Olympiades académiques de mathématiques

1. Quelques conseils

Les énoncés de type olympiades présentent un certain nombre de différences avec les énoncés de type traditionnel :

- ils sont souvent très brefs ;

Par combien de 0 se termine l'écriture décimale du produit des entiers successifs de 1 à 100 compris?

- ou au contraire assez longs parce que la situation à décrire l'exige, sans que cela soit nécessairement un indice de complexité ;

- la nature de ce qui constitue une réponse n'est pas ambigüe mais elle peut être nouvelle :

Par pliage d'une feuille A4, fabriquer un hexagone régulier.

- le problème peut être mathématiquement mal posé, au sens où il peut admettre plusieurs solutions ou pas de solution, ou pas de solution exacte mais seulement une solution approchée ; les hypothèses fournies ne sont pas nécessairement suffisantes pour répondre et celui qui cherche doit introduire par exemple une modélisation du «système» étudié.

Une bobine de film de $\frac{1}{10}$ *de millimètre d'épaisseur mesure 20 centimètres de rayon ; quelle est la longueur du film ?*

- ils donnent envie d'être cherchés car ils sont souvent surprenants ; qu'on puisse fournir une réponse à la question posée étonne :

Résoudre l'équation $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cfrac{}{1+\cfrac{1}{1+x}}}}=x$ *(2002 barres de fractions).*

- ils sont plutôt à questions ouvertes, c'est-à-dire que la réponse n'est pas fournie dans la question ;

Quelle distance maximum peut-on parcourir avec une voiture disposant de sept pneus neufs, sachant que chaque pneu peut faire 40 000 km ?

- ils permettent d'expérimenter, tâtonner, conjecturer; les raisonnements utilisés sont plutôt de nature inductive :

On dispose de 10 pièces et d'une balance à plateaux. Sur les 10 pièces, une seule est de poids différent des 9 autres. Combien faut-il au minimum de pesées pour trouver cette pièce ?

ou bien :

En combien de morceaux au maximum peut-on partager une feuille de papier (format A4) en n coups de ciseaux ?

- ils autorisent la mise en oeuvre d'une méthode générale de **recherche** (examen d'un cas particulier, examen d'une version simplifiée du problème, analyse-synthèse ...) :

Soit $f(x)=1-2x^2$ *; saurez-vous déterminer le sens de variation de* $f\circ f\circ f....\circ f$ *(2002 fois f) entre* -1 *et 1 ¿*

ou bien :

Saurez-vous découper un rectangle de dimension 5 x 1 en quatre morceaux de façon à pouvoir faire un carré avec ces morceaux ¿

- ils evitent de reposer sur une astuce introuvable ou sur des connaissances d'un niveau supérieur :

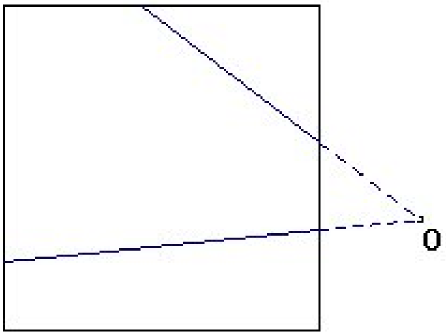
Trouver la partie entière de $\sum_{k=1}^{2^{2002}} \sqrt[2002]{k}$.

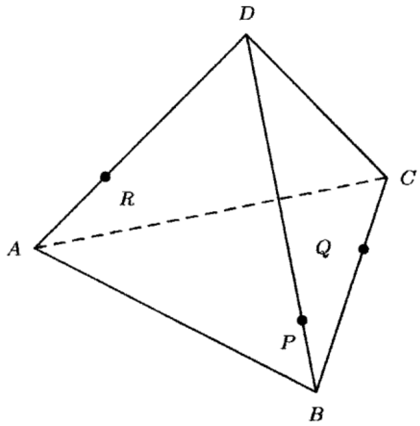
- a contrario, ils peuvent ne nécessiter aucune connaissance mathématique particulière ;

En utilisant, une seule fois chacun des mots un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent, mille, million, milliard, quel est le nom du plus grand nombre que l'on puisse former ¿

- être générateur de nouveaux problèmes, être susceptible de généralisations ; par exemple les problèmes de géométrie avec une contrainte sur l'espace de dessin autorisé :

Construire la bissectrice de l'angle xOy sans sortir de la feuille (le sommet O n'est pas sur la feuille).





Construire les intersections du plan PQR et des faces du tétraèdre ABCD sans sortir du quadrilatère ABCD.

- avoir un fond mathématique riche, par exemple avec les problèmes d'arithmétique :

Quels sont les entiers n tels que $\sqrt{n}$ *soit rationnel ¿*

- posséder un certain caractère esthétique, avec la naturelle subjectivité que cela peut revêtir.

Au contraire d'un sujet de devoir, un sujet d'olympiade peut comporter des ambiguités, autoriser des lectures diverses; cela fait partie du problème. Au candidat de préciser sa lecture de l'énoncé.

Les productions de recherche d'une olympiade ne sont pas destinées à être notées mais à être appréciées au regard de divers critères difficilement quantifiables :

- compréhension du problème, pistes de recherche explorées, essais divers y compris les essais infructueux, expériences à la calculatrice, représentations imaginées y compris si elles n'ont pas été fructueuses, solution partielle, approchée, esthétique d'une figure de géométrie, élégance d'une solution, originalité d'une idée...

C'est ainsi que pour la première édition des olympiades le jury académique a été attentif :

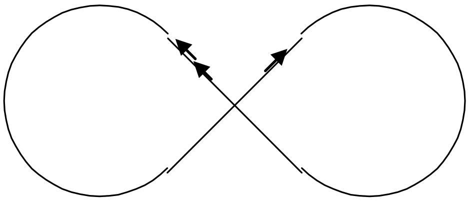
- aux pistes de solutions proposées par les candidats,
- à leurs explorations par étude de cas particuliers ou par approches graphiques.

