0 * (0 * x)]\}$

Différence : $y - x = y + (-x) = y * [0 * (-x)]$.

Soit a et b deux nombres réels non nuls, on se propose de déterminer le produit ab uniquement à l'aide de l'opération *.

– N.B. Si l'un des deux nombres est nul, le produit est connu !

On dispose de l'égalité : $ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$.

$A = (a+b)^2 = [a * (0 * b)]^2$; $B = a^2 + b^2 = a^2 * (0 * b^2)$, $A - B = A * [0 * (-B)]$ et

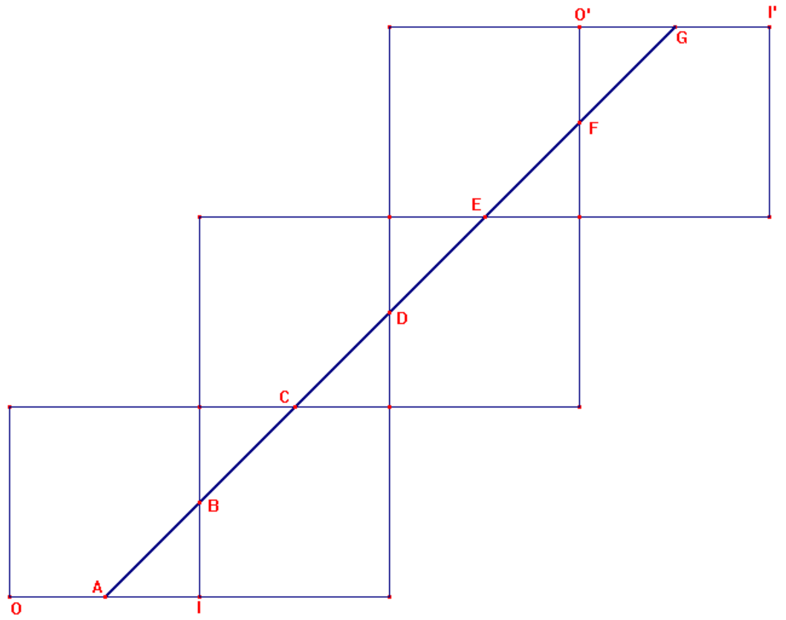
$$ab = \frac{A-B}{2} = 0 * \{[0 * (A-B)] * \{0 * [0 * (A-B)]\}\}.$$

Il suffit de remplacer $A - B$ par son expression en fonction de a et b à l'aide de l'opération *

11-b : Jouez au cube !

La figure ci-dessous est le patron d'un cube. On a tracé le segment [AG] où A et G sont les milieux respectifs de [OI] et [O'I'].

Les points A, B, C, D, E, F et G sont donc alignés sur ce patron. Sont-ils coplanaires dans l'espace ? Justifier.

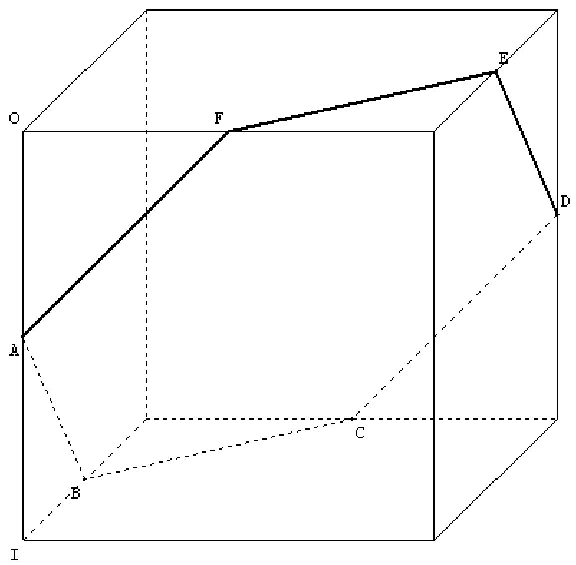


Correction

Démontrons tout d'abord que B, C, D, E, F sont les milieux respectifs des segments [IL], [LS'], [S'K'], [K'Y] et [YO']. On munit le plan du repère $(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,,\,\overrightarrow{OS}\,)$.

Une équation cartésienne de la droite (AG) est $y = x - \dfrac{1}{2}$. $x_B = 1$ donc $y_B = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, d'où B est le milieu du segment [IL].

$y_C = 1$ donc $x_C = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, d'où C est le milieu du segment [LS']. De même pour les autres points. Puis :



Les droites (AD) et (EF) sont strictement parallèles. Donc elles déterminent un plan. Ce plan contient le centre Ω du cube. Les symétriques des points E et F par rapport à Ω sont les points B et C. Les points A, B, C, D, E, F et G (G =A) sont donc coplanaires.

12. Marseille

http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/olymp-an.htm

12-a : Les classes de première

A traiter par les candidats de la série S

Dans un lycée, les classes de première sont numérotées ainsi : 1ère 1, 1ère 2 …et ainsi de suite.

Pour n'importe quelle classe, sauf pour la dernière, si on ajoute deux fois le nombre d'élèves de cette classe au nombre d'élèves de la classe suivante, on trouve 64. (Propriété *P*).

Le nombre de classes de première de ce lycée est le plus grand vérifiant la propriété *P*.

Quel est le nombre de classes de première de ce lycée ?

Combien y a-t-il alors d'élèves en 1ère 1 ?

12-b : Oasis Oasis !

A traiter par les candidats de la série S

Deux Touaregs partis d'un village A avancent avec leurs chameaux sur une route longue de 100 kilomètres menant à un village B.

Au kilomètre 60, un des Touaregs fait remarquer que les distances, en kilomètres, entre le village A et chacune des trois oasis qu'ils ont rencontrées, sont des nombres entiers et qu'en les multipliant on obtient un multiple de 1309.

Quelques minutes après, le deuxième Touareg fait remarquer que le produit des distances entre les trois oasis et le village B est aussi un multiple de 1309.

Quelles sont les distances entre le village A et chacune des oasis ?

12-c : Le coffre fort

A traiter par les candidats des séries autres que S

On veut ouvrir un coffre fort dont le code est un nombre à trois chiffres.

