Olympiades académiques de mathématiques

1. Exercices communs

1-a : La spirale

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm) est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan.

Sur ce quadrillage on construit, en partant de O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui tourne dans le sens contraire des aiguilles d' une montre, conformément au dessin ci-dessous.

Pour tout point M à coordonnées entières, on note $l(\text{M})$ la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.

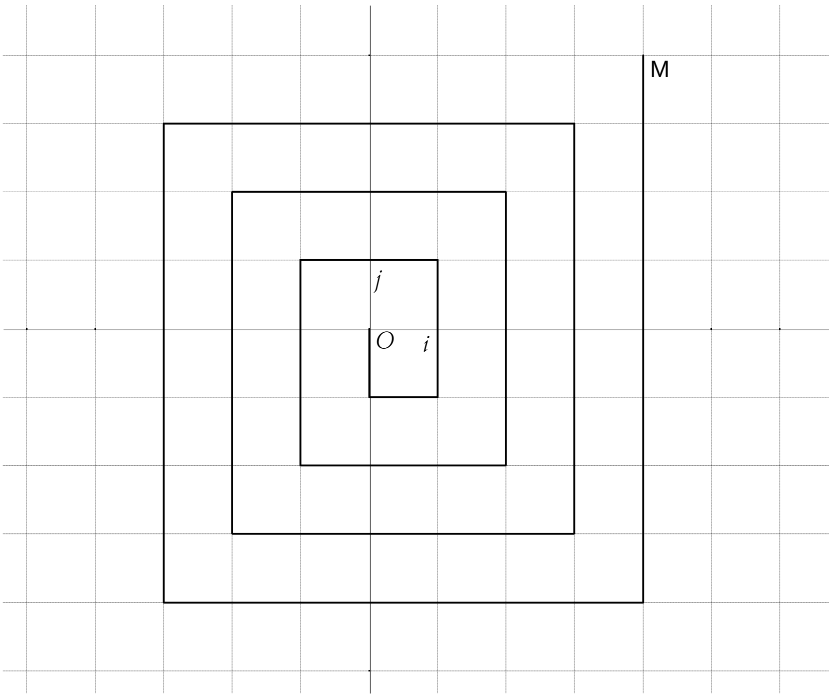
1. A est un point de l'axe des abscisses tel que OA = 5. Déterminer les valeurs possibles de $l(\text{A})$.

2. B est le point de coordonnées (2005 ; 2006). Déterminer $l(\text{B})$.

3. Déterminer les coordonnées du point C tel que $l(\text{C})=2006$.

4. La « spirale » passe-t-elle par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant : $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.



Correction

1. Il y a deux places possibles pour A : (5 ; 0) et (−5 ; 0) ;

à droite, il faut 1+1+2+2+3+3+…+9+9+5=2(1+…+9)+5 = 95 ;

à gauche, il faut 1+1+2+2+3+3+…+9+9+10+10+5=2(1+…+10)+5 = 115.

2. Il est assez facile de voir que pour aller en

$M_1=(1\ ;\ 1)$ on a $l(M_1)=4=2^2$,

$M_2=(2\ ;\ 2)$ on a $l(M_2)=16=4^2$,

$M_3=(3\ ;\ 3)$ on a $l(M_3)=36=6^2$,

d'où on déduit que pour aller en $M_n=(n,\ n)$ on a $l(M_n)=(2n)^2$. (La récurrence est laissée au lecteur…)

Pour aller en (2005 ; 2006) il faut aller en (2006 ; 2006) puis un coup à gauche :

$$l(B)=(2\times 2006)^2+1=16\,096\,145:$$

3. $l(\mathrm{C})=2006$: on a $(2\times 22)^2=1936$, on consomme 1936 pas pour aller en (22 ; 22) puis on fait

1936 + 44 = 1980 pour (−22 ; 22),

1980 + 22 = 2002 pour (−22 ; 0),

2002 + 4 = 2006 pour (−22 ; −4).

4. Evidemment il est plus intéressant de trouver une formule générale… Ce qui permet de justifier la réponse à la quatrième question :

Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières. Eliminons immédiatement le cas où $p=q=0$: cas $D=O$.

Notons $n=\max(|p|,|q|)$. Si $n=|p|$ alors $|q|\leqslant n$ donc $-n\leqslant q\leqslant n$ et $p\in\{-n,n\}$.

Si $p=n$ alors $D(n,q)$ avec $-n\leqslant q\leqslant n$ est sur le segment $[B_nC_n]$ car $\begin{cases} x_{B_n}=x_D=n=x_{C_n} \\ y_{B_n}=-n\leqslant y_D\leqslant y_{C_n}=n \end{cases}$.

Si $p=-n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n\leqslant q\leqslant n$ est sur le segment $[D_nA_{n+1}]$ car

$$\begin{cases} x_{A_{n+1}}=x_D=-n=x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}}=-n-1<-n\leqslant y_D\leqslant y_{D_n}=n \end{cases}.$$

Si $n\neq|p|$ alors $|p|<|q|=\max(|p|,|q|)=n$: par suite $|p|<n$ donc $-n<p<n$ et $q\in\{-n,n\}$.

Si $q=n$ alors $D(p,n)$ avec $-n<p<n$ est sur le segment $[C_nD_n]$ car $\begin{cases} x_{D_n}=-n<x_D=p<n=x_{C_n} \\ y_{D_n}=y_D=n=y_{C_n} \end{cases}$

Si $q=-n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n<p<n$ est sur le segment $[A_nB_n]$ car

$$\begin{cases} x_{A_n}=-n+1\leqslant x_D=p<n=x_{B_n} \\ y_{A_n}=y_D=-n=y_{B_n} \end{cases}$$

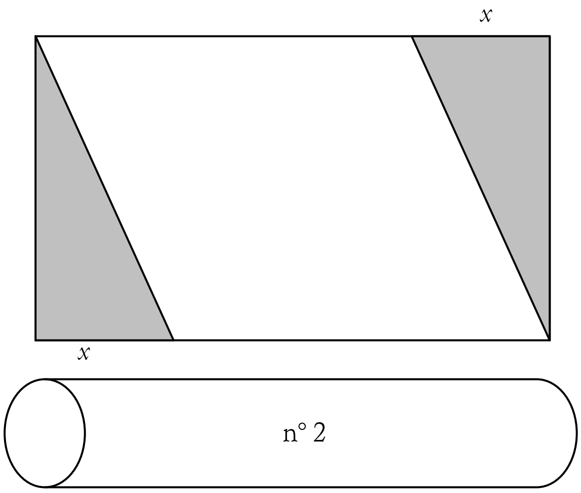
Ainsi dans tous les cas D est sur un des segments qui constituent la spirale.

1-b : Les cylindres de papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large sur 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés.

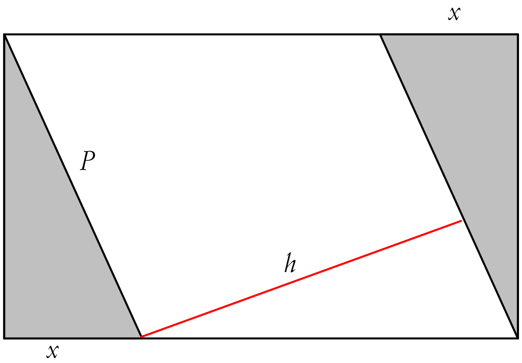
En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre. Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n° 1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n° 2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.



<u>Correction</u>

1. Faux : $V_1=\pi\left(\dfrac{29{,}7}{2\pi}\right)^2 21 \neq V_2=\pi\left(\dfrac{21}{2\pi}\right)^2 29{,}7$.

2. Dans un sens c'est facile : la hauteur est 21, le périmètre du cercle est $29{,}7-x$ d'où le volume

$$V_1=\pi\left(\frac{29{,}7-x}{2\pi}\right)^2\times 21=\frac{21(29{,}7-x)^2}{4\pi}.$$

Dans l'autre sens le périmètre du cercle est $P=\sqrt{21^2+x^2}$,

la hauteur est indiquée en rouge, on l'obtient avec les aires :

$$21\times 29{,}7-2\left(\frac{x\times 21}{2}\right)=P\times h\Rightarrow h=\frac{21(29{,}7-x)}{\sqrt{21^2+x^2}}.$$

On a donc $V_2=\pi\left(\dfrac{\sqrt{21^2+x^2}}{2\pi}\right)^2\dfrac{21(29{,}7-x)}{\sqrt{21^2+x^2}}=\dfrac{21(29{,}7-x)\sqrt{21^2+x^2}}{4\pi}$.

Il reste à résoudre l'équation $V_1=V_2 \Leftrightarrow 29{,}7-x=\sqrt{21^2+x^2} \Leftrightarrow 29{,}7^2-2\times 29{,}7x+x^2=21^2+x^2$ d'où la solution $x=\dfrac{29{,}7^2-21^2}{2\times 29{,}7}\approx 7{,}42$.

2. Amiens

2-a : Aires

ABCD est un quadrilatère convexe quelconque.

I ,J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

Où doit-on placer un point O tel que les quadrilatères OIAL, OJBI, OKCJ et OLDK aient la même aire ?

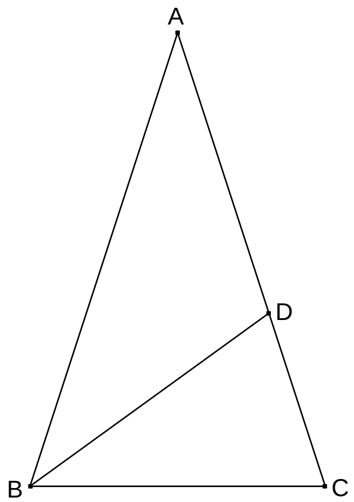
2-b : Bof…

Prouver que parmi cinq nombres réels positifs donnés on peut trouver deux réels a et b tels que

$$0 \leq \frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1-b^2} \leq \frac{1}{8}.$$

3. Besançon

3-a : Le triangle d'or



ABC est un triangle isocèle de sommet A très particulier : en effet en menant de B la bissectrice du secteur ABC, on constate qu'elle coupe [AC] en un point D tel que BCD est à son tour un triangle isocèle, de sommet B.