Il est donc vivement conseillé de rendre toute production, même si elle semble partielle, incomplète, et ne constitue pas une solution.

2. Exercices communs

2-a : Le lièvre et la tortue

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).

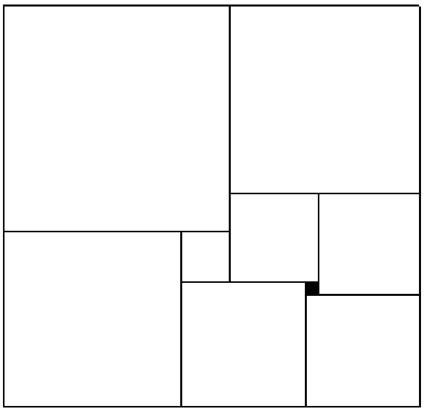
Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour) hormis le départ, le lièvre abandonne.

Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

2-b : Un pavage

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité. Quelles sont les dimensions du rectangle ?



http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/suj2005/solution.pdf

3. Amiens

3-a : Arithmétique ?

On considère trois réels positifs tels que, pour chaque paire choisie, le différence entre la somme de ces deux réels et le réel restant soit positive. Prouver que le produit de ces trois différences est inférieur ou égal au produit des trois nombres.

3-b : L'ombre

La figure 1 représente une fenêtre éclairée par le soleil. Tracer son ombre sur le plancher (l'ombre du coin inférieur gauche est donnée). La figure 2 représente la même fenêtre aclairée cette fois par un lampadaire.

Tracer son ombre sur le plancher (l'ombre du bord inférieur est donnée.

figure 1 : fenêtre éclairée par le soleil
A' est l'ombre du point A

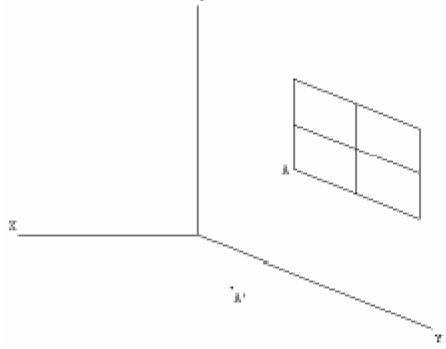
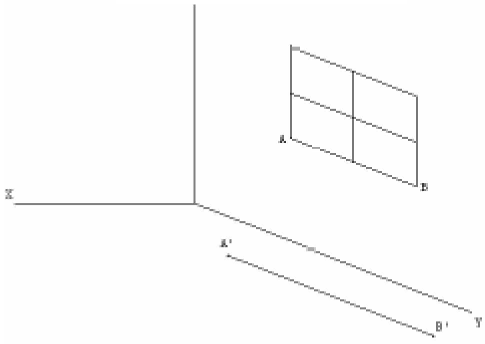


figure 2 : fenêtre éclairée par le lampadaire
A' est l'ombre du point A
B' est l'ombre du point B



http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/enigmes/default.htm

4. Besançon

4-a : Un libraire expert en comptabilité.

Un ami libraire avait acheté un stock de stylos par lots de 5 et avait pu obtenir un bon rabais en achetant le même nombre de stylos plumes. Il avait acheté 5€ le lot de 5 stylos et 20 € le lot de 5 stylos plumes.

Il les revendit à l'unité en faisant un bénéfice de 20% sur chaque stylo vendu et de 25% sur chaque stylo plume.

Un soir en faisant le bilan de son stock et sa comptabilité, il se rendit compte qu'il était exactement rentré dans ses frais alors qu'il lui restait 504 pièces en stock dont peu de stylos, en tout cas moins de cinquante.

Combien de stylos avait-il acheté à son fournisseur ?

4-b : Le parc du château.

1- Trois points distincts A, B, C sont situés à l'intérieur d'un carré de côté de longueur a. On veut démontrer que l'aire du triangle (A,B,C) est inférieure ou égale à $a^2/2$.

a. Démontrer ce résultat dans le cas particulier où le côté [BC] du triangle est parallèle à un des côtés du carré.

b. Démontrer le résultat dans le cas général (on pourra s'aider du cas particulier).

2- Le parc d'un château occupe une surface carrée de 120 m de côté. Dans ce parc sont plantés 73 arbres.

a. Montrer que trois des arbres sont les sommets d'un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 m².

b. Le châtelain souhaite construire une fontaine de telle sorte que celle-ci soit située à moins de 15 m de trois arbres de son parc.

Est-ce possible ? Justifier.

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm

5. Bordeaux

5-a : Distances

Quatre maisons sont situées aux quatre coins d'un carré de côté 1. On souhaite construire un réseau routier qui permet de relier les maisons mais on veut que ce réseau soit le plus court possible.

1. Dans un premier temps, on envisage de créer un rond-point à l'intérieur du carré comme dessiné sur la figure 1.

Démontrer que dans ce cas, le réseau le plus court est obtenu lorsque le rond point est situé au centre du carré.

2. Un des habitants s'est rendu compte qu'avec deux ronds-points placés comme sur la figure 2, on pouvait réduire la longueur du réseau. Vérifier qu'il a raison.

3. Trouver la valeur de x qui permet d'obtenir le réseau le plus court dans la configuration de la figure 3.

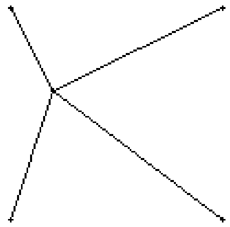


figure 1

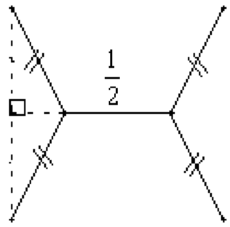


figure 2

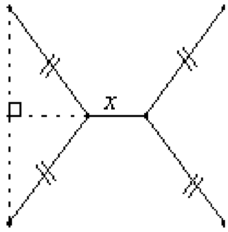


figure 3

5-b : Triangles

Première question

Démontrer que dans un triangle ABC, si on note p le périmètre et r le rayon du cercle inscrit, alors l'aire S du triangle est donnée par : $S = r \times \frac{p}{2}$.