Voici les tentatives de quelqu'un qui ne connaît pas le code :

4 0 8 : aucun chiffre n'est correct (ni bien, ni mal placé),

3 6 9 : un seul chiffre est correct et ce chiffre est bien placé,

9 8 0 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé,

6 3 7 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé,

2 3 5 : un seul chiffre est correct, mais ce chiffre est mal placé.

Répondre par Vrai ou Faux aux quatre affirmations suivantes et justifier les réponses en détaillant avec précision les étapes du raisonnement.

1. Le chiffre des unités du code est 9.
2. Seulement trois codes restent possibles à l'issue de ces tentatives.
3. Le code n'est pas un multiple de 3.
4. Le code est déterminé si l'on sait qu'il s'agit du carré d'un entier.

12-d : Triangles numériques

A traiter par les candidats des séries autres que S

On considère le triangle de nombres ainsi formé :

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

11 12 13 14 15

16 … … … … …

Les entiers naturels non nuls y sont successivement écrits, le premier en première ligne, les deux suivants en deuxième ligne, les trois suivants en troisième ligne … et ainsi de suite.

Ainsi, par exemple, le nombre 8 se situe à la 4ème ligne, au 2ème rang.

1. À quelle ligne le nombre 53 se situe-t-il et quel est le rang de ce nombre sur cette ligne ?
2. À quelle ligne le nombre 2007 se situe-t-il et quel est le rang de ce nombre sur cette ligne ?
3. On se donne un entier naturel k non nul.

On considère le nombre situé à la $k^{\text{ième}}$ ligne, au $k^{\text{ième}}$ rang, ainsi que le nombre situé à la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne, au $(k+1)^{\text{ième}}$ rang.

Démontrer que la somme de ces deux nombres est le carré d'un entier naturel.

Corrections : http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/olymp-an.htm

13. Montpellier

http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/pedago/jeumath/olymp.htm

13-a : Où est le cochonnet ?

Trois boules sphériques identiques reposent sur un sol plan, elles se touchent deux à deux et touchent également le cochonnet, petite boule qui repose également sur le sol.

Les boules ont un diamètre de 78 millimètres, quel est le diamètre du cochonnet ?

Correction

Il faut dans un premier temps travailler en projetant orthogonalement sur le plan du sol ; les centres des trois boules se projettent suivant les sommets d'un triangle équilatéral de côté 78 mm, le centre du cochonnet se projette au centre de gravité de ce triangle, la distance entre le projeté du centre du cochonnet et de celui d'une boule est donnée par $d=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 78$.

Dans un plan vertical contenant le centre d'une boule et celui du cochonnet on applique le théorème de Pythagore dans la figure formée par deux cercles tangents de rayons R et r qui ont une tangente commune où d représente la distance entre les points de tangence : $(R+r)^2=(R-r)^2+d^2$, ce qui nous donne après calcul $r=\frac{d}{2}$, soit dans notre problème 39 mm.

13-b : Prenons de la hauteur

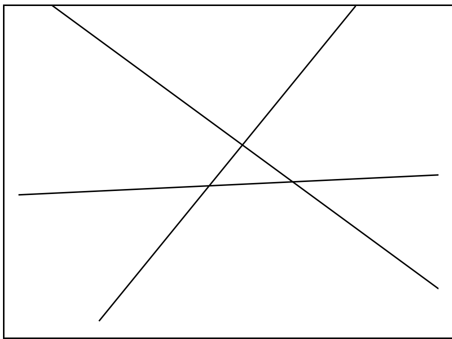
Etant données trois droites dans le plan, on cherche s'il existe des triangles dont ces droites sont les hauteurs.

Dans chacun des cas présentés ci-dessous :

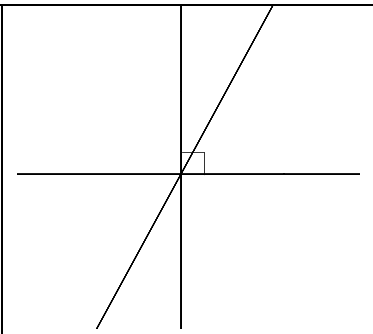
Existe-t-il un triangle solution?

Si oui, donner une procédure de construction d'un triangle solution et justifier.

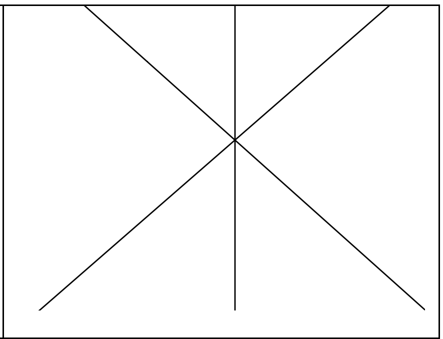
Peut on trouver plusieurs solutions ?



Cas1



Cas 2



Cas 3

<u>Correction</u>

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Pas de solution pour le cas 1.

Dans le deuxième cas, appelons d et d' les deux droites perpendiculaires, d'' la troisième droite, et O le point d'intersection des trois droites. Prenons un point A sur d et non sur d', un des côtés est perpendiculaire à la droite d'', ce qui détermine de façon unique le deuxième sommet B sur la droite d', le triangle ABO est une solution.

Dans le troisième cas on procède comme au second, on prend un point arbitraire A différent de O sur une des trois droites d par exemple, on mène la perpendiculaire à d' qui coupe d'' en B, la perpendiculaire à d passant par B coupe d'' en C le triangle ABC est une solution du problème, parce que la droite d'' qui passe par B et par deux hauteurs du triangle ABC, est nécessairement la troisième hauteur.

Dans les deux derniers cas, il existe une infinité de solutions qui se déduisent l'une de l'autre par une homothétie de centre O.

14. Nancy-Metz

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/olympiad.htm

14-a : L'aquarium

Un aquarium posé sur une table a la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 30 cm.

On le remplit d'eau à ras bord, puis on le fait pivoter autour d'une des arêtes de la base, jusqu'à ce que le fond fasse un angle de 45° avec le plan de la table. Un tiers de son contenu se répand alors sur la table.

On le remplit à nouveau à ras bord, puis on le fait pivoter autour d'une autre arête de la base, jusqu'à ce que le fond fasse à nouveau un angle de 45° avec le plan de la table. Les quatre cinquièmes de son contenu se répandent alors sur la table.