1. Montrer que la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{5}$.

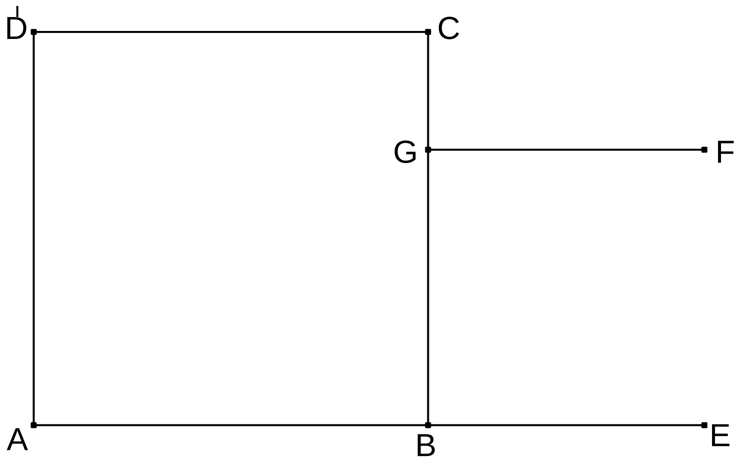
2. Donner alors la mesure en radians des autres angles de cette configuration.

3. Montrer que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$.

4. Sachant que BC = 1, déterminer AB.

5. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

3-b : Deux carrés en un



ABCD et BEFG sont deux carrés dont les côtés ont pour longueurs respectives a et b, de telle sorte que $a > b$.

1. Soit I le point d'intersection des droites (EG) et (DF). Démontrer que I est le milieu du segment $[FD]$.

2. Soit Γ le cercle de centre I passant par le point B. On note H le deuxième point d'intersection de Γ avec la droite (AB). Justifier que $[FD]$ est un diamètre de Γ, puis démontrer que la droite (IH) est la médiatrice de $[FD]$.

3. Soit J le point d'intersection des droites (BG) et (HF).

On « découpe » la figure initiale selon les triangles EFH, FGJ, ADH et le quadrilatère CDHJ.

Montrer qu'en assemblant ces 4 polygones sans les superposer, on peut reconstituer un carré. Faire un dessin avec a = 4 cm et b = 3 cm.

4. Exprimer la longueur c = DH en fonction de a et b.

Corrections : http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/info-culture/index.htm

4. Bordeaux

4-a : Factorielle ¿

Pour n entier naturel, on désigne par $P(n)$ le produit des chiffres intervenant dans l'écriture décimale de n.

Par exemple : $P(5) = 5$, $P(45) = 4 \text{ x} 7 = 28$.

On se porpose de déterminer tous les entiers vérifiant : $P(n) = n^2 + 1002n - 2006$.

1. Déterminer tous les nombres qui s'écrivent avec un seul chiffre et solutions du problème.

2: Démontrer que, si k est le nombre de chiffre de n , alors $P(n) < 9^k$ et $10^{k-1} < n$.

En déduire l'encadrement suivant :

$$10^{2k-2} + 1002\text{x}10^{k-1} - 2006 < P(n) < 9^k.$$

3: Le problème a-t-il des solutions s'écrivant avec 2 chiffres ¿

4: Conclure.

4-b : Carrés et cercle

ABCD est un carré inscrit dans un demi-cercle de centre O dont le côté [CD] est porté par le diamètre. (Voir figure ci-dessous).

1. Démontrer que la médiatrice de [CD] passe par O.

2. Donner une construction à la règle et au compas du carré ABCD connaissant le point O et le demi-cercle de centre O.

3. Soit HIJC le carré construit dans l'indique la figure. Donner une construction à la règle et au compas de ce carré.

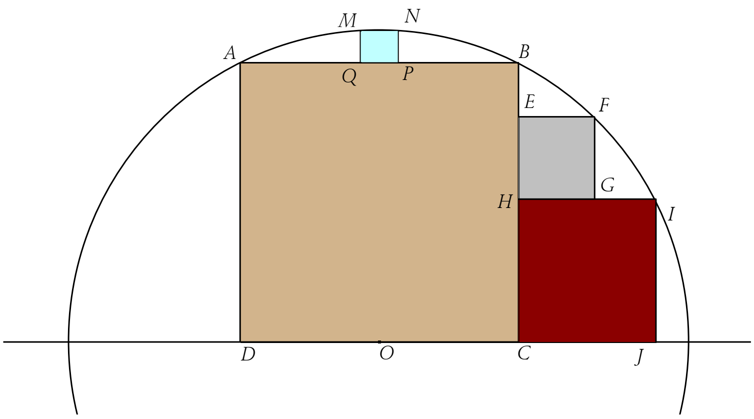
4. On désigne par a et b les mesures respectives des côtés des carrés ABCD et HIJC.

a. Montrer que $a^2 = 2b^2 + ab$.

b. Combien vaut le rapport (a/b) ¿

c. Le cercle de centre C et de rayon CE passe-t-il par le centre du acré ABCD ¿

d. Quelles sont les valeurs de a et b si le rayon du demi-cercle est 1 ¿ Dans ce cas, déterminer les mesures des côtés des carrés EFGH et MNPQ représentés sur la figure.



5. Caen

5-a : Les rectangles

On rappelle que deux rectangles sont semblables s'ils ont le même rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$. (On convient comme d'habitude que la mesure de la longueur est toujours supérieure ou égaleà celle de la largeur.)

On dispose d'une feuille rectangulaire de dimensions L et l, avec $L > l$.

Un des axes de symétrie est horizontal, l'autre est vertical.

On plie cette feuille suivant son axe vertical (opération p_1), puis suivant l'axe horizontal du rectangle obtenu (opération p_2), puis suivant l'axe vertical du nouveau rectangle (opération p_3), et ainsi de suite en alternant pliage suivant la verticale et pliage suivant l'horizontale et en notant p_n la $n^{\text{ième}}$ opération.

Si l'on déplie la feuille après avoir effectué un certain nombre de pliages, on constate que l'on a obtenu un pavage par des rectangles.

1. Combien le pavage comporte-t-il de rectangles après avoir effectué les opérations p_4 ? p_7 ? p_n ?

2. Montrer que, si n est pair, tous les rectangles du pavage sont semblables au rectangle de départ.

3. Est-il possible d'obtenir un pavage par des carrés ?

4. Est-il possible qu'après chaque opération p_n on obtienne un pavage par des rectangles tous semblables au rectangle de départ ?

5-b : La spirale du chien

Un chien est attaché par une laisse d'une longueur de 10 mètres en un point F d'un poteau cylindrique de diamètre 2 mètres. Le chien circule en gardant en permanence sa laisse tendue et on suppose qu'il se déplace en tournant autour du poteau dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (pour un observateur regardant la scène du dessus).

On suppose aussi que le sol est plan, que l'axe du poteau est perpendiculaire à ce plan. On assimilera le chien à un point situé dans le plan du sol. On supposera que le point F est aussi dans ce plan et on appellera O le point de l'axe du poteau situé dans ce plan.

On appelle D la position initiale du chien. On suppose que D est sur la demi-droite [OF).

Lorsque le chien circule, sa laisse, qu'on suppose sans épaisseur, s'enroule autour du poteau.

1. Faire un dessin soigné à l'échelle 1/100$^{\text{ème}}$. On fera figurer sur ce dessin les positions du chien :

- C_1 lorsque sa laisse devient pour la 1$^{\text{ère}}$ fois perpendiculaire à sa direction initiale
- C_2 lorsque sa laisse devient pour la 1$^{\text{ère}}$ fois parallèle à sa direction initiale
- C_3 lorsque sa laisse devient pour la 2$^{\text{ème}}$ fois perpendiculaire à sa direction initiale
- C_4 lorsque sa laisse devient pour la 2$^{\text{ème}}$ fois parallèle à sa direction initiale.

On indiquera dans chaque cas la longueur libre de la laisse.

La droite (OF) partage le plan en deux demi-plans. On appelle (P_1) le demi-plan dans lequel s'engage le chien lorsqu'il quitte sa position de départ et (P_2) l'autre demi-plan.

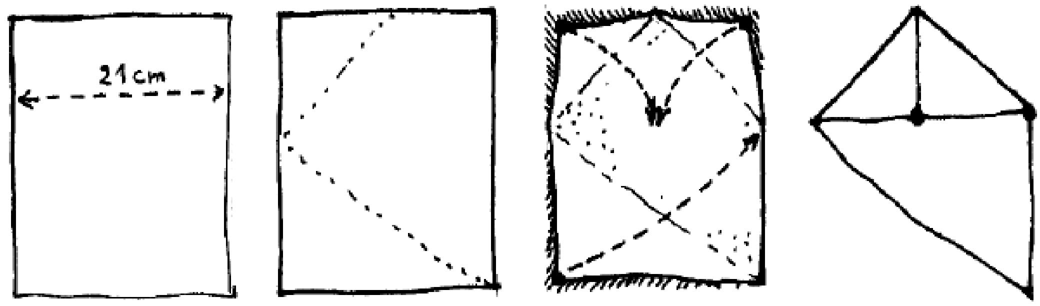
2. On a tracé sur le sol une ligne de poudre blanche entre deux points M et N tous les deux situés dans le demi-plan (P_1) sur la perpendiculaire en F à (OF) et tels que FM = 4 m et FN = 9,5 m. Le chien risque-t-il de se blanchir la patte ?

3. Une flaque d'eau circulaire a pour rayon r = 0,3 m et pour centre le point G dans le demi-plan (P_2) sur la perpendiculaire en O à (OF) tel que OG = 7 m. Le chien va-t-il se mouiller la patte ?