Deuxième question

Une unité de longueur étant choisie, on appelle triangle *académique* un triangle dont les mesures des côtés sont en progression arithmétique de raison 1.

Dans tout l'exercice, on considère un triangle ABC tel que $AB < AC < BC$.

Ainsi, un tel triangle est *académique* si : $AC = AB + 1$ et $BC = AB + 2$.

1. On note I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et D le pied de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$.

Démontrer que si ABC est *académique* alors $BD = 3ID$.

2. Un triangle *académique* peut-il être rectangle ? Justifier. Quelles sont alors ses dimensions ?

3. On suppose que le triangle ABC est *académique* et que $AB > 3$.

Démontrer que les trois angles du triangle ABC sont aigus et qu'un seul d'entre eux a une mesure supérieure à 60°.

6. Caen

6-a : Les dés

On dispose de dés cubiques portant sur leurs faces les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, tous identiques à celui du dessin ci-contre.

On rappelle que les dés sont toujours construits de telle sorte que deux faces opposées portent des nombres dont la somme est égale à 7.

<u>Attention</u> : le dé ci-contre à gauche n'est pas identique au précédent et ne pourra pas être utilisé dans l'exercice. En revanche, pour la facilité du dessin, l'orientation des chiffres sur les faces est sans importance ; le dé ci-contre à droite, par exemple, sera considéré comme identique au premier.

On fabrique des assemblages de dés en les accolant face contre face et en respectant toujours la règle suivante :

« *Lorsque deux dés sont accolés, les faces de contact entre les deux dés portent toujours le même nombre.* »

<u>Dans cet exercice, des dessins soigneusement réalisés pourront être considérés comme une justification</u>

suffisante.

1. Peut-on réaliser une configuration de quatre dés, posés sur une table, accolés en carré, et portant chacun le nombre 6 sur sa face supérieure ?

2. a. Montrer que la configuration de quatre dés posés sur une table présentée ci-contre est réalisable.

Quelle est la somme des nombres portés par les faces visibles des quatre dés ? (Il s'agit de toutes les faces visibles et non pas seulement des faces visibles sur le dessin ci-contre).

b. Montrer qu'on ne peut pas accoler en carré quatre dés posés sur une table de telle sorte que les faces visibles ne portent que les nombres 4, 5 et 6.

c. En déduire la somme maximum des nombres portés par les faces visibles de quatre dés posés sur une table et accolés en carré.

d. Avec 8 dés accolés, on forme un cube. Déduire de la question précédente la somme maximum des nombres apparaissant sur les 6 faces du cube.

6-b : Le quadrilatère des mi-chemins

Soit ABCD un carré.

1. Construire E, F, G, H tels que E soit le milieu de [AH], F celui de [BE], G celui de [CF] et H celui de [DG] en indiquant clairement la méthode utilisée. Préciser la nature du quadrilatère EFGH.

2. Calculer $\dfrac{\text{aire(EFGH)}}{\text{aire(ABCD)}}$.

http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/maths/olympiad/olympiad05/sujets05.htm

7. Corse

7-a : Un placement

J'avais décidé de faire des économies et pour cela j'avais prévu de déposer chaque mois 100 euros sur un compte en banque, le capital total déposé étant rémunéré chaque mois à un taux mensuel de 0,4152 %.

J'avais décidé de faire 120 dépôts et de récupérer mes économies 120 mois après mon premier versement. Malheureusement, des difficultés financières ne m'ont pas permis des économies constantes et, pendant 15 mois consécutifs je n'ai rien versé sur mon compte.

Pour tous les autres mois, le versement a toujours été de 100 euros.

Au bout de 120 mois de placement, cela a représenté une perte d'environ 2005 euros, par rapport au plan que j'avais initialement prévu.

a. Quel capital aurais-je dû récupérer au bout des 120 mois si je n'avais pas eu des difficultés financières?

b. Déterminer quels sont les mois pendant lesquels je n'ai pas versé les 100 euros.

7-b : Le billard

Un billard est constitué d'un plateau rectangulaire de longueur L et largeur l.

La boule de billard qui se trouve en un point A du billard, suit, après avoir été frappée, une trajectoire en ricochant sur les bords du plateau.

On dira que la trajectoire est « parfaite » si la boule revient à son point de départ en suivant un quadrilatère dont les sommets sont des points situés sur les bords du plateau. Dans cette question on considère que le joueur n'a pas donné à la boule d'effet spécial et que le rebond sur chaque bord du plateau se fait symétriquement à la perpendiculaire au point de contact, comme indiqué sur la figure ci-dessous (*pas trouvé la figure*).

a. Démontrer qu'une trajectoire parfaite est nécessairement un parallélogramme.

b. Pour tout point A non situé au centre ou sur un bord du plateau, déterminer en le justifiant, le nombre de trajectoires parfaites passant par A.

c. Démontrer que toutes les trajectoires parfaites ont la même longueur.

8. Créteil

2 exercices au choix sur les 3

8-a : Des bulles de couleur

Dans un très grand récipient contenant de l'eau, on observe trois sortes de bulles colorées, les unes sont formées d'un gaz bleu, d'autres d'un gaz vert, la troisième catégorie d'un gaz jaune.

Ces bulles peuvent se cogner.

- Soit les deux bulles sont de la même couleur, il ne se passe rien, elles repartent chacune de leur côté

- Soit elles sont de couleurs différentes, tout dépend alors de leurs couleurs respectives :

- Si une bleue rencontre une verte, elles disparaissent toutes les deux et donnent naissance immédiatement à quatre bulles vertes.

- Si une bulle jaune et une bulle bleue se cognent, elles disparaissent toutes les deux et donnent naissance immédiatement à deux bulles vertes.