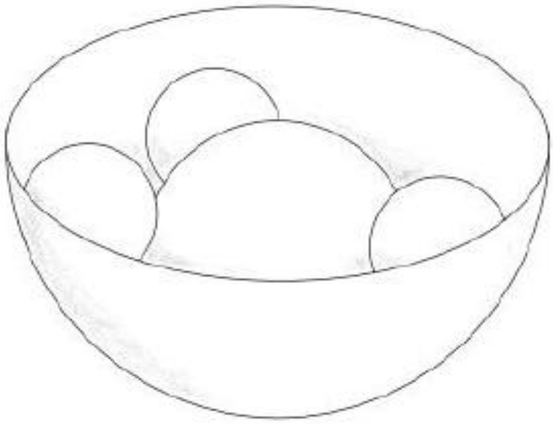
Quel est le volume de l'aquarium ?

14-b : Bol et Billes

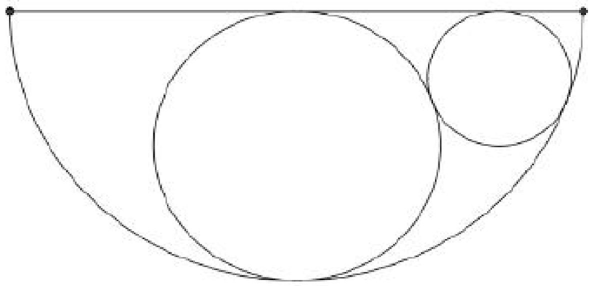
Uniquement pour les candidats de la série S

Jean place une grosse bille de rayon R dans un bol hémisphérique de rayon $2R$. Il pose ensuite des petites billes de même rayon autour de la grosse bille de sorte que ces billes touchent à la fois le bol, la grosse bille et affleurent la surface circulaire du bol. On a représenté ci-dessous le bol avec la grosse bille et trois petites billes.

a. Exprimer en fonction de R le rayon des petites billes.



Indications : On pourra exploiter la figure ci-dessous qui représente une section du bol par un plan vertical contenant le centre de la grosse bille et le centre d'une des petites billes. On rappelle la propriété : si deux sphères (respectivement deux cercles) sont tangentes, alors les centres des sphères (respectivement des cercles) sont alignés avec le point de tangence.



b. Combien Jean peut-il placer au maximum de petites billes dans le bol ?

14-c : Charline et le chocolat

Uniquement pour les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG.

Lundi, la mère de Charline lui a donné une tablette de chocolat rectangulaire constituée de 48 carrés (6 × 8 carrés).

Charline décide d'en faire profiter ses amies et, à chaque fois qu'elle rencontre une amie, elle lui offre une rangée horizontale ou verticale de ce qui reste de la tablette de chocolat.

Sachant qu'elle garde le dernier carré, à combien d'amies, au maximum, peut-elle offrir du chocolat ?

Mardi, la mère de Charline lui a donné une autre tablette identique à celle de la veille (il ne reste plus rien de celle de la veille).

Charline décide d'en faire encore profiter ses amies, donnant à chaque fois qu'elle rencontre une amie, une rangée horizontale ou verticale de ce qui reste de la tablette mais cette fois ci, elle décide de garder à la fin du partage un morceau de quatre carrés.

Combien d'amies, au maximum, pourront profiter de sa gentillesse ?

Mercredi, la mère de Charline lui donne une tablette de chocolat rectangulaire constituée de 48 carrés, de dimension 12 × 4 carrés.

Charline décide d'en faire encore profiter ses amies avec les mêmes modalités de distribution que l'avant-veille, en ne gardant pour elle que le dernier carré.

À combien d'amies, au maximum, pourra-t-elle offrir du chocolat aujourd'hui ?

Charline a beaucoup d'amies (surtout depuis qu'elle distribue du chocolat…).

Si elle a une tablette de chocolat rectangulaire constituée de $n \times p$ carrés, en offrant à chaque amie rencontrée une rangée horizontale ou verticale de ce qui reste de la tablette de chocolat et en ne gardant que le dernier carré, à combien d'amies pourra-t-elle faire plaisir ?

Correction

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/examens_concours/Olympiades/corrige_olympiades2007_NancyMetz.pdf

15. Nice

15-a : Un problème de réservoirs

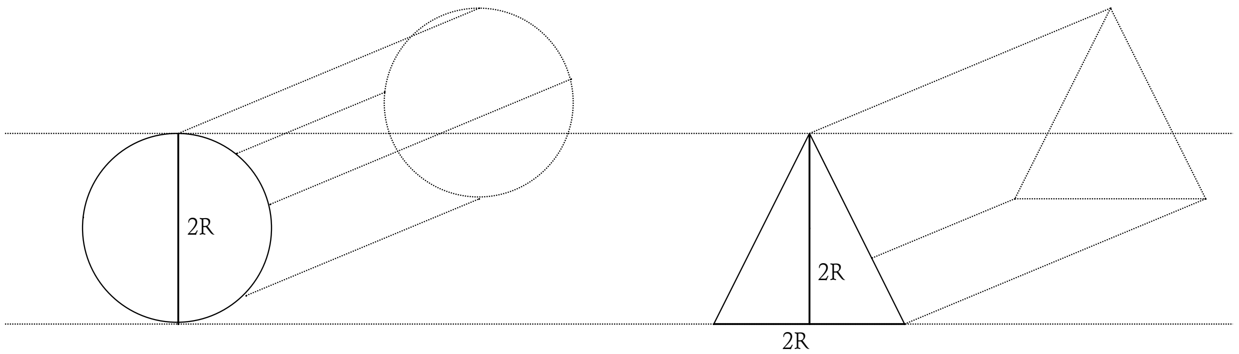
Deux réservoirs de même longueur se remplissent d'eau simultanément avec un robinet de même débit. L'un des réservoirs est cylindrique, l'autre est en forme de prisme droit (voir le dessin en perspective ci-dessous).

Le diamètre du cercle, la base du triangle et sa hauteur sont égaux à $2R$ ($R>0$). On note h la hauteur d'eau dans le cylindre.