6. Corse

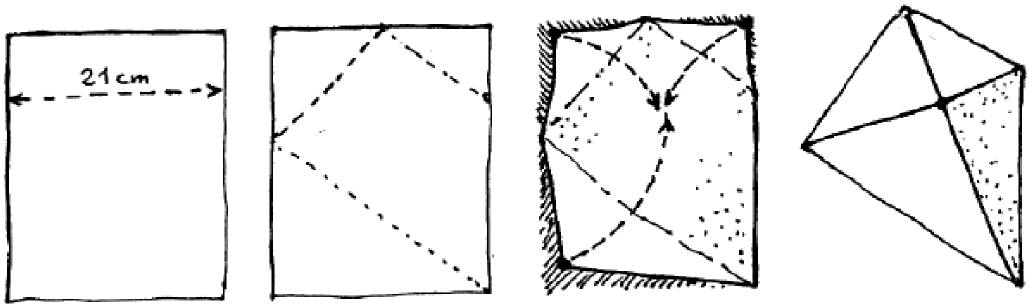
6-a : Les pliages d'une feuille de papier

1. On dispose d'une feuille de papier rectangulaire de largeur 21 centimètres, que l'on peut plier afin d'obtenir la forme d'un quadrilatère comme indiqué sur le dessin suivant :



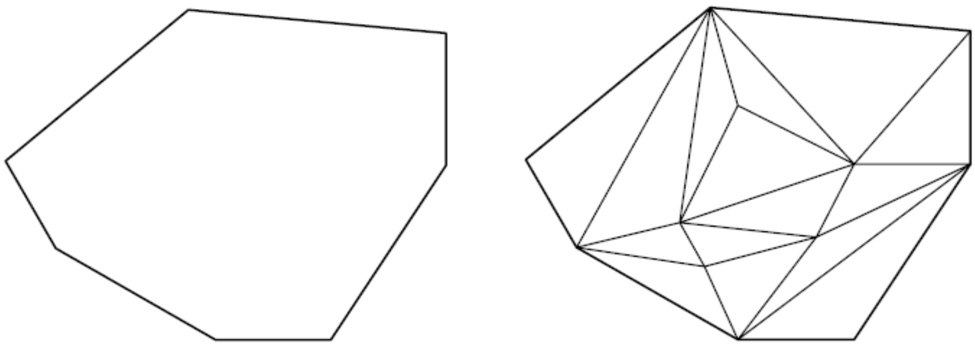
Déterminer la longueur de cette feuille de papier.

2. On dispose d'une autre feuille de papier rectangulaire de largeur 21 centimètres, que l'on peut plier d'une autre façon, afin d'obtenir la forme d'un quadrilatère comme indiqué sur le dessin suivant :



Déterminer la longueur de cette feuille de papier.

6-b : La triangulation



On dit que l'on a « triangulé » un polygone convexe lorsqu'on a tracé un ensemble de triangles qui ne se chevauchent pas, remplissant l'intérieur du polygone et dont les sommets sont soit ceux du polygone soit des points à l'intérieur de celui-ci, et dont les côtés ne contiennent de sommets qu'en leurs extrémités.

1. Soit ABC un triangle.

a. Soit M_1 un point intérieur à ABC. déterminer les triangulations de ABC de sommets $ABCM_1$.

b. Soient M_1M_2 deux points distincts, intérieurs au triangle ABC. Démontrer que toutes les triangulations de ABC de sommets $ABCM_1M_2$, ont le même nombre de triangles.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère un polygone convexe de n côtés.

Déterminer en fonction de n, le nombre de triangles d'une triangulation de votre choix ayant pour seuls sommets ceux du polygone.

3. On considère un polygone convexe de 2006 côtés que l'on a triangulé avec 4012 triangles.

Déterminer le nombre de côtés qu'il a fallu tracer à l'intérieur du polygone.

Correction : http://nuticiel.ac-corse.fr/math/download/CORRECTION_OLYMPIADES_2006.pdf

7. Créteil

7-a : En voyage

Partant en voyage en voiture, Isa et Josette croisent des bornes kilométriques indiquant la distance les éparant de Paris qu'elles lisent toutes les heures.

- à 10 heures, elles lisent une borne portant 2 chiffres ;
- à 11 heures elles croisent une borne portant les 2 mêms chiffres mais inversés ;
- et à midi, elles lisent une borne portant les mêmes chiffres séparés par un zéro.

1. En supposant que la voiture roule à vitesse constante, quelle est cette vitesse ?

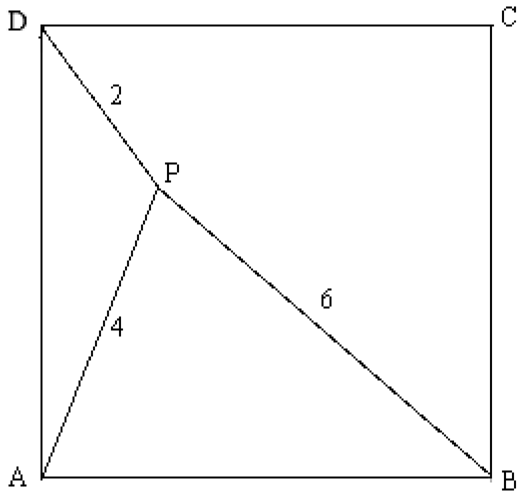
Par la suite, la circulation s'étant dégagée, elles poursuivent leur voyage en se relayant au volant et en s'accordant une pause toutes les 3 heures.

Toutes les 3 heures, elles croisent successivement des panneaux à 3 chiffres : abc, bca et cab.

2. En supposant que sur chaque période de 3 heures, la vitesse moyenne est la même, quel est le kilométrage indiqué sur le dernier panneau rencontré ?

7-b : Un angle

Sur le parchemin ci-dessous ne figurent qu'un carré, 3 segments et 3 indications de longueur. Déterminer l'angle $\widehat{APD}$.



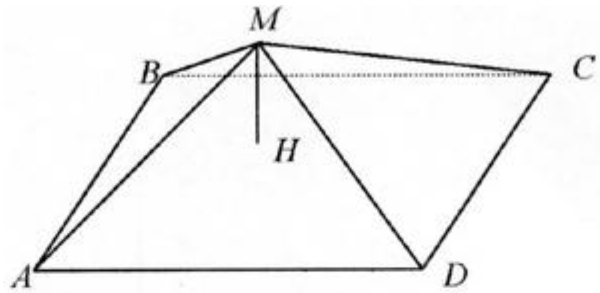
8. Dijon

8-a : Sur le toit

Un radio amateur place un mât d'antenne sur le toit rectangulaire de son garage à l'endroit où il fournit la meilleure réception (on suppose que ce mât est orthogonal au plan du toit).

Il fixe alors ce mât par des câbles rectilignes en fil de fer qui vont de la cime jusqu'aux coins du toit selon le schéma ci-dessous.

Sur ces quatre câbles, deux câbles non consécutifs mesurent 7 mètres et 4 mètres, un troisième mesure 1 mètre. Quelle est la longueur du dernier câble ?



8-b : Les licornes

Dans l'île mystérieuse, vivent depuis toujours b licornes bleues, r licornes rouges et v licornes vertes.

Un mal étrange vient frapper l'île : dès que deux licornes de couleurs différentes se rencontrent, elles changent toutes les deux de couleur et prennent la couleur restante.

Le but de ce problème est d'étudier la possibilité que, sur cette île, les licornes deviennent unicolores.

1. Montrer qu'une telle issue est possible dans chacun des cas suivants :

a. $b = r$ ou $b = v$ ou $r = v$.

b. $r = b + 3$ et $v > 0$.

c. $r = b + 3k$, où k est un entier naturel inférieur à v.

2. Dans cette question, on suppose que $b = 1$, $r = 2$, $v = 3$.

Une telle population peut-elle devenir unicolore ?

3. On suppose que n rencontres ont eu lieu depuis le début du mal.

A quelle condition nécessaire et suffisante sur b, v, r, la population des licornes peut-elle devenir unicolore ?

Correction : http://webpublic.ac-dijon.fr/pedago/maths/olympiades/2006/accueil.htm

9. Grenoble

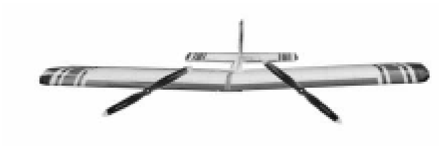
9-a : Factorielle

1. Déterminez le plus grand entier k tel que 3^k divise le produit 1 x 2 x 3 x……..x 28 x 29 de tous les entiers de 1 à 29.

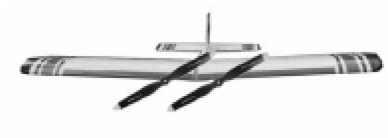
2. Même question dans le cas du produit 1 x 2 x 3 x……..x 2005 x 2006 de tous les entiers de 1 à 2006.

9-b : Modèle réduit

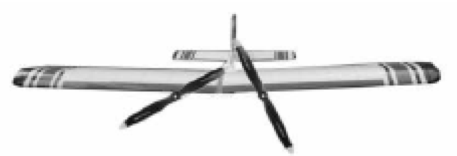
Sur ce modèle réduit, la distance entre les axes des deux hélices de même longueur et qui tournent dans un même plan est supérieure à la longueur d'une hélice. Les hélices peuvent tourner de façon indépendante sans se heurter.



Cette fois, la distance entre les axes des deux hélices est inférieure à la demi-longueur d'une hélice. Les hélices vont nécessairement se heurter.



Et si la distance entre les axes des deux hélices est comprise entre la demi-longueur et la longueur d'une hélice ? Il s'agit, dans cet exercice, de savoir, dans un cas particulier, s'il est possible de faire tourner les deux hélices dans le même sens et à la même vitesse sans qu'elles se heurtent.



L'unité est le centimètre.