- Si la rencontre s'opère entre une jaune et une verte, elles disparaissent et donnent naissance immédiatement à trois bulles vertes.

1. On a dans le récipient deux bulles jaunes, une verte, deux bleues. Ecrire les états possibles du système des bulles après une seule rencontre.

Si les rencontres se font au hasard, y a-t-il plus de deux chances sur trois qu'il y ait au moins trois bulles vertes après cette unique rencontre ?

2. On suppose maintenant que, la composition en bulles dans le récipient, est telle qu'à un moment donné, la différence $n_v - n_j$ où n_v est le nombre de bulles vertes et n_j celui de bulles jaunes est égal à l'entier d.

a. Il se produit une nouvelle rencontre, que devient ce nombre ?

b. Au début de l'observation, on a dans le récipient 65 bulles jaunes, 26 bulles vertes et 35 bulles bleues.

Pourra-t-on après un nombre fini de rencontres, avoir autant de vertes que de jaunes ? Si oui en combien de rencontres au minimum ? au maximum ?

Même question en enlevant dès le début de l'observation une bulle jaune.

3. On suppose que le récipient contient suffisamment de bulles de chaque couleur pour que les rencontres de tous les types puissent avoir lieu à l'infini.

Donner tous les gains possibles de bulles vertes après tous les types de rencontres.

Quelles successions de rencontres donnent un gain de 12 bulles vertes ?

Même question pour un gain de N bulles vertes.

8-b : Les nombres ondulés

A. Si n est un nombre entier naturel tel que $0 < n < 10$, on appelle "nombre ondulé à n chiffres" un nombre entier naturel N satisfaisant aux conditions suivantes :

• son écriture décimale utilise n chiffres non nuls tous distincts

• si a, b, c sont trois chiffres apparaissant consécutivement dans cet ordre dans l'écriture décimale de N, alors, aucune des doubles inégalités $a < b < c$ et $a > b > c$ n'est vérifiée.

Si, de plus, les n chiffres apparaissant dans l'écriture de N sont tous les chiffres de 1 à n, on dit que N est un "nombre ondulé primitif".`

Exemples : Les nombres 1 ; 21 ; 132 et 4132 sont des nombres ondulés primitifs ; les nombres 4 ; 17 et 827 sont des nombres ondulés. Par contre, 4213 n'est pas un nombre ondulé, car on a 4 > 2 > 1.

1. Écrire tous les nombres ondulés primitifs à 1 chiffre, à 2 chiffres, à 3 chiffres et à 4 chiffres.

2. On désignera par P_n le nombre de nombres ondulés primitifs à n chiffres. Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4.

Combien existe-t-il de nombres ondulés à 4 chiffres construits avec 3, 5, 8 et 9 ? Qu'observe-t-on ?

3. Combien existe-t-il de nombres ondulés primitifs à 5 chiffres dont le premier chiffre est un "5" ? dont le deuxième chiffre est un "5" ? dont le troisième chiffre est un "5" ? dont le quatrième chiffre est un "5" ? dont le cinquième chiffre est un "5" ? En déduire P_5.

4. Établir une relation entre P_6 et P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5. Calculer P_6.

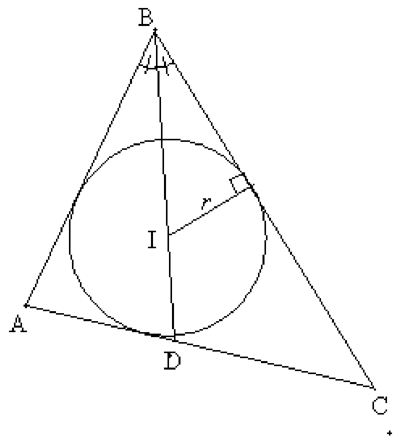
B. Dans cette partie, on s'autorise à utiliser le chiffre "0", l'écriture d'un nombre entier naturel non nul ne commençant jamais par un "0". On appelle "nombre ondulé primitif avec zéro" un nombre ondulé à n chiffres dont l'écriture utilise les n chiffres de 0 à $n-1$.

On désigne par Z_n le nombre de nombres ondulés primitifs à n chiffres avec zéro.

1. Déterminer Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4.

2. Si n est un nombre entier naturel strictement supérieur à 2, établir une relation entre Z_n, P_n et P_{n-1}.

3. Calculer Z_5 et Z_6.

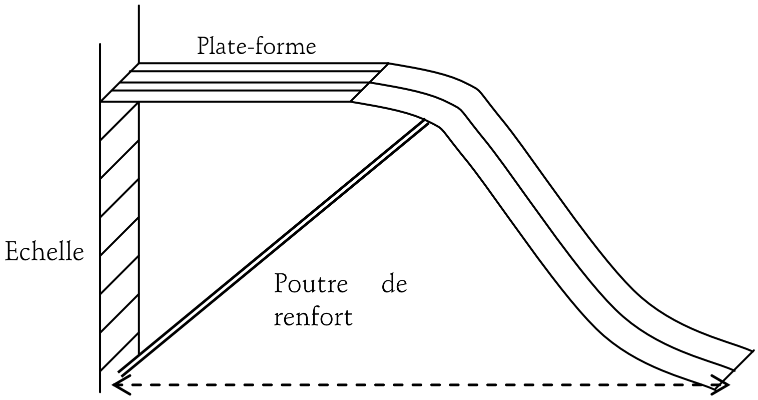


http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/viemaths/jeux/xjeux_mjc.htm

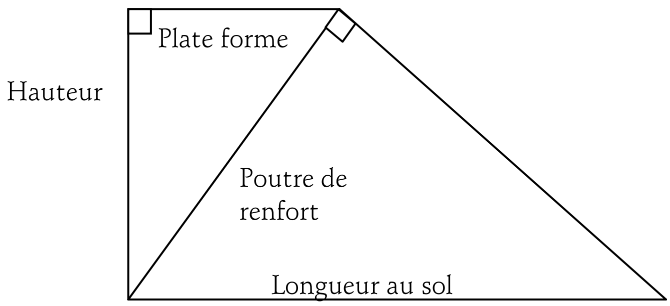
(avec des exercices supplémentaires)

8-c : Un parc d'attractions

On veut faire construire un toboggan selon le schéma suivant :



L'architecte se demande quelle sera la longueur exacte de la poutre de renfort afin que la plate-forme soit parallèle au sol. Pour cela il étudie le modèle géométrique du type suivant :



1ère Partie

Pour un toboggan de 20 mètres de haut et de 40 mètres de longueur au sol : faire une figure à l'échelle $\frac{1}{500}$; justifier que la longueur de la poutre est $20\sqrt{2}$ mètres.