1. Si $h = R$, quelle est la hauteur d'eau (en fonction de R) dans le prisme ? Comparez les deux niveaux.

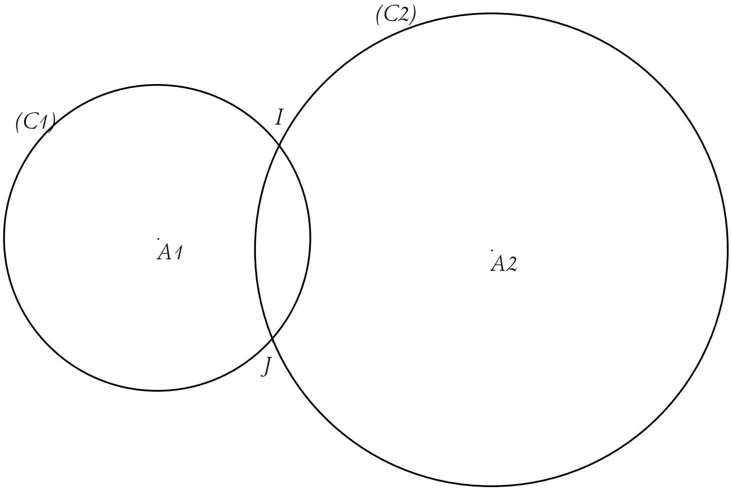
2. Si $h = \frac{R}{2}$, quelle est la hauteur d'eau (en fonction de R) dans le prisme ? Comparez les deux niveaux.

3. A un instant donné, on a le même niveau h dans les deux réservoirs. Donner un encadrement de h à 0,01 près.



15-b : Les lapins

Soit (C_1) et (C_2) deux cercles sécants de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 > R_2$) et de centres respectifs A_1 et A_2. On appelle I et J leurs points d'intersection (voir le dessin ci-dessous).



Deux lapins L_1 et L_2 parcourent respectivement (C_1) et (C_2) dans le même sens (prendre le sens de rotation des aiguilles d'une montre) avec la même vitesse angulaire. Ils partent en même temps du point I.

1. Dessiner sur l'annexe A la position des deux lapins correspondant à un angle de 45 °.

2. Dessiner sur l'annexe B la position de L_2 lorsque L_1 se trouve en J, et en utilisant une autre couleur, la position de L_1 lorsque L_2 se trouve en J.

Dans les deux situations que peut-on dire des triangles L_1JL_2 ?

3. Montrer que L_1, L_2 et J sont toujours alignés.

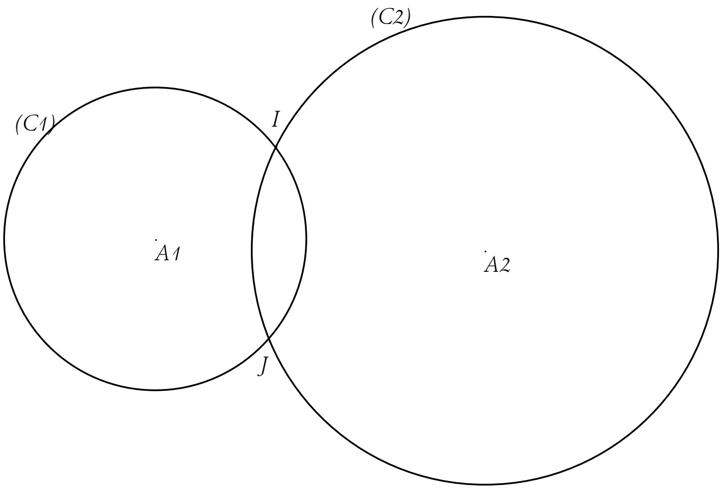
4. Existe-t-il une position de L_2 où J est le milieu de $[L_1, L_2]$?

Dans l'affirmative donner la construction permettant de déterminer les points L_1 et L_2.

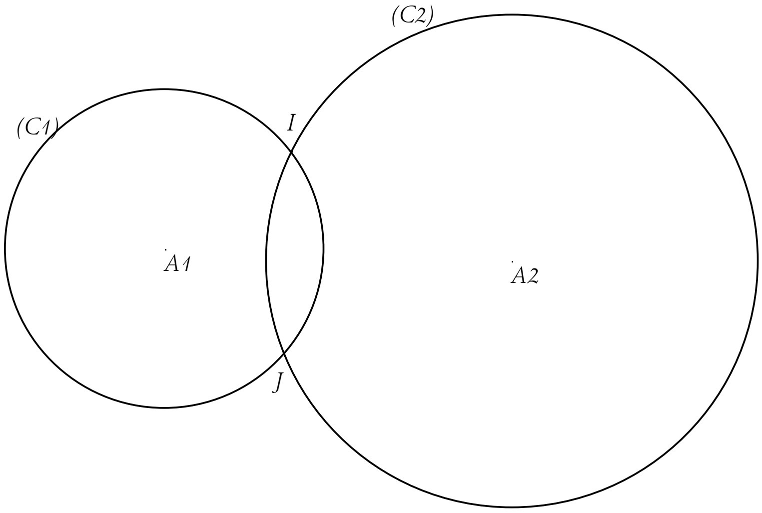
5. Montrer qu'il y a un point fixe du plan qui est, à tout instant, équidistant de L_1 et de L_2.

(On pourra considérer les points J_1 et J_2 diamétralement opposés de J sur chacun des cercles).

Annexe A



Annexe B



http://www.ac-nice.fr/maths/

16. Orléans Tours

http://www.ac-orleans-tours.fr/maths/rubrique.php3?id_rubrique=40

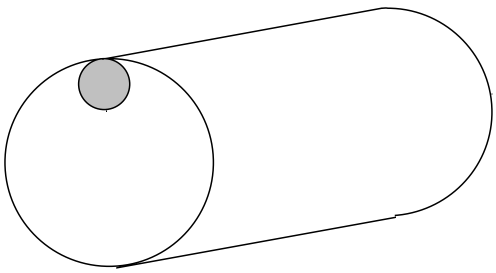
16-a : La citerne

Une citerne de forme cylindrique a un volume intérieur total de 1000 litres.

Ses bases sont deux disques de rayon R et l'une d'entre elles est pourvue d'un orifice circulaire de rayon R/4 tangent au cercle.

Cet orifice doit être fermé par un bouchon, mais celui-ci est égaré. Son propriétaire souhaite pour des raisons de commodité installer le bidon en position horizontale (cf. figure). Cependant, puisqu'il ne peut pas boucher l'orifice, il perd ainsi une partie du volume maximum de stockage.

Pourra-t-il y stocker 800 litres d'eau ?