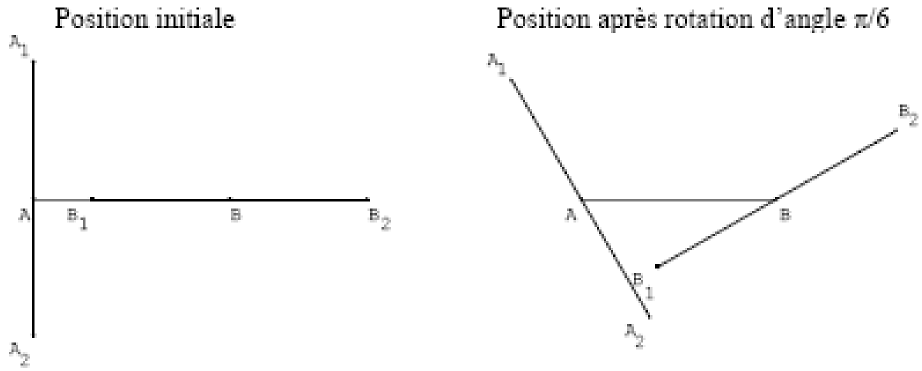
A et B sont deux points tels que $AB = 10$. Deux segments $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ de longueur 14 ont pour milieux respectifs A et B.

Leur position initiale est indiquée ci-dessous ($[B_1B_2]$ est inclus dans la droite (AB) et $[A_1A_2]$ est perpendiculaire à (AB)).

On les fait pivoter autour de leurs centres d'un même angle orienté (voir la figure ci-dessous à droite qui illustre un cas particulier).

1. Quel est l'ensemble des positions du point d'intersection H des droites (A_1A_2) et (B_1B_2) quand les segments pivotent ?

2. Les deux segments vont-ils se toucher ?



10. Lille

10-a : La bonne boîte

Antoine possède un nombre N, N supérieur à 10, de boîtes qu'il a numérotées dans l'ordre de 1 à N.

Il possède également 2006 jetons numérotés dans l'ordre de 1 à 2006.

Il décide de déposer les jetons dans les différentes boîtes :

Le jeton 1 dans la boîte 1, le jeton 2 dans la boîte 2, ..., le jeton N dans la boîte N.

Il continue en plaçant le jeton $N+1$ dans la boîte $N-1$, le jeton $N+2$ dans la boîte $N-2$, ..., le jeton $2N-1$ dans la boîte 1, puis le jeton $2N$ dans la boîte 2, etc.

Il va donc alternativement de la boîte 1 à la boîte N puis de la boîte N à la boîte 1.

A la fin, il constate que les jetons 847, 863 et 1473 sont dans la même boîte. Dans quelle boîte se trouve le jeton 2006 ¿

10-b : Hexagone

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

Les points P, Q, R, S, T et U sont les centres de gravité respectifs des triangles GAC', GBC', GBA', GCA', GCB' et GAB'.

1. Justifier l'égalité : PQ + QR + RS + ST + TU + UP = PS + QT + RU.

2. Calculer l'aire de l'hexagone PQRSTU en fonction de celle du triangle ABC.

10-c : Correction : La bonne boîte

Remarques préliminaires : Les jetons déposés dans la boîte 1 portent un numéro de la forme $q(N - 1) + 1$ avec q pair et les jetons déposés dans la boîte N portent un numéro de la forme $q(N - 1) + 1$ avec q impair.

Soit k le numéro de la boîte où sont déposés les jetons 847, 863 et 1473. $863 - 847 = 16 < 20$ donc, après avoir placé le jeton 847 dans la case k, aucun autre jeton n'y a été déposé avant d'y placer le jeton 863.

$863 - 855 = 855 - 847$ donc le jeton 855 est soit dans la boîte 1, soit dans la boîte N. Par conséquent le nombre 854 s'écrit $q(N - 1)$, c'est à dire N-1 est un diviseur de 854.

Les diviseurs de 854 sont 1, 2, 7, 14, 61, 122, 427 et 854. Compte tenu de la condition $N > 10$, il n'y a que 5 cas possibles.

Notons que si q est pair, le jeton 855 est dans la boîte 1, sinon il est dans la boîte N.

Si on appelle a le numéro du jeton, q le quotient et r le reste de la division de a par N-1 et k le numéro de la boîte où est déposé le jeton a, on déduit:

si q pair et r différent de 0, alors $k = r$, si q pair et $r = 0$, alors $k = 2$

si q impair et r différent de 0, alors $k = N+1-r$, si q impair et $r = 0$, alors $k = N-1$

Le tableau ci-dessous donne les différentes possibilités :

N-1	14	61	122	427	854
q	61	14	7	2	1
N	15	62	123	428	855
Boîte où est placé le jeton 855	15	1	123	1	855
(q ; r) dans la division de 847 par N-1	(60 ; 7)	(13 ; 54)	(6 ; 115)	(1 ; 420)	(0 ; 847)
Boîte où est placé le jeton 847	7	9	115	9	847
(q ; r) dans la division de 863 par N-1	(61 ; 9)	(14 ; 9)	(7 ; 9)	(2 ; 9)	(1 ; 9)
Boîte où est placé le jeton 863	7	9	115	9	847
(q ; r) dans la division de 1473 par N-1	(105 ; 3)	(24 ; 9)	(12 ; 9)	(3 ; 192)	(1 ; 619)
Boîte où est placé le jeton 1473	13	9	9	237	237

Le seul cas possible correspond à N = 62 , il y a 62 boîtes et les jetons 847, 863 et 1473 sont dans la boîte 9.
Comme $2006 = 61 \times 32 + 54$, on en déduit que le jeton 2006 est dans la boîte 54.

10-d : Correction : la toile d'araignée

La construction de la figure permet d'introduire naturellement les points I, J, K, L, M et N respectivement milieux des segments [AC'], [C'B], [BA'], [A'C] , [CB'] et [C'A].

L'hexagone PQRSTU est l'homothétique de l'hexagone IJKLMN dans l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{2}{3}$.

Le segment [IN] est l'homothétique du segment [BC] dans l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$; d'autre part KL = $\frac{1}{2}$BC, donc IN + KL = $\frac{3}{4}$BC.

De la même façon, JK + MN = $\frac{3}{4}$CA et LM + IJ = $\frac{3}{4}$AB.

Le périmètre de l'hexagone IJKLMN est donc égal aux $\frac{3}{4}$ de celui du triangle ABC.

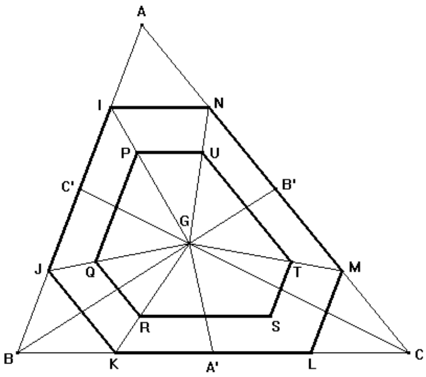
Le segment [JM] est l'homothétique du segment [BC] dans de rapport $\frac{3}{4}$;

donc JM = $\frac{3}{4}$BC. De même, KN = $\frac{3}{4}$AB et LI = $\frac{3}{4}$CA.

On dispose donc de l 'égalité IJ + JK + KL + LM + MN + NI = IL + KN + MJ, d'où

PQ + QR + RS + ST + TU + UP = PS + QT + RU = $\frac{1}{2}$(AB + BC + CA).

Les triangles AIN, BKJ et CML ont même aire, $\frac{1}{16}$ de celle de ABC. L'aire de l'hexagone IJKLMN est donc les $\frac{13}{16}$ de celle de ABC et l'aire de l'hexagone PQRSTU est les $\frac{13}{36}$ de l'aire de ABC.



11. Limoges

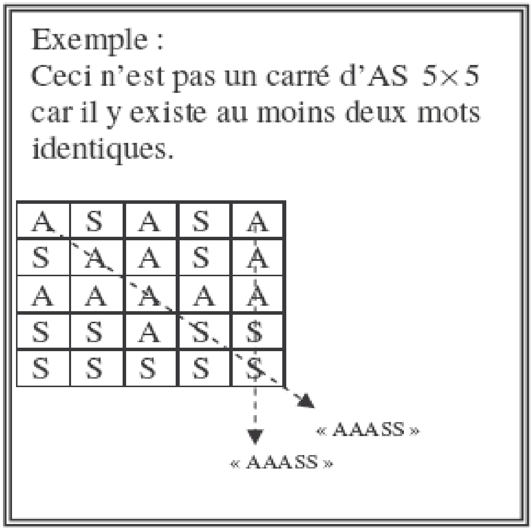
11-a : L'escargot

Un tapis extensible en caoutchouc mesure initialement 5 mètres de long. Un escargot a décidé de la parcourir entièrement. Chaque journée, l'escargot progresse d'un mètre. Mais chaque nuit, pendant que l'escargot se repose, le tapis s'allonge d'un mètre qui se répartit uniformément sur toute sa longueur.

Au bout de combien de temps l'escargot parviendra-t-il au bout du tapis ?

Corrigé : http://www.ac-limoges.fr/maths/IMG/pdf/L_escargot.pdf

11-b : Le carré d'AS.



On désigne par n un nombre entier strictement supérieur à 1, et on appelle mot une suite de n lettres (ayant un sens ou non).

Une grille carrée de n lignes et n colonnes sera appelée « grille $n \times n$ »). On se propose alors de remplir les cases d'une grille $n \times n$ de telle sorte que chaque case contienne soit la lettre A, soit la lettre S.

Une fois remplie, cette grille contient :

- n mots écrits en ligne, lus de gauche à droite,
- n mots écrits en colonne, lus de haut en bas,
- 2 mots écrits en diagonale, lus de gauche à droite.

On dit que la grille est un « carré d'*AS* » lorsque les mots qu'elle contient sont tous différents.

1. Montrer qu'il n'existe pas de carré d'*AS* dans une grille 2×2 .

2. Existe-t-il un carré d'*AS* dans une grille 3 × 3 ?

3. Donner un exemple de carré d'*AS* dans une grille 4 × 4.

Corrigé : http://www.ac-limoges.fr/maths/IMG/pdf/Le_carre_d_AS.pdf

12. Marseille

12-a : Tournoi de football

Soit un entier n supérieur ou égal à 5.n équipes disputent un tournoi de football, chacune des équipes rencontrant une fois seulement chacune des autres.