2ème Partie

Le toboggan commandé par le parc d'attractions doit faire 12 mètres de haut et 30 mètres de longueur au sol.

1. En faisant une figure à l'échelle $\frac{1}{300}$, trouver géométriquement la (ou les) position(s) possible(s) du bout de la plate-forme.

2. On note x la longueur de la poutre. Trouver la mesure exacte de la poutre de renfort sachant que si la pente du toboggan excède 55°, il ne répond pas aux normes de sécurité.

9. Dijon

9-a : Horloge

Lorsqu'on observe les deux aiguilles d'une horloge, on constate qu'elles occupent au fil des heures, l'une par rapport à l'autre, des positions partuculières.

On se propose, dans cet exercice, d'étudier deux exemples de telles situations.

1. A minuit (0 heure) les deux aiguillles sont superposées. A quelle heure cette superposition se pro-duira-t-elle de nouveau:

a. pour la première fois ?

b. pour la seconde fois ?

c. pour la k^{ième} fois (k désigne un entier compris entre 1 et 11) Les réponses aux questions a et b seront arrondies a la seconde.

2. Lorsqu'il est environ 10 h 10' et que la bissectrice de l'angle formé par les deux aiguilles passe par la graduation "12", quelle heure est-il ? (La réponse sera arrondie à la seconde).

9-b : Samuel Marolois

A la question: "comment diviser un quadrilatère ABCD en trois parties de meme aire, en traçant deux droites passant par D ?", Samuel Marolois (1616) propose la réponse suivante:

"On place E au tiers de la diagonale [AC] et F aux deux tiers de cette même diagonale.

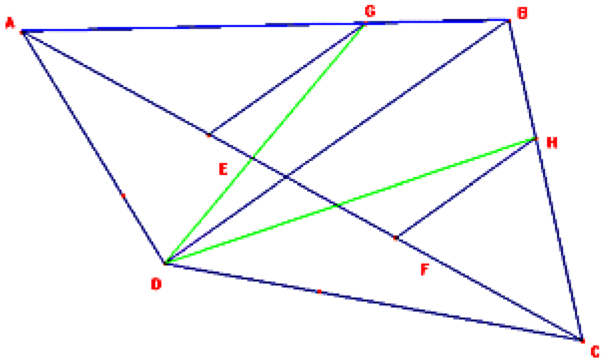
La parallele à (BD) passsant par E coupe [AB] en G et la parallèle à [BD] passant par F coupe [BC] en H.

Les deux droites cherchées sont (DG) et (DH)."

On se propose de vérifier cette affirmation dans le contexte de la figure ci-dessous

1. Démontrer que les quadrilatères DABE, DEBF et DFBC ont la meme aire.

2. En déduire que DAG, DHC et DGBH sont des polygones de meme aire.



http://webpublic.ac-dijon.fr/pedago/maths/olympiades/2005/accueil.htm

10. Antilles

10-a : Les médianes égales

Les nombres entiers a, b, c, ($a \leq b \leq c$), désignent les mesures des côtés d'un triangle de périmètre 15, ayant deux médianes de même longueur. (Une médiane est un segment joignant un sommet au milieu du côté opposé.) Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

10-b : Les années " pythagoriciennes "

Soit n un entier naturel, on dira que l'année n est "pythagoricienne" si on peut trouver deux années p et q la précédant, telles que les deux conditions suivantes soient remplies

- $n - p = p - q$
- le triangle de côtés n, p, q est un triangle rectangle.

1. Les années suivantes sont-elles "pythagoriciennes" :

a. l'année 5 ?

b. l'année 800 ?

c. l'année 1515 ?

d. cette année 2005 ?

2. Déterminer toutes les années "pythagoriciennes".

3. Quelle sera la prochaine année bissextile et "pythagoricienne"?

11. Lille

11-a : Et s'il n'en reste qu'un ?

L'organisateur d'un jeu décide de désigner le gagnant de la manière suivante :

les candidats, numérotés de 1 à 2005 sont disposés en cercle et rangés dans l'ordre de leur numéro et dans le sens des aiguilles d'une montre. Le jeu commence par le joueur n°1 qui dit « ***Gagné*** », puis le suivant dit « ***Perdu*** », et ainsi de suite en alternant les deux réponses. Tout candidat qui dit ***« Perdu »*** est éliminé et quitte le cercle. Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul joueur qui est le gagnant.

Quel est le numéro de ce gagnant ?

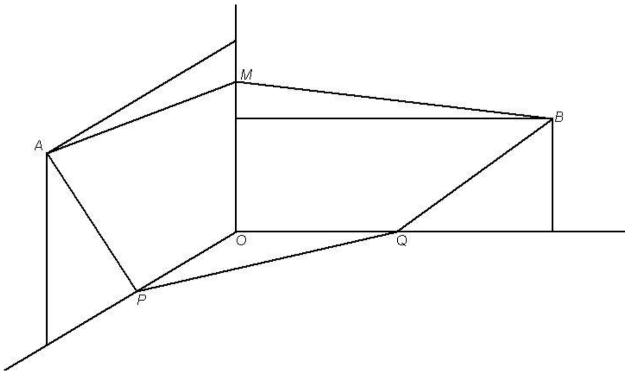
11-b : De A à B par le plus court chemin !