On rappelle que la formule du volume d'un prisme ou d'un cylindre est générale pour une forme quelconque de la base : Volume du « cylindre » = Aire de la base × Hauteur = A × H.

16-b : Au quatrième top…

Pour me repérer et savoir l'heure, j'ai à ma disposition trois possibilités :

- La radio qui me donne l'heure « vraie ».

- Ma montre dont le mécanisme est très régulier et qui affiche les heures, les minutes et les secondes, et dont la vitesse de rotation des aiguilles est constante : en d'autres termes une seconde de ma montre correspond toujours à la même durée exprimée en « secondes vraies ». Je n'ai pas réglé l'heure affichée par ma montre entre le 31 mars et le 9 avril, la considérant comme à peu près correcte.

- Une vielle horloge dont les aiguilles ont un mouvement régulier par 24 heures (de 7 heures du matin jusqu'à 7 heures le lendemain au moment ou je la remonte) : en d'autres termes une seconde de mon horloge correspond toujours à la même durée exprimée en « secondes vraies » sur une période de 24 heures, mais cette durée peut être différente d'un jour à l'autre. Elle ne me donne pas l'heure exacte, mais elle ne s'en éloigne jamais trop. Je remonte chaque matin mon horloge mais je n'ai pas réglé l'heure qu'elle affiche entre le 31 mars et le 9 avril, la considérant comme à peu près correcte.

1. Le 1er avril au matin, lorsque l'horloge affiche 8 heures, ma montre indique 8 h 03 min. Lorsqu'à la radio il est annoncé 12 h, l'horloge, elle, affiche 11 h 55 min. Et ce soir là je vérifie que lorsque l'horloge affiche 18 h, ma montre indique 17 h 59 min.

a. Montrer que, pour la journée du 1er avril, lorsque l'horloge progresse d'une heure, il s'écoule 59 min 36 s sur ma montre.

b. Lorsque la radio annonce midi, quelle heure est indiquée sur ma montre ?

2. Le 7 avril alors que l'horloge affiche 9 h du matin, il est 8 h 55 min à ma montre. Dans la soirée l'horloge affiche 19 h lorsque ma montre donne 18 h 59 min. Ce soir là, en écoutant la radio je remarque qu'à 22 heures précises, l'horloge affiche 22 h 05 min.

Quelle heure affiche ma montre le 7 avril lorsque la radio annonce 22 heures ?

3. Comment saurais-je repérer qu'il est très exactement midi le 8 avril à ma montre, sans écouter la radio ?

17. Paris

*17-a : **Cercle et triangle***

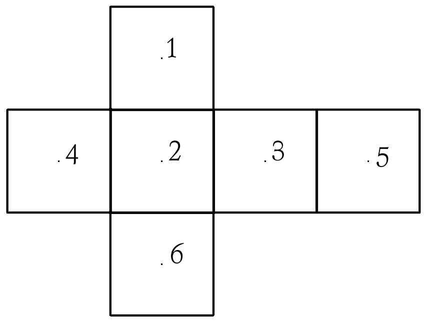
Autres séries que S

Un cercle de rayon 1 est inscrit dans un triangle équilatéral ABC. Les points D et E sont tels que BCDE soit un rectangle, le point A étant le milieu de [DE]. Quel est le diamètre du cercle passant par les points B, C, D et E ?

17-b : Des dés

Autres séries que S

On superpose n dés (n entier naturel non nul) identiques dont un patron est donné ci-contre et on calcule la somme des points marqués sur toutes les faces visibles de la pile.



On remarque qu'en posant le dernier dé de la pile,

- si la face supérieure est 1, la somme est un nombre premier,
- si la face supérieure est 2, la somme est un multiple de 2,
- si la face supérieure est 3, la somme est un multiple de 3,
- si la face supérieure est 4, la somme est un multiple de 4,
- si la face supérieure est 5, la somme est un multiple de 5,
- si la face supérieure est 6, la somme est un multiple de 6.

Quelle est la plus petite valeur de n possible ?

(on pourra se servir de la liste suivante des nombres premiers compris entre 1 et 1000 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 ;

101 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 127 ; 131 ; 137 ; 139 ; 149 ; 151 ; 157 ; 163 ; 167 ; 173 ; 179 ; 181 ; 191 ; 193 ; 197 ; 199 ;

211 ; 223 ; 227 ; 229 ; 233 ; 239 ; 241 ; 251 ; 257 ; 263 ; 269 ; 271 ; 277 ; 281 ; 283 ; 293 ;

307 ; 311 ; 313 ; 317 ; 331 ; 337 ; 347 ; 349 ; 353 ; 359 ; 367 ; 373 ; 379 ; 383 ; 389 ; 397 ;

401 ; 409 ; 419 ; 421 ; 431 ; 433 ; 439 ; 443 ; 449 ; 457 ; 461 ; 463 ; 467 ; 479 ; 487 ; 491 ; 499 ;
503 ; 509 ; 521 ; 523 ; 541 ; 547 ; 557 ; 563 ; 569 ; 571 ; 577 ; 587 ; 593 ; 599 ;
601 ; 607 ; 613 ; 617 ; 619 ; 631 ; 641 ; 643 ; 647 ; 653 ; 659 ; 661 ; 673 ; 677 ; 683 ; 691 ;
701 ; 709 ; 719 ; 727 ; 733 ; 739 ; 743 ; 751 ; 757 ; 761 ; 769 ; 773 ; 787 ; 797 ;
809 ; 811 ; 821 ; 823 ; 827 ; 829 ; 839 ; 853 ; 857 ; 859 ; 863 ; 877 ; 881 ; 883 ; 887 ;
907 ; 911 ; 919 ; 929 ; 937 ; 941 ; 947 ; 953 ; 967 ; 971 ; 977 ; 983 ; 991 ; 997).

17-c : Repunits

série S

Le but de l'exercice est de démontrer que si m est un entier naturel non nul, il existe un entier M multiple de m, tel que l'écriture de l'entier M comporte de gauche à droite une succession de 9 suivie ou non d'une succession de 0.

Le nombre M sera par exemple égal à 9 ou à 99 ou à 90 ou à 999000,…

1. Vérifier cette propriété pour les entiers compris entre 1 et 6.

2. Déterminer un entier correspondant à la question dans le cas où $m=7$ (indication : on pourra chercher l'écriture décimale du nombre $\dfrac{10^6-1}{7}$).