Une victoire rapporte 3 points à l'équipe gagnante, 0 point à l'équipe perdante et un match nul rapporte 1 point à chacune des équipes.

A la fin du tournoi, 3 équipes ont exactement 3 points.

Prouver que toutes les autres équipes, sauf peut-être une, ont au moins 8 points.

12-b : Encyclopédie

Léo possède une encyclopédie constituée de n tomes, où n un entier compris entre 5 et 20. $5 < n < 20$.

Tous les tomes ont le même nombre de pages. La numérotation de chaque tome commence à la page 1. Toutes les pages sont numérotées. Pour numéroter la totalité des n tomes, on a utilisé 2006 fois le chiffre 5.

De combien de tomes est constituée l'encyclopédie de Léo ?

De combien de pages est constitué chacun des tomes ?

13. Montpellier

13-a : Saine lecture

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à 999.

Quel est le nombre total de chiffres écrits pour la pagination ?

Combien de fois le chiffre 7 a-t-il été utilisé ? Et le chiffre 0 ?

Correction

Il est pratique de rajouter la page 0, ce qui fait 1000 pages, quitte à l'enlever après : on utilise alors

10 chiffres de 0 à 9,

2.90 = 180 chiffres de 10 à 99,

3.900 = 2 700 chiffres de 100 à 999,

soit un total de 2890 auquel on enlève un zéro, soit 2889 chiffres.

Dans la colonne des unités on utilise le 7 : 1 (de 0 à 9)+9 (de 10 à 99) +90 (de 100 à 999) = 100 fois,

dans la colonne des dizaines on l'utilise : 0 (de 0 à 69)+10 (de 70 à 79) +0 (de 80 à 99) +90 (de 100 à 999) = 100 fois,

dans la colonne des centaines on l'utilise : 0 (de 0 à 9)+0 (de 10 à 99) +100 (de 100 à 999) = 100 fois,

soit 300 fois au total.

Pour les autres chiffres hormis le zéro c'est pareil, on a donc 2889−9x300=189 zéros.

13-b : Struggle for life

Sur cette île chaque jour et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup. Après dix jours il ne reste plus sur l'île qu'un mouton et aucun autre animal. Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce au départ ?

Correction

Il faut évidemment ne pas tenir compte du cas où le mouton serait seul initialement…

Une première idée est évidemment de poser l, m, s les nombres de loups, moutons, serpents initiaux et de regarder ce que ça donne :

Jour 0	l	m	s	l
Jour 1		$m-l$	$s-(m-l)=s-m+l$	$l-(s-m+l)=m-s$
Jour 2		$m-l-m+s=s-l$	$s-m+l-s+l=2l-m$	$m-s-2l+m=2m-2l-s$
etc.				
Jour 10		$-40m+16s+49l$	$49m-40s-33l$	$-33m+49s-7l$

Il reste à résoudre le système $\begin{cases} -40m+16s+49l=1 \\ 49m-40s-33l=0 \\ -33m+49s-7l=0 \end{cases}$ qui a comme unique solution $\begin{cases} m=1897 \\ s=1432 \\ l=1081 \end{cases}$.

Evidemment cette technique est laborieuse et les risques d'erreur importants (j'ai fini par le faire avec Maple…).

Un autre moyen consiste à s'apercevoir qu'il ne peut y avoir de loup le 9ème jour et à remonter en arrière :

s'il y a avait un loup (ou plus) le jour 9, il mangerait un mouton, il faut donc 2 moutons, il faudrait alors 3 serpents dont 2 seraient tués et un pour tuer le loup restant, mais il resterait encore un serpent, ce qui ne colle pas.

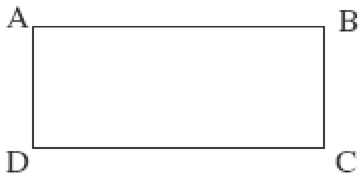
En fait plus simplement si on regarde ce qui se passe d'un jour à l'autre on a $\begin{cases} m-l=M \\ s-m+l=S \\ m-s=L \end{cases}$; cherchons alors M, S et L en fonction de m, s et l : on trouve $\begin{cases} m=M+S+L \\ s=M+S \\ l=S+L \end{cases}$, ce qui permet de calculer rapidement.

Jour	Moutons	Serpents	Loups
10	1	0	0
9	1	1	0
8	2	2	1
7	5	4	3
6	12	9	7
5	28	21	16
4	65	49	37
3	151	114	86
2	351	265	200
1	816	616	465
0	1897	1432	1081

14. Nancy - Metz

14-a : Tables et nappes

1. Quelle est la longueur maximale du côté d'une table carrée que l'on puisse recouvrir entièrement par une nappe ronde de 1 mètre de diamètre ?



2. On considère une table rectangulaire ABCD telle que AD = 0,5 mètre.

Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser les milieux de [AB] et [CD].

a. Montrer que si AB = $\sqrt{3}$ mètres, alors on peut recouvrir la table avec deux nappes rondes de 1 mètre de diamètre.

b. Montrer que si AB > $\sqrt{3}$ mètres, alors il n'est pas possible de recouvrir la table avec les deux nappes.

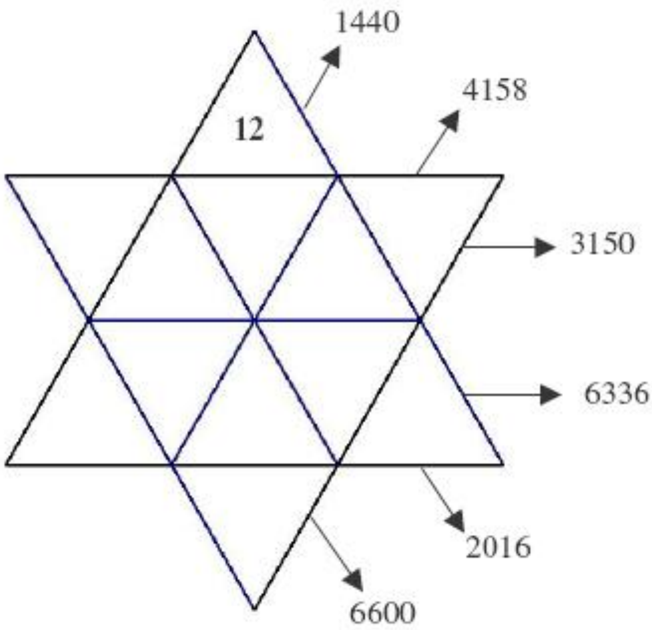
3. Quelle est la longueur maximale du côté d'une table carrée que l'on puisse recouvrir entièrement par deux nappes rondes de 1 mètre de diamètre ?

14-b : L'étoile

Les nombres entiers de **1** à **12** doivent être placés dans les douze cases de l'étoile ci-dessous. La position du nombre **12** est donnée.

Les nombres écrits à l'extérieur de l'étoile sont les produits des nombres placés dans les cinq cases de l'étoile situées dans la direction de la flèche.

1. Quelle est la seule case qui peut contenir le nombre **7** ? Justifier la réponse.
2. Quelles sont les cases possibles pour les nombres **5** et **10** ? Justifier la réponse.
3. Placer les nombres **1** et **9**. Justifier la réponse.
4. Placer, sans justification, les autres nombres et reproduire l'étoile complétée sur la copie.



Corrections : http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/examens_concours/Olympiades/olympiades2006.htm

15. Nantes

15-a : Le club de Maths

Le club de math du lycée se réunit. Il y a Ludo, Claire, Marie, Jérôme et le prof Samuel.

Ludo lance le premier défi :

« Est-il possible de construire un carré sachant que la différence entre la diagonale et le côté est 1 cm ? »

Question 1 : Jérôme prétend qu'il a trouvé tous les carrés satisfaisant à cette condition. Faire de même et le(s) construire à la règle et au compas en laissant apparents les traits de construction.

Claire lance un deuxième défi :

« J'aimerais bien savoir s'il est possible de trouver des programmes de calcul permettant à coup sûr d'obtenir des nombres entiers qui seraient les longueurs des côtés d'un triangle rectangle ».

Ludo intervient : « En tout cas, moi je connais un tel triangle : celui qui a pour dimensions 3, 4 et 5. »

Claire répond « Oui, tu as raison, mais ça ne nous donne pas une méthode pour en obtenir d'autres ! »

Ludo : Mais si ! Il suffit de multiplier 3, 4 et 5 par un même nombre entier non nul et on obtiendra les longueurs d'un triangle rectangle »

Question 2 : Ludo a-t-il raison ?

Samuel prend alors la parole : « J'ai lu autrefois un livre qui évoquait cette question, mais mes souvenirs ne sont pas sûrs. Il me semble qu'à partir de deux nombres entiers a et b, on pouvait construire 3 nombres qui convenaient.On qualifiait cela de « triangle rectangle en nombres ».

Par exemple, je me souviens qu'avec 1 et 2 on pouvait trouver 3, 4 et 5, et qu'avec 2 et 3, on pouvait trouver 5, 12 et 13. Il faut sans doute travailler avec les carrés des nombres.

Question 3 : A partir de deux nombres entiers a et b, trouver la méthode de Samuel et démontrer algébriquement qu'elle permet de répondre au problème.Utiliser cette méthode pour trouver 2 autres triangles rectangles en nombres.

Marie lance le troisième défi

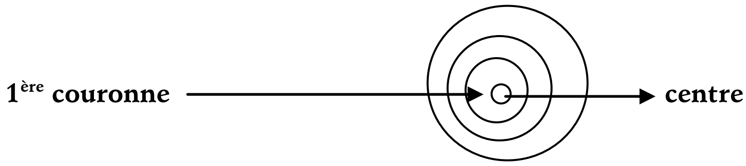
«Peut-on trouver deux triangles rectangles dont les côtés sont des entiers et dont les aires sont égales ? »

Question 4 : Essayer de relever le défi de Marie.