L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. Soit A le point de coordonnées $(x_A\,;0\,;z_A)$ et B le point de coordonnées $(0\,;\,y_B\,;\,z_B)$; les nombres x_A, y_B, z_A et z_B sont des réels fixés strictement positifs.

Soient les points M de coordonnées $(0\,;0\,;m)$, P de coordonnées $(p\,;0\,;0)$ et Q de coordonnées $(0\,;q\,;0)$.

1. Déterminer, en fonction de x_A, y_B, z_A et z_B le nombre m pour que $AM + MB$ soit minimal.

2. Déterminer, en fonction de x_A, y_B, z_A et z_B, les nombres p et q pour que $AP + PQ + QB$ soit minimal. Dans quels cas ce minimum est-il égal à $AO + OB$?



http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/premS.html

12. Aix-Marseille

12-a : C'est du vol

Lors d'une soirée dansante, un vol important a été commis. L'inspecteur Jean QUETTE, appelé sur les lieux, réunit toutes les personnes et demande à chacune avec combien de personnes elle a dansé.

Chacune des femmes répond qu'elle a dansé avec trois hommes. Chacun des hommes déclare avoir dansé avec une, deux ou trois femmes.

Il y a davantage d'hommes déclarant avoir dansé avec trois femmes que d'hommes déclarant avoir dansé avec une seule femme.

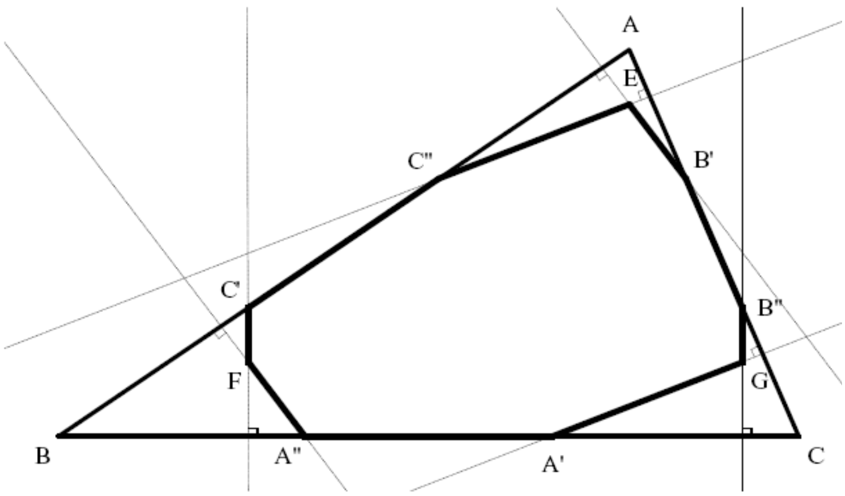
Après avoir constaté que moins des deux cinquièmes des personnes étaient des femmes et après avoir un peu réfléchi, l'inspecteur conclut qu'une personne au moins a menti et il a raison. Expliquer pourquoi.

12-b : Un ennéagone

A traiter par les candidats de S

Un ennéagone est un polygone à neuf côtés.

On considère la figure suivante dans laquelle AB' B'B" = = B"C ; BC' = C'C" = C"A et BA" = A"A' = A'C .



1. Démontrer que la droite (*AE*) est perpendiculaire à la droite (*BC*).

De même, la droite (BF) *est perpendiculaire à la droite* (AC) *et la droite* (CG) *est perpendiculaire à la droite* (AB) *. (On ne demande pas de le démontrer).On note H le point d'intersection des droites (AE), (BF) et (CG).*

2. Quel est le rapport de l'aire de l'ennéagone (*A'A"F C'C"E B'B"G*) sur celle du triangle (*ABC*) ?

12-c : Volumes

A traiter par les candidats autres que S

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A. On note V_A le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (BC), V_B le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (CA) et V_C le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (AB).

On rappelle que le volume d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h est $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

1. Représenter à main levée sur trois schémas distincts chacun des solides ainsi obtenus.

2. On admet que V_A est le plus petit des trois nombres V_A, V_B et V_C. Démontrer qu'un triangle dont les côtés ont pour longueurs $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$ est un triangle rectangle.

http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/olymp-an.htm

13. Montpellier

13-a : Collages

On considère l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. On définit l'opération *collage* de deux nombres entiers M et N par M*N = MN. Ainsi 6*4 = 64, 35*2 = 352, 17*35 = 1735.

Un entier N est *formidable* si N divise M*N pour tout entier M ; par exemple 2 est formidable.

1. 3 est-il formidable ?

2. Combien y a-t-il de nombres formidables à un chiffre ?

3. Combien y a-t-il de nombres formidables inférieurs à 2005 ?

13-b : Somme

On considère trois nombres positifs a, b et c tels que $a+b+c=1$.

1. Pour quelles valeurs de a, b et c la somme $ab+ac$ est-elle maximum ? Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

On considère quatre nombres positifs a, b, c et d tels que $a+b+c+d=1$.

2. Pour quelles valeurs de a, b, c et d la somme $ab+ac+ad$ est-elle maximum ? Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/pedago/jeumath/olympiades05_Montpellier.pdf

14. Nancy-Metz

14-a : Le fleuve

Deux bacs partent en même temps des deux rives opposées de l'Amazone et naviguent à vitesse constante. L'un étant plus rapide que l'autre, ils se croisent à 1500 mètres de la rive la plus proche.

Arrivés à destination, les deux bateaux restent à quai 25 minutes, le temps du débarquement des passagers et de l'embarquement de nouveaux passagers, puis larguent les amarres pour repartir vers leur point de départ.

Ils se croisent une seconde fois à 700 mètres de la rive la plus proche.

Quelle est la largeur de l'Amazone entre ces deux rives ?