3. Déterminer un entier M répondant à la question dans le cas $m=84$.

4. Démontrer la propriété dans le cas d'un entier naturel non nul quelconque m.

17-d : A la règle et au compas

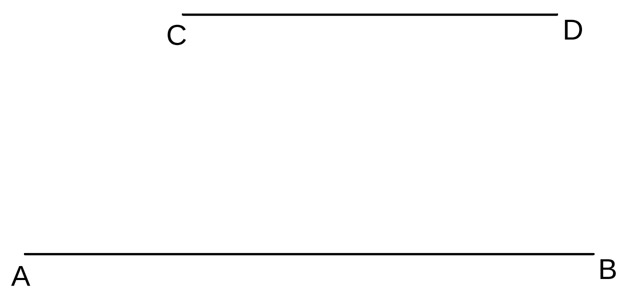
série S

1. Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que les droites (AB) et (CD) soient strictement parallèles et tels que $AB \neq CD$. Montrer que l'on peut construire le milieu O du segment $[AB]$ uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction demandée sur la figure proposée en annexe 1 qui sera rendue avec la copie.

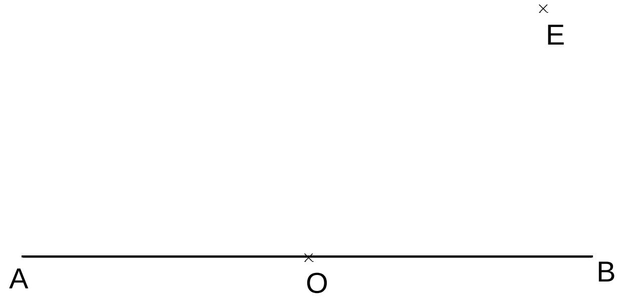
2. Soit A et B deux points distincts du plan, O le milieu du segment $[AB]$ et E un point quelconque du plan. Montrer que l'on peut construire une parallèle à la droite (AB) passant par E uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction demandée sur la figure proposée en annexe 2 qui sera rendue avec la copie.

3. Soit O un point du plan et r un réel strictement positif ; Γ le cercle de centre O et de rayon r ; $[AB]$ un diamètre du cercle Γ. Montrer que l'on peut construire le symétrique B_1 de B par rapport à A uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction demandée sur la figure proposée en annexe 3 qui sera rendue avec la copie.

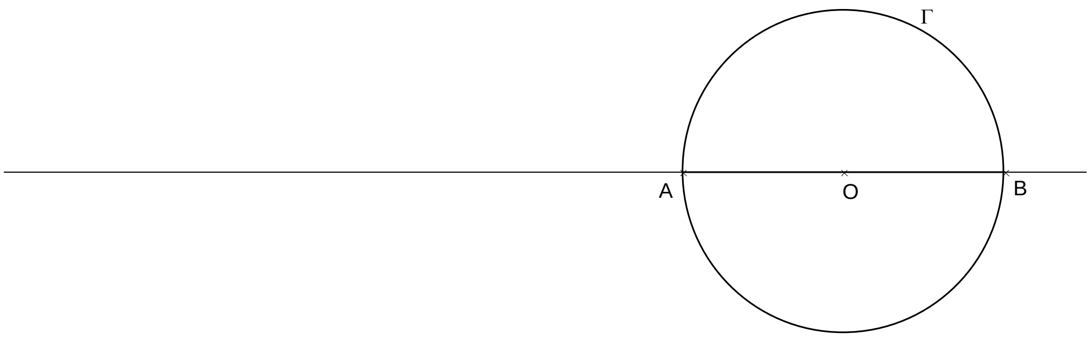
Annexe 1 (à rendre avec la copie)



Annexe 2 (à rendre avec la copie)



Annexe 3 (à rendre avec la copie)

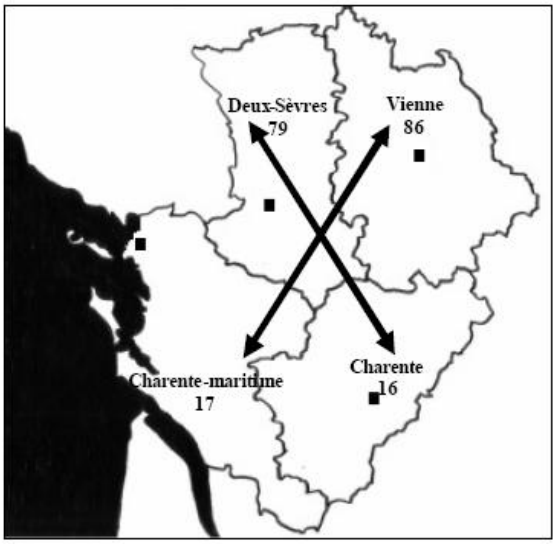


http://mathematiques.scola.ac-paris.fr/actualites.htm

18. Poitiers

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?rubrique26

18-a : Une somme déterminante ?



Les numéros des quatre départements de la région Poitou-Charentes sont liés ensemble par une relation qui peut sembler étonnante. Observez plutôt : 16 + 17 + 79 + 86 = 86×17–79×16.

La relation : $a + b + c + d = db - ca$ avec $a < b < c < d$ (1) entre les numéros de quatre départements est-elle exceptionnelle ?

Pour les besoins de l'exercice vous conviendrez de la numérotation fantaisiste suivante : 20 (Corse du Sud) ; 96 (Haute Corse) ; 97 (Guadeloupe) ; 98 (Martinique) ; 99 (Guyane) ; 100 (Réunion). Ainsi vous disposerez des 100 départements français numérotés de 1 à 100.

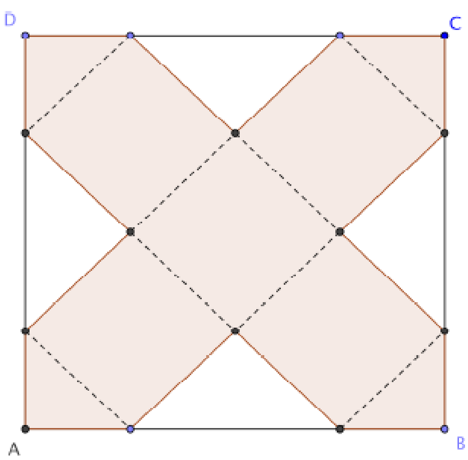
a. Donner quatre autres numéros de département vérifiant la relation (1) et produisant de plus exactement le même résultat que la région Poitou-Charentes à savoir 198.