15-b : Le parc de loisirs

Les maires de deux communes appelées *LA GRANGE* et *LA PLACE*, décident de consulter leurs concitoyens, afin de savoir s'ils sont satisfaits du projet de construction d'un parc de loisirs à proximité de leurs habitations.

Chaque ville est constituée de quatre quartiers selon un plan circulaire Centre-ville, 1ère couronne, 2ème couronne et 3ème couronne comme le montre le dessin ci-dessous.



Les maires fixent la règle suivante : pour que le parc s'implante, le taux de satisfaction de chaque quartier doit être au moins égal à 50 %.

Au soir du scrutin, les premiers résultats tombent (seuls les résultats des quartiers 3ème couronne ne sont pas encore connus). Ce tableau donne, dans chaque commune, quartier par quartier, le nombre de personnes qui se sont exprimées et celles qui se sont déclarées satisfaites.

	Commune de *LA GRANGE*	Commune de *LA PLACE*

	EXPRIMES	SATISFAITS	EXPRIMES	SATISFAITS
Centre ville	1500	1050	3000	2400
1$^{\text{ère}}$ couronne	2400	1728	1200	984
2$^{\text{ème}}$ couronne	1400	994	800	648
3$^{\text{ème}}$ couronne				

1. Les deux maires, réunis pour commenter ces résultats, calculent le taux de satisfaction dans leurs quartiers respectifs et disent alors : « A l'évidence, pour le moment, les plus satisfaits du projet sont les gens issus des 1$^{\text{ères}}$ couronnes de nos villes »

Que pensez-vous de cette analyse ?

2. Les résultats des 3$^{\text{èmes}}$ couronnes se font attendre. On sait néanmoins que :

- Dans la commune de *LA GRANGE*, 1500 personnes issues de la troisième couronne sont satisfaites.
- Dans la commune de *LA PLACE*, 1000 personnes issues de la troisième couronne se sont exprimées.
- Le nombre de personnes qui se sont exprimées et qui sont issues de la troisième couronne de la commune de LA GRANGE est quatre fois plus élevé que le nombre de personnes satisfaites issus de la troisième couronne de la commune de LA PLACE.

Dans quel intervalle le taux de satisfaction global (sur les deux communes) se situe-t-il ?

3. Le maire de la commune de *LA GRANGE* dit à son collègue : « Les premiers résultats sont encourageants pour l'implantation du parc. J'espère que le taux de satisfaction global (sur les deux communes) sera d'au moins 75 % ».

Le maire doit-il réellement espérer un tel taux de satisfaction global s'il souhaite que le parc s'implante ? Commenter.

15-c : La fête du vélo (ES)

Fabrice et Loïc ont participé avec des amis, en juin 2005, à la fête du vélo sur la levée de la Loire.

Le groupe est parti d'Angers et a parcouru à la vitesse de 18 km.h^{-1} la première partie du trajet, qui représente les trois cinquièmes du trajet total.

Le groupe s'est ensuite scindé en deux :

Loïc a pris la tête d'un groupe qui a parcouru la deuxième partie du trajet à la vitesse de 13 km.h^{-1}.

Fabrice, avec le reste de leurs amis, s'est arrêté pour manger des fouées (pains cuits au feu de bois et garnis de rillettes ou de fromage ou de chocolat). La pause a duré le sixième du temps mis par Loïc pour parcourir la deuxième partie du trajet. Le groupe mené par Fabrice est ensuite reparti et est arrivé en même temps que celui mené par Loïc.

Quelle est la vitesse moyenne de Loïc sur l'ensemble du trajet ?

La comparer à la vitesse moyenne de Fabrice lorsqu'il a parcouru la deuxième partie du trajet.

En juin 2005, à la fois membres d'un club de vélo et amateurs non adhérents à un club participaient à cette fête du vélo. La fête a rencontré un vif succès et les organisateurs prévoient pour juin 2006 une augmentation de 2% des participants appartenant à un club de vélo et une augmentation de 8% des participants amateurs. Si cela se réalisait, le nombre de participants à la fête du vélo augmenterait au total de 6%.

Quelle était la répartition des participants (entre membres d'un club et amateurs) en juin 2005

15-d : Les truites (ES)

Un pisciculteur propose un jeu à cinq de ses clients.

Il les autorise à aller pêcher des truites autour de son étang pendant une heure mais en leur imposant un règlement très particulier.

* Les pêcheurs ne doivent pas communiquer entre eux ;

* Le nombre de poissons pêchés par chacun d'entre eux ne doit pas être un multiple de cinq.

A la fin du temps réglementaire chacun rapporte ses poissons dans un panier et annonce au pisciculteur le nombre de prises.

Après réflexion, si le pisciculteur réussit, en vidant au moins deux paniers, à répartir leur contenu en cinq parts égales alors les pêcheurs pourront emporter chacun une de ces parts ; le pisciculteur quant à lui gardera les truites des paniers non vidés.

Les pêcheurs risquent-ils de rentrer chez eux bredouilles ?

Corrections : http://www.ac-nantes.fr:8080/peda/disc/math/Maths_Plaisir/Olympiades/sujets/sujets.htm

16. Orléans-Tours

16-a : Pentagone

ABC est un triangle isocèle (AB = AC) dont l'angle $\widehat{A}$ est obtus $\frac{\pi}{2} < \widehat{A} < \pi$. On prendra AB = 8 cm.

Toutes les constructions demandées se feront à la règle et au compas. On laissera apparentes les constructions intermédiaires.

1. Sur votre feuille, compléter le triangle ABC par deux points D , E de telle sorte que AB=BD=DE=EC, que la figure ABDEC admette pour axe de symétrie la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et que les points D et A ne soient pas du même côté de la droite (BC).

2. En déduire la construction d'un pentagone AMNPQ dont les 5 côtés ont la même longueur et tel que le point M appartienne au segment [AB], les points N et P apartiennent au segment [BC] et le point Q appartienne au segment [CA]. On expliquera et justifiera le construction.

3. On suppose que le pentagone ABDEC de la question 1. est régulier. Quelle est la valeur nécessaire de l'angle $\widehat{A}$? On note β cette valeur et on pose $\alpha = \frac{\beta}{3}$.

a. Montrer que cet angle α est égal à l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABC, et qu'il vérifie :

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} + \cos(2\alpha)$$

b. On suppose que $\widehat{A} = \beta$. Démontrer que le pentagone ABDEC est régulier

16-b : Ecriture décimale

On rappelle qu'en écriture décimale le nombre A = 3457 se « déchiffre » par l'égalité

$$A = 3.10^3 + 4.10^2 + 5.10^1 + 7$$

Pour chaque entier $n > 0$, on note R_n le reste de la division euclidienne de 10^n par 7, c'est à dire l'unique entier R_n satisfaisant à $10^n = 7q + R_n$ et $0 < R_n < 7$, q étant un entier.

1. Calculer R_n pour tous les entiers $n < 7$.

2. On indique que $R_{24} = 1$. En déduire simplement R_{25} puis R_{26}, R_{27}, etc. jusqu' à R_{31}.

Exprimer alors simplement R_n pour toute valeur n.

3. Soit a un entier et x l'entier $a.10^n$.

Démonter que le reste de la division de x par 7 est le même que celui de la division par 7 du nombre $a.R_n$

4. Déterminer les deux plus petites valeurs de n telles que le nombre entier $3.10^n - 1$ soit divisible par 7.

5. A tout entier N on associe un nombre $f(N)$ de la manière suivante : à partir de l'écriture décimale de N, on retire son premier chiffre et on le place à la fin de l'écriture obtenue.

Par exemple, si $N = 3547$ alors $f(N) = 5473$ ou si $N = 10$ alors $f(N) = 01 = 1$. On suppose que l'écriture décimale de N est $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0$. (Les entiers a_k sont les chiffres du nombre N.)

a. Montrer que N peut s'écrire $10^n\, a_n + B$ où B est un nombre entier dont on précisera l'écriture décimale et que $f(N)$ s'écrit $10B + a_n$.

b. En déduire les deux plus petits nombres entiers N tels que $f(N) = 3N$.

Corrigés http://www.ac-orleans-tours.fr/maths-1/olympiades/default.htm

17. Paris

17-a : Chocs de billes

Dans un tube fermé d'extrémités S et T de longueur L, sont placées 3 billes B_1, B_2 et B_3 qui ne peuvent s'entrechoquer en glissant dans un sens ou dans l'autre à l'intérieur du tube.

A l'instant $t = 0$,

- La bille B_1 est en S et est lancée vers T à une vitesse v telle qu'elle parcourt la distance L en 1 minute.

- La bille B_2 est en T et est lancée vers S avec la même vitesse.

- La bille B_3 est placée, sans vitesse initiale, en un point A du tube tel que SA = (1/3)ST.

Lorsqu'il y a choc entre 2 billes, elles repartent chacune en sens opposé toujours avec la même vitesse v.

Lorsqu'une bille arrive en S ou en T, elle repart en sens inverse toujours avec la même vitesse.

On assimilera les billes à des points, on supposera qu'il n'y a aucun frottement et que les billes sont animées de la même vitesse dans un sens ou dans l'autre.

La bille B_3 est frappée alternativement par B_1 et par B_2, et circule dans le tube à la vitesse v.

1. Après 2006 chocs, combien de fois B_3 est-elle passée par le point A ?

2. Après 2006 chocs combien de fois la bille B_3 a-t-elle été frappé en A ?

3. Quelle est la distance parcourue par la bille B_3 entre le 1^er^ choc et le 2006^ème^ choc ?

17-b : Cartes rangées

2006 cartes sont numérotées de 1 à 2006. Elles sont mélangées et empilées. La carte au sommet de la pile est placée sur la table, la suivante est placée sous la pile.

Puis la carte suivante sur la pile est placée sur la table à droite de la carte précédemment posée et la carte suivante sous la pile.

On continue ainsi jusqu'à ce que toutes les cartes soient alignées sur la table.

On constate que les cartes sont alignées (de gauche à droite) dans l'ordre 1, 2, ..., 2005, 2006.