14-b : Réflexion

Lorsque qu'un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir plan en un point M, l'angle i et l'angle r sont égaux. (voir figure1).

BC et BD sont deux miroirs de grande longueur formant un angle α non nul compris entre 0° et 90°. Un laser positionné en un point A émet un rayon vers BC **parallèlement** à BD qui se réfléchit en A_1.

Si α est différent de 90° (voir figure 2), le rayon réfléchi se dirige alors vers le point A_2 de BD en s'approchant de B et subit une nouvelle réflexion.

On veut étudier le nombre k de fois où le rayon frappe l'un ou l'autre des miroirs.

1. Analyse de quelques cas particuliers

a. Que vaut le nombre k lorsque $\alpha = 90°$? $\alpha = 60°$? $\alpha = 45°$?

b. Sur la figure 2 l'angle α vaut 26°. Déterminer les différents angles i_n et r_n en chacun des point A_n ($1 \leq n \leq 6$) où le rayon est réfléchi ?

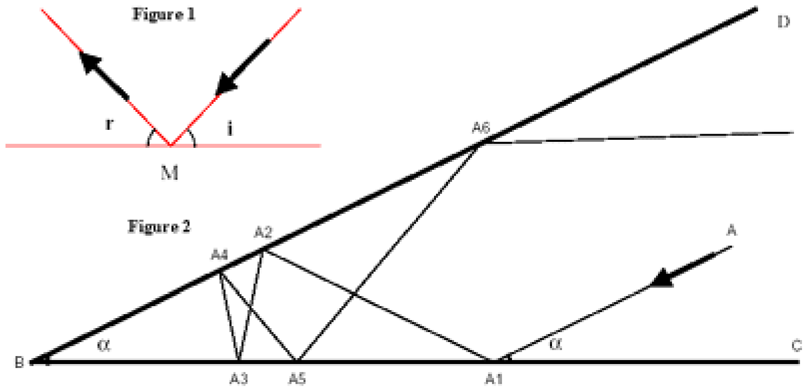
2. Analyse du cas général

Dans cette question on suppose que α est quelconque entre 0° et 90° (α différent de 0° et de 90°).

a. Le rayon peut-il s'approcher indéfiniment de B ?

b. Déterminer en encadrement du nombre k en fonction de α .

c. Quelles valeurs entières peut-on donner à α pour avoir $k = 25$?



http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/olympiad.htm

15. Nantes

15-a : La vie en rose

Le patron du magasin "La vie en roses" a décidé de vendre ses roses par bouquets de 7 ou de 11 roses et de présenter, en bouquets, **toutes** les roses qui lui sont livrées chaque jour.

Aussitôt, les employés ont commenté cette décision.

Amandine : " Pas facile ! Si, un jour on nous livre 37 ou 59 roses, personne n'arrivera à respecter le contrat. "

Brigitte : " D'accord, mais on nous livre parfois les roses par douzaines, et pour 5 ou 6 douzaines, je suis sûre d'y arriver ".

Chloé : " Je sais répartir 73 roses en faisant 6 bouquets de 11 roses et 1 bouquet de 7 roses.

Comme 74 = 73 + 8x7 - 5x11, pour 74 roses je ferai 1 bouquet de 11 roses et 9 bouquets de 7 roses.

Puis, en écrivant 75 = 74 + 2x11 - 3x7, je peux, avec 75 roses, réalier 3 bouquets de 11 roses et 6 bouquets de 7 roses. "

Dorothée : " Bien vu et tu peux continuer ainsi: dès que l'on sait réaliser ces bouquets pour un nombre n de roses avec au moins 3 bouquets de 7 roses **ou** au moins 5 bouquets de 11 roses, alors on arrivera à faire les bouquets quand la livraison comportera $n + 1$ roses. "

Etienne : " Le nombre maximum de roses livrées pour lequel on fera au plus 2 bouquets de 7 roses et au plus 4 bouquets de 11 roses est inférieur à 50. "

Fanny : " En réfléchissant à tout ce que vous venez de dire, je viens de trouver le plus grand nombre de roses pour lequel les exigences du patron ne sont pas satisfaites. "

Qui a raison ? Qui a tort ? Pourquoi ? Quel est le plus grand nombre de roses pour lequel les exigences du patron ne pourront pas être satisfaites ?

15-b : Triangle et cercles

Construire à l'intérieur d'un triangle équilatéral donné trois cercles de même rayon, tangents deux à deux et tangents chacun à deux côtés du triangle.

Justifier cette construction.

http://www.ac-nantes.fr:8080/peda/disc/math/Maths_Plaisir/Olympiades/sujets/sujets.htm

16. Orléans-Tours

16-a : Les cubes

On prend un certain nombre de cubes de un centimètre de côté que l'on accole face contre face de façon à constituer a rangées de b cubes (a et b sont deux entiers), sans laisser d'espace vide entre les petits cubes. On obtient ainsi un parallélépipède rectangle de hauteur *un* centimètre, de largeur a cm et de longueur b cm. On appelle « aire du parallélépipède » la somme des aires de ses faces.

1. Déterminer le nombre de cubes utilisés, sachant que l'aire du parallélépipède est égale à 100 cm^2. On sera amené à utiliser la décomposition en facteurs premiers de 51.

2. Quel est le nombre minimal de cubes que l'on doit disposer ainsi pour que l'aire du parallélépipède obtenu soit égale à 0,401 m^2 ?

NB : On donne à toutes fins utiles la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

16-b : Horizons entre Corse et Nice

La figure ci-dessous représente une coupe de la sphère terrestre par un plan passant par son centre O.

On y a marqué les points M et C figurant les sommets respectifs du Mont Chauve d'Aspremont et du Monte Cinto en Corse.