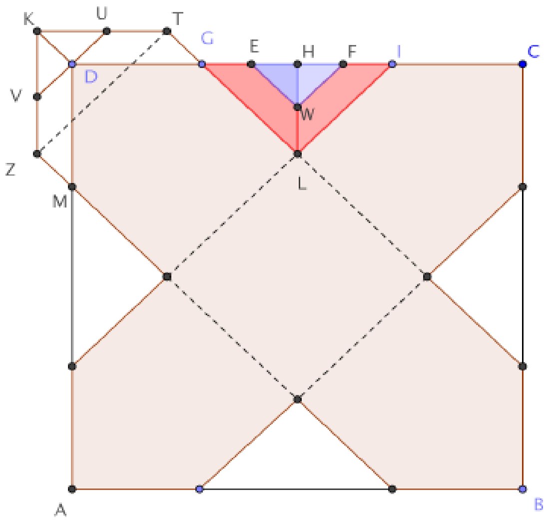
b. La relation (1) peut-elle produire un résultat impair ?

c. Au total, combien peut-on former de groupes de quatre départements vérifiant la relation (1) ?

18-b : Patrons et volumes

On a découpé les parties restées en blanc d'une feuille de carton ABCD, carrée de 12 cm de côté comme indiqué sur la figure à gauche ci-dessous. On a ainsi fabriqué le patron d'un cube. Après pliage selon les pointillés et collage avec du ruban adhésif, quel est le volume du cube obtenu ?





Pour qu'il n'y ait aucune chute de carton, on propose de recoller à l'aide de ruban adhésif les morceaux, pour construire le patron de même forme que le précédent, mais de dimensions plus grandes comme indiqué sur la figure de droite ci-dessus. Les morceaux trapézoïdaux GLWE et ILWF sont déplacés et recollés en DGTU et DMZV, les morceaux triangulaires HWE et HWF sont déplacés et recollés en DUK et DVK. On opère de même avec les 3 autres chutes de cartons, afin d'obtenir ainsi le cube le plus volumineux possible. Quel est le volume maximum ainsi obtenu ?

Corrections : http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?article58

19. Strasbourg

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php?frame=.%2Fcompet%2Fsujets.php&m0=comp&m1=oly&m2=suj&categ=olymp

19-a : Le dictionnaire

Toutes sections sauf S

On a utilisé 6921 caractères d'imprimerie (chiffres) pour numéroter les pages d'un dictionnaire. Combien de pages ce dictionnaire contient-il ? (chaque page est numérotée une seule fois, la première portant le numéro 1)

19-b : Le digicode

Toutes sections sauf S

La porte d'entrée d'un immeuble s'ouvre à l'aide d'un digicode.

Celui-ci comporte trois lettres A, B, C et neuf chiffres (de 1 à 9). Le code d'accès à cet immeuble est formé de trois lettres suivies de trois chiffres.

1. Combien de codes différents peut-on composer ?
2. Combien y-a-t-il de codes différents commençant par AB ?
3. Combien y-a-t-il de codes différents finissant par trois chiffres identiques ?
4. Combien y-a-t-il de codes différents contenant le chiffre 1 ?

19-c : Le dictionnaire

Classe de premiere S

1. On a utilisé 6921 caractères d'imprimerie (chiffres) pour numéroter les pages d'un dictionnaire.

Combien de pages ce dictionnaire contient-il ? (chaque page est numérotée une seule fois, la première portant le numéro 1.)

2. On dispose d'un dictionnaire de N pages. On numérote les pages comme à la question précédente. Expliquer comment déterminer le nombre de caractères utilisés pour effectuer cette numérotation.

19-d : Les moyennes

Classe de premiere S

On dispose d'un ensemble de nombres réels vérifiant la propriété suivante : s'il contient certains nombres, il contient aussi leur moyenne.

On sait que cet ensemble contient effectivement 0 et 1.

1. Montrer qu'il contient $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{12}$.

2. Montrer qu'il contient tous les réels de la forme $\frac{1}{4^n}$ et $\frac{3}{4^n}$ avec n entier naturel non nul.

3. Montrer qu'il contient $\frac{1}{5}$.

4. Est-ce qu'il contient tous les réels de la forme $\frac{1}{n}$ avec n entier naturel non nul ?

Corrigés :

http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php?frame=.%2Fcompet%2Fsujets.php&m0=comp&m1=oly&m2=suj&categ=olymp

20. Toulouse

http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/viedesmaths/olympiades/annales.php

20-a : Mon chat

candidats toutes séries

Mon chat déteste la pluie. Lorsqu'il pleut, il cherche un abri et se met le plus loin possible du bord de l'abri.

1. Ainsi, sous la table du jardin, qui est un carré de 1m de côté, il se blottit sous le centre de la table et n'en bouge plus. À quelle distance est-il du bord de la table ?

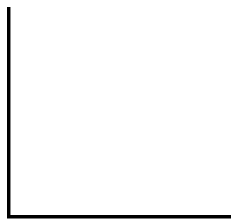
2. Lorsqu'il est à l'abri sous une table rectangulaire de côté 0,9 m sur 1,80 m, le chat se déplace sur un segment de droite.

a. Quelle est la longueur de ce segment ?

b. De manière plus générale quelle relation peut-on établir entre la longueur L, la largeur l(de la table rectangulaire) et la longueur du segment sur lequel se déplace le chat ?

c. Proposer un autre abri lui permettant de se déplacer sur un segment de longueur 0,9 m et dont l'aire est inférieure à celle de l'abri proposé au a.

3. Mon chat peut-il rêver d'un abri qui lui permettrait de se promener sur le long de deux segments perpendiculaires et de même longueur ? Si oui, dessiner un tel abri et justifier le songe du chat, sinon montrer pourquoi ce n'était qu'un rêve infidèle de félidé.



20-b : La balance

candidats des séries autres que la série S

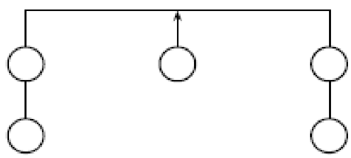
Une balance est constituée de plateaux contenant chacun un seul poids ; éventuellement elle comporte un plateau sur l'axe.