Au départ, combien de cartes étaient-elles empilées au-dessous de la carte 2005 ?

18. Reims

18-a : Economies

L'année de ses 20 ans, un capitaine de navire commence à économiser 100 euros le premier de chaque mois dès le mois de janvier. Il essaie d'économiser chque année 10 euros de plus par mois que l'année précédente. Cependant il s'est retrouvé au chômage une année entière coïncidant avec une année civile.(Il n'a donc alors pas pu économiser).

De plus, l'année de reprise, il n'a pas pu mettre sur son compte épargne plus que l'année précédant son chômage.

Le 31 décembre 2047, il s'achète un bateau. Pour cela, il a besoin de tout l'argent qu'il a sur son compte d'épargne. Celui-ci atteint un montant de 33 000 euros.

- Quel est l'âge du capitaine en 2047 ?

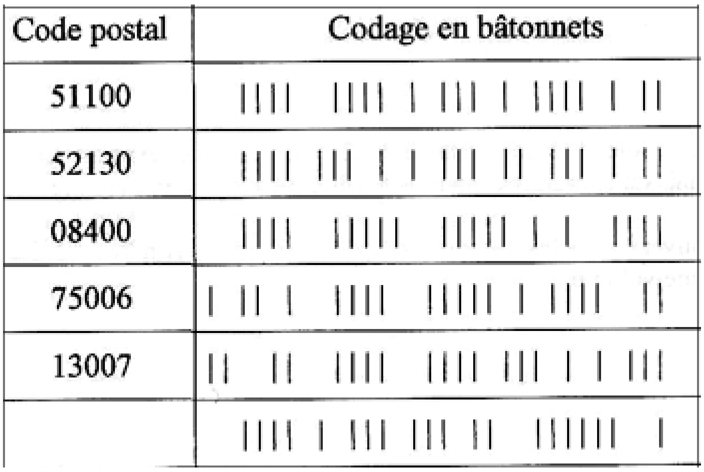
- A quel âge a-t-il été au chômage ?

18-b : Code postal

Sur le courrier que vous recevez par la poste, vous avez peut-être remarqué une série de bâtonets de couleur orange inscrits en bas à droite des enveloppes.

Il s'agit en fait d'un codage du code postal utilisé pour le tri automatique du courrier.

Le tableau ci-dessous vous montre 5 exemples de code postal avec leur codage en bâtonnets. Examinez les attentivement afin de trouver quel est le code postal représenté par la dernière série de bâtonnets.



Code postal	Codage en bâtonnets
51100	
52130	
08400	
75006	
13007	

19. Rennes

19-a : Les boules dans la boite

Pour les candidats de la série S / STI

A - On dispose de deux boules de rayon r que l'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale carrée et de hauteur $2r$. On admettra que dans ces conditions les deux boules sont en contact et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

1. Déterminer en fonction de r les dimensions de la boîte.

2. Dans le cas où $r = 2$, réaliser une construction à la règle et au compas du côté de la boîte.

B - On dispose de trois boules de rayon r qu'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale triangulaire équilatérale et de hauteur $2r$. On admettra que dans ces conditions les trois boules sont en contact deux à deux et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

1. Déterminer la longueur du côté de cette boîte.

2. Dans le cas où $r = 2$, exprimer la longueur du côté sous une forme exacte non trigonométrique ne contenant que des racines carrées puis sous une forme approchée à 10^{-2} près.

On rappelle la formule : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$

3. Á partir d'un triangle équilatéral dont le côté a pour valeur approchée en centimètres celle trouvée dans la question précédente, réaliser une construction vue de dessus à la règle et au compas de la boîte et des trois boules qu'elle contient. *On fera figurer les traits de construction sur la figure.*

19-b : Gogoland

Pour les candidats de la série S / STI

Dans le Gogoland, les mathématiciens ne disposent pas des mêmes opérations que nous, l'opération de base s'écrit Δ. Pour deux nombres a et b (b $\neq$ 0), le calcul $a \Delta b$ au Gogoland correspond chez nous au calcul $1-\dfrac{a}{b}$.

On écrira donc que $a \Delta b = 1 - \frac{a}{b}$ en notant bien que l'opération indiquée à droite du signe = n'est pas lisible au Gogoland.

1. Résoudre dans notre système les équations $a \Delta b = 0$ et $a \Delta b = 1$.
2. Quels sont nos résultats produits par les calculs gogolandais suivants : $a \Delta 1$ et $1 \Delta b$?
3. L'opération Δ est-elle commutative, c'est à dire : a-t-on pour tous nombres a et b non nuls

« $a \Delta b = b \Delta a$ » ?

4. Quels résultats produisent pour nous $(a \Delta b) \Delta a$ puis $a \Delta (b \Delta a)$ pour a et b non nuls et différents.
5. En simplifiant dans notre système l'expression $1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right)$ déduire le calcul gogolandais qui produit notre quotient $\frac{a}{b}$. Préciser alors quel calcul donne l'expression $\frac{1}{b}$.
6. En conclusion montrer que les gogolandais ont à leur disposition toutes nos opérations.

19-c : La ferme olympique

Pour les candidats des séries autres que S / STI

Les cousins d'Olympe dirigent la ferme olympique. Ses grand-mères maternelle et paternelle ont eu chacune trois enfants qui ont eu chacun trois enfants.

Cinq cousins d'Olympe vont à la foire du bourg. Ils veulent se peser à la bascule à bestiaux mais celle-ci ne fonctionne qu'à partir de 100 kg. Que faire ?

Olympio, le plus malin des cinq, a une idée. Il propose de se peser deux par deux avec toutes les possibilités. Les dix résultats obtenus sont :

110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 et 121.

Dans le poulailler de la ferme olympique 3 poules pondent 3 oeufs en 3 jours.

Les lapins installés juste à coté prolifèrent bien plus. Au début de l'année, il y avait un seul couple de lapins et chaque couple de lapins se reproduit au rythme de six naissances tous les trois mois (trois mâles et trois femelles).

Les vaches sont de deux sortes, des blondes au nombre de six et cinq Holstein. Au total six + cinq = onze.

Enfin, le coffre de la ferme est protégé par une combinaison donnée par un code secret. Il est obtenu en remplaçant les lettres du mot Scipion par des chiffres.

1. Combien Olympe a-t-elle de cousins ou cousines ?
2. Quel est le poids des cinq cousins ?
3. Combien d'œufs pondent vingt-sept poules en vingt-sept jours ?
4. Combien y aura-t-il de lapins dans la ferme au bout d'un an ?
5. L'opération qui donne le nombre de vaches est cryptée. Chaque lettre remplace un chiffre toujours le même et deux lettres différentes remplacent deux chiffres différents. En décryptant cette addition et en choisissant la plus petite valeur pour S vous aurez accès au coffre de la ferme car vous aurez trouvé le code secret !!!!

19-d : Les mauvais garçons

Pour les candidats des séries autres que S / STI

Deux mauvais garçons, Nick O'Catane et Jack O'Gadol ont décidé de dévaliser la succursale de Francfort de la banque P.I.L.M.

Leur informateur Monsieur Hans Labal, vieux truand de 72 ans, leur a donné le code à six chiffres du coffre sur un papier en leur faisant remarquer que ce nombre était un multiple de son âge.

Malencontreusement Nick a partiellement brûlé ce papier avec sa cigarette et voilà nos deux malfrats avec une écriture 53●41● où ● représente un trou de cigarette.

Nick est désespéré mais Jack lui dit : ne t'inquiète pas, je sais comment reconstituer le code. Comment va-t-il faire pour retrouver les chiffres compris entre 0 et 9 qui ont été brûlés ?

Corrections : http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/maths/gfrmjeux.htm

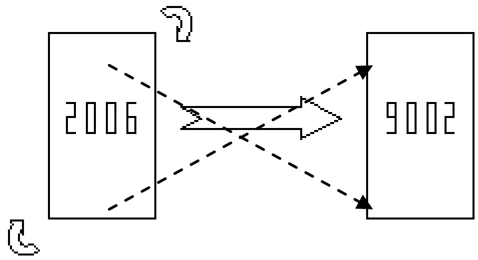
20. Rouen

20-a : Exercice 3 (tous)

Les nombres entiers naturels sont formés à partir des dix chiffres suivants obtenus par combinaison de sept segments, conformément à l'affichage digital usuel :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

On écrit un nombre entier, noté a, sur une feuille. On fait pivoter la feuille de telle sorte que le haut et le bas de la feuille s'échangent, comme l'illustre le schéma suivant



Si sur la feuille ainsi pivotée on peut lire de nouveau un nombre entier noté b, alors le nombre a écrit initialement sur la feuille est dit « pivotable », et le nombre b est dit « pivoté » de a.

Par exemple :

90	est pivotable et son pivoté est	06	
57	n'est pas pivotable car	L5	n'est pas l'écriture d'un entier.
2006	est pivotable et son pivoté est	9002	

Quel est le 2006ème nombre entier pivotable ?

20-b : Exercice 4 (autres séries que S)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x)=\dfrac{x+x^2+...+x^n}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+...+\dfrac{1}{x^n}}$.

1. Calculer $f_2(2)$, $f_3(2)$, $f_4(3)$. On cherchera à donner le résultat sous la forme d'une puissance d'un nombre entier le plus petit possible.

2. Donner la valeur exacte de $f_{2005}(2006)$.

20-c : Exercice 3 (S uniquement)

L'unité de longueur est le décimètre. On construit un rectangle ABCD et un triangle équilatéral DEF tels que :

* A et E sont fixes avec AE=1,

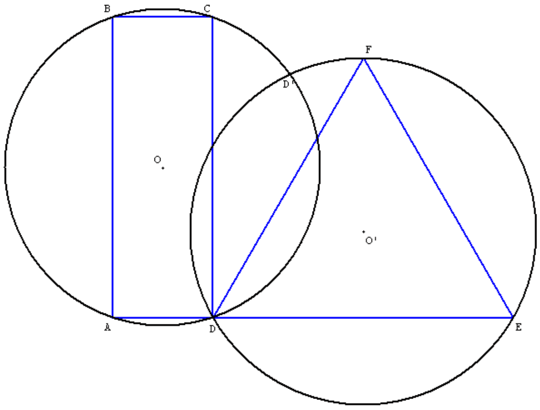
* D est un point mobile du segment [AE],

* le périmètre du rectangle ABCD est 2.