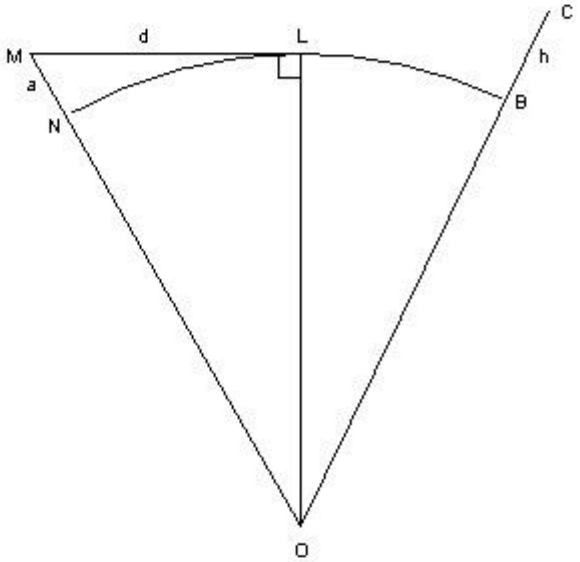
On donne le rayon terrestre $R = 6370$ km.

On indique d'autre part que le Monte Cinto culmine à l'altitude $h = BC = 2710$ m et le Mont Chauve d'Aspremont à l'altitude $a = NM = 854$ m.

La distance BN est de 210 km, cette distance correspondant à la mesure de l'arc de cercle BN indiqué sur la figure.

1. Depuis le sommet M du Mont Chauve, à quelle distance d sont les points qui comme L sont situés à l'horizon, au niveau de la mer ? Quelle est alors la mesure de l'arc NL ? Comparer cette mesure avec d.

2. Donner un encadrement de l'altitude des points situés sur les parois du Monte Cinto et visibles depuis le sommet M.



http://www.ac-orleans-tours.fr/maths-1/olympiades/default.htm

17. Paris

17-a : A table

26 personnes dont les âges sont respectivement chacun des entiers compris entre 35 et 60 sont assises autour d'une table.

Montrer qu'il existe 4 personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190.

17-b : Flipper

On considère une table de flipper; sur cette table sont placés trois plots non alignés A, B et C, assimilés à des points.

On veut choisir un autre point M sur la table, où l'on va placer un mécanisme qui agit de la façon suivante :

Toute bille partie de A et arrivée en M est ensuite renvoyée de M vers la droite (BC) perpendiculairement à la droite (AM).

Les deux parties de la trajectoire sont supposée rectilignes.

Représenter l'ensemble des points M de demi-plan de frontière (BC) et contenant A pour lesquels la bille lancée de A et passée en M passera ensuite entre B et C.

18. Poitiers

18-a : Grilles de lettres

1. Combien y-a-t-il de façons différentes de lire le mot "JEU" en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales ? Et le mot "MATH" ?

J	E	U
	J	E
		J

M	A	T	H
	M	A	T
		M	A
			M

2. a. Le nombre de façons différentes de lire le mot "OLYMPIADES" en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales dans le premier tableau ci-dessous à gauche est supérieur à 500.

Quel est-il exactement ?

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M	P	I	A	D
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M	■	■	A	D
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

2. b. Maintenant il y a une tache noire infranchissable sur les lettres P et I à la troisième ligne (deuxième tableau, à droite). Quel est le nombre de façons de lire "OLYMPIADES" ?

3. On revient à la grille de départ sans tache, où l'on envisage de disposer une tache ayant la forme d'un bloc vertical de trois lettres. Où faut-il mettre cette tache si l'on veut que le nombres de façons de lire "OLYMPIADES" soit:

a : le plus grand possible ?

b : le plus petit possible (le S ne fait pas partie du bloc de trois lettres verticales) ?

18-b : Jardin

Un jardin public a la forme d'un triangle ABC isocèle rectangle en A, avec AB = 130m.

Un parterre a été tracé: c'est un secteur circulaire, centré en A, de 50m de rayon <u>et il est impossible d'y marcher</u>. L'arc de cercle coupe [AB] en K.

1. Un enfant court de B vers K puis de K doit rejoindre C. Quel est le trajet le plus court ? (justification demandée).

2. Un autre enfant part lui aussi de B, doit rejoindre un point de l'arc de cercle et rejoindre C. Quel est le tajet le plus court ? (justification demandée). En donner une approximation à 0,1m près.

18-c : Grilles

autres élèves que S

On considère deux grilles carrées ayant chacune n lignes et n colonnes.

On remplit la première grille en remplissant "en ligne" par les nombres de 1 à p en commençant de 1 à p jusqu'à ce que la grille soit remplie (quand on arrive à la fin d'une ligne on continue sur la ligne suivante).

On remplit la deuxième grille suivant le même processus mais en procédant "en colonne".

Par exemple si $n = 5$ et $p = 3$ la première grille (à gauche) et la seconde grille (à droite) sont :

1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1

1	3	2	1	3
2	1	3	2	1
3	2	1	3	2
1	3	2	1	3
2	1	3	2	1

On s'intéresse au nombre N de cases de ces deux grilles ayant le même nombre dans chacune des deux grilles (dans l'exemple ci-dessus toutes ces cases contiennent des 1 et $N = 9$).

Pour les trois questions suivantes donner seulement la réponse.

En particulier, aucune grille ne sera dessinée pour ces trois réponses.

1. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 2$ et n vaut successivement 2 , 3 , 4 et 5 ?
2. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 3$ et n vaut successivement 6 et 7 ?
3. Quelle est lla valeur de N lorsque $p = 4$ et $n = 7$?

Pour la quatrième question, donner la réponse et la justifier si possible.

4. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 2$ et n est quelconque ?

19. Rennes

19-a : Kilomètres

Nicolas et Jacques sautillent allègrement le long d'un chemin qui comporte des bornes numériques.

Le petit Nicolas démarre à la borne 0 et saute les bornes deux par deux (0, 2, 4, etc.) tandis que Jacques qui a de plus grandes jambes, parti de la borne 953, les passe dans le même temps 5 par 5 (953, 948, 943, etc.).

1. Peuvent-t-ils se rencontrer sur une