On dispose de poids numérotés. La masse de chaque poids est égale à son numéro. (Le poids n°1 pèse 1 g, le poids n°2 pèse 2 g...).

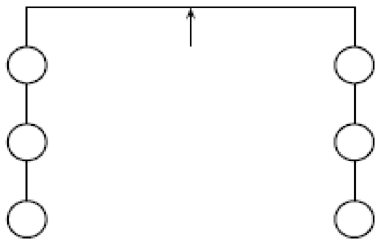
Le poids placé sur l'axe de la balance, s'il y en a un, n'a pas d'influence sur l'équilibre. À chaque fois, si l'on a besoin de k poids, on utilise les poids numérotés de 1à k.

1. a. On veut réaliser un équilibre sur la balance ci-dessous en utilisant tous les poids de 1 à 5.

Proposer une répartition. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de réaliser un équilibre en plaçant le poids 2 sur l'axe.



b. On veut réaliser un équilibre sur la balance ci-dessous en utilisant tous les poids de 1 à 6. Pouvez-vous proposer une répartition ?

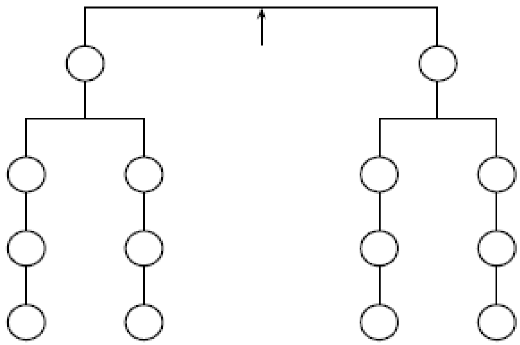


2. On veut réaliser un équilibre en utilisant tous les poids de 1 à 9. On place donc un poids sur l'axe et 4 poids de chaque côté.

a. Proposer une répartition en plaçant le poids n° 5 sur l'axe.

b. Proposer une répartition en plaçant le poids n° 1 sur l'axe. Est-ce possible avec le n° 9 ?

3. Peut-on réaliser un équilibre avec les poids de 1 à 14 sur la balance ci-dessous ?



20-c : Le mauvais sujet

candidats des séries S

1. Dans une classe de lycée (dont l'effectif est réglementairement limité à 35 élèves), tous les élèves passent un test auquel il faut obtenir au moins 65 pour le réussir. La moyenne générale est de 66, la moyenne des reçus de 71 et la moyenne des recalés de 56.

Quelle est la proportion de reçus par rapport à l'effectif de la classe ?

2. À la suite d'une erreur mineure dans le sujet, le jury décide d'ajouter 5 points à tous les élèves. La moyenne des reçus passe alors à 80 et celle des recalés à 47. Toutes ces moyennes sont exactes (autrement dit ce sont des nombres entiers).

Trouver le nombre d'élèves reçus en plus et le nombre d'élèves de la classe.

21. Versailles

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades.htm

21-a : 2007 - Géométrie de l'à peu près

concours S et STI

Le plan est muni d'une distance.

On donne les définitions suivantes :

Définition 1 : Deux points sont *presque égaux* si leur distance est inférieure à 0,1 (un dixième d'unité) ;

Définition 2 : Deux segments ont *presque la même longueur* si leurs longueurs diffèrent de moins de 0,1 ;

Définition 3 : Un triangle est *presque équilatéral* si ses côtés ont presque la même longueur deux à deux.

1. Un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse [BC] a pour longueur 1 peut-il être presque équilatéral ?

2. Un triangle rectangle peut-il être presque équilatéral ?

3. On considère un segment [BC] de longueur 2, on note I le milieu de [BC]. À tout point A du plan tel que AB = 2, on associe son projeté orthogonal H sur la droite (BC).

a. Quel est l'ensemble des points A tels que I et H soient presque égaux ?

b. Si I est presque égal à H, le triangle ABC est-il presque équilatéral ?

21-b : 2007 - Comment débutent les puissances de 2 ?

concours S et STI

Étant donné un entier naturel n , on considère l'ensemble des puissances de 2 comprises, au sens large, entre 1 et $2n$.

On note α_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 1, par 2 ou par 3.

On note β_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 4, par 5, par 6 ou par 7.

On note γ_n le nombre de ces puissances dont l'écriture décimale débute par 8 ou par 9.

1. Déterminer α_{15} et β_{15}.

2. Que peut-on conjecturer de la limite éventuelle de $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$?

3. Démontrer ce résultat (on pourra montrer que, pour tout entier n, $\alpha_n - 2 \leq 2\beta_n \leq \alpha_n$).

Correction : http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/suj2007/exoly_corrS.pdf

21-c : 2007 - Rallye numérique

concours STG, ES et L

On choisit un nombre, puis on a le choix entre :

- lui ajouter 3 ;
- le multiplier par 5.

On recommence avec le nombre obtenu, et ainsi de suite.

1. Partant du nombre 1, est-il possible d'obtenir 2007 au bout d'un certain nombre d'étapes ?

2. Trouver l'ensemble des entiers qu'on peut prendre au départ pour obtenir 2007 en un certain nombre d'étapes.

3. Quel est le nombre minimum d'étapes nécessaires pour parvenir à 2007 en partant de 3 ?

21-d : 2007 - Bonnes affaires

concours STG, ES et L

Une chaîne de magasins fait la proposition suivante :

« Pour tout achat d'un montant minimum de 60 euros, un bon d'achat de 10 euros est offert, utilisable sur un achat d'un montant minimum de 40 euros ».

1. On effectue deux achats successifs, l'un de 60 euros, l'autre de 40 euros. Quelle réduction, exprimée en pourcentage, a été consentie sur l'ensemble de ces achats ?

2. Quelle est, en pourcentage, la réduction consentie sur deux achats successifs de 60 euros ?

3. Un client décide d'effectuer des achats successifs de 60 euros.

a. Quelle est, en pourcentage, la réduction consentie sur trois achats successifs ? Sur quatre achats ?

b. La déduction obtenue sur une série d'achats successifs a-t-elle une limite ?

Correction : http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/suj2007/exoly_corrE.pdf