(Les points B, C et F sont situés dans le même demi-plan, délimité par la droite (AE), comme sur la figure ci-dessous). On introduit :

(C) le cercle circonscrit au rectangle ABCD, de centre noté O, (C’) le cercle circonscrit au triangle DEF, de centre noté O’.

Les cercles (C) et (C’) se coupent en D et en un autre point D’, (supposé distinct de D dans la suite).



On pose x = DE. La figure a été construite avec x = 0,75.

1. Construire la figure avec x = 0,6.
2. Pour quelle(s) position(s) du point D le rectangle ABCD et le triangle DEF ont-ils la même aire ?
3. Pour quelle valeur de x le quadrilatère ODO’D’ est- il un losange ?
4. Montrer que, pour la valeur de x trouvée à la question 3, le losange ODO’D’ est un carré.

Correction partielle : http://maths.ac-rouen.fr/IMG/doc/Olympiades_2006_S-_STI_b.doc

21. Strasbourg

21-a : Cartes

Pour les besoins d’un jeu, un imprimeur fait imprimer des cartes. Sur chaque carte figure un nombre entier compris entre 100 et 999. Le 1 est imprimé « I ».

Il remarque que certaines cartes permettent de lire deux entiers selon qu’on les oriente dans un sens ou dans l’autre. Par exemple, I09 se lira 60I en retournant la carte.

Dans un tel cas, par mesure d’économie, il n’imprime qu’une carte au lieu de deux.

Combien de cartes doit-il imprimer en tout pour que tous les entiers compris entre 100 et 999 soient ainsi représentés ?

21-b : Fractions

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $\dfrac{9n-16}{n^2+4}$ soit un entier naturel.

2. Déterminer les entiers naturels n tels que $\dfrac{n^3-5n+16}{n^2+4}$ soit un entier naturel.

22. Toulouse

22-a : L’incorruptible est-il honnête ?

Dans un certain état a eu lieu un scrutin parlementaire d’une grande importance.

Alors que le parti P_1 l’a emporté d’une voix sur le parti P_2, certains journalistes écrivent que Monsieur I, surnommé « l’incorruptible », membre du parti P_2, a voté P_1, après que le parti P_1 lui a offert une confortable somme d’argent.

Une enquête est ouverte : on interroge quatre parlementaires du parti P_1, en posant deux questions à chacun, et l’on sait que chacun des quatre a dit une fois la vérité et menti une fois.

Voici les quatre dépositions :

M.A : aucun de nous n'est le trésorier des fonds secrets du parti. M.I a reçu l'argent de M.B qui le tenait de M.D.

M.B : l'argent a été reçu par M.I. M.I est le trésorier des fonds secrets.

M.C : la deuxième réponse de M.A est vraie. La deuxième réponse de M.B est vraie.

M.D : M.I n'a pas reçu d'argent de notre parti. Je le sais puisque je suis le trésorier des fonds secrets.

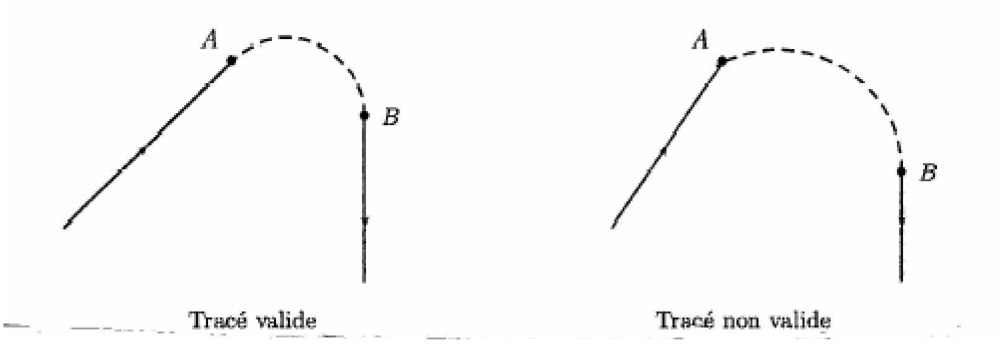
Questions :

M.I a-t-il été corrompu par le parti P_1, et dans ce cas, qui lui a remis l'argent ?

L'un des quatre parlementaires qui ont déposé est-il le trésorier des fonds secrets du parti P_1, et si oui, lequel ?

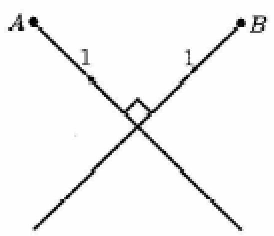
22-b : Tracé de route

L'objectif est de raccorder des portions de route rectilignes à sens unique par des virages en arcs de cercles. Bien sûr, pour être roulable, le trajet obtenu doit être « lissé », c'est à dire sans point anguleux !



Les nombres indiqués sur certains des tracés proposés représetent des distances en centaines de mètres. Dans tous les tracés, on devra relier le point A au point B à l'aide d'arcs de cercle et uniquement d'arcs de cercle.

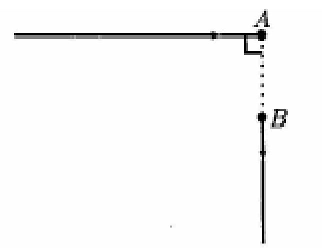
Exemple : le tracé T_1



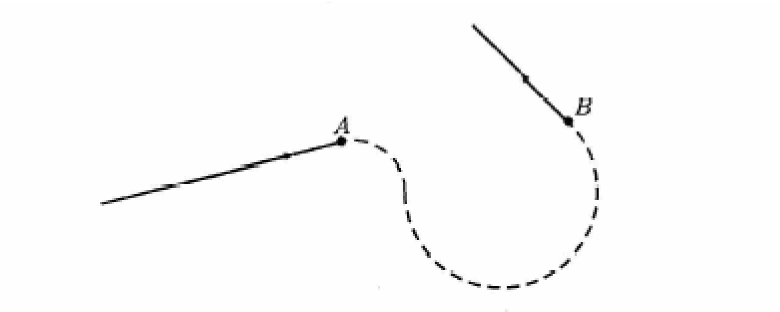
1. On essaie de tracer un virage joignant A et B à l'aide d'un seul arc de cercle.

a. Décrire et représenter une solution convenable pour relier A et B dans T_1 et calculer la longueur du virage.

b. Existe-t-il un virage à un seul arc pour le tracé T_2 ci-dessous ? Justifier la réponse.



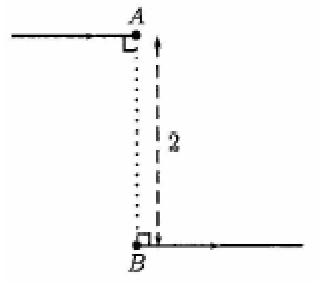
2. On utilise maintenant, si l'on veut, deux arcs de cercles contigüs ; mais bien sûr, le tracé doit toujours être « lissé ».



a. Comment obtenir deux solutions à deux arcs contigüs et de même rayon pour le tracé T_2 ?

b. On considère enfin le tracé T3 ci-dessous. Existe-t-il une solution avec un seul arc de cercle ?

Construire plusieurs solutions avec deux arcs contigüs et comparer les longueurs totales des virages



23. Versailles

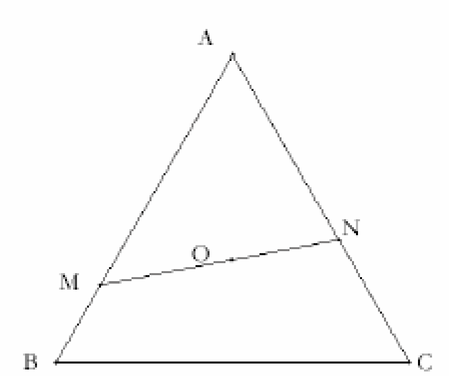
23-a : Triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre O.

On considère un point M du segment [AB]. On pose x = AM. Si les droites (MO) et (AC) sont sécantes, on appelle N leur point d'intersection.

1. Quel est l'ensemble I des réels x pour lesquels N appartient au segment [AC] ?

2. Pour tout x élément de I, on note $S(x)$ l'aire du triangle AMN. Quelles sont les valeurs minimale et maximale de $S(x)$?



23-b : Coloriages

On considère un polygone régulier convexe à 1 000 sommets, chacun étant coloré soit en rouge, soit en vert, soit en bleu. Une opération consiste à choisir deux sommets consécutifs n'ayant pas la même couleur et à les recolorer en attribuant à chacun la troisième couleur.

1. Prouver que, quelle que soit la coloration initiale et à l'aide d'un nombre fini d'opérations successives, il est possible de se ramener à une coloration des 1 000 sommets qui n'utilise pas plus de deux couleurs.

2. Un bloc est un ensemble de quatre sommets consécutifs. Si ces quatre sommets sont de la même couleur, on dit que le bloc est monochrome.

a. Prouver que tout bloc peut être transformé en un bloc monochrome à l'aide d'un nombre fini d'opérations, et ce, sans modifier la couleur des sommets qui ne sont pas dans le bloc considéré.

b. Prouver que, si deux blocs monochromes sans sommet commun sont consécutifs, on peut échanger leurs couleurs en un nombre fini d'opérations.

c. Prouver que l'on dispose sur les blocs monochromes d'une opération analogue à celle définie sur les sommets.

d. Prouver que, quelle que soit la coloration initiale et à l'aide d'un nombre fini d'opérations successives, il est possible de se ramener à une coloration des 1 000 sommets qui n'utilise qu'une seule couleur.

Correction : http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/olympiades.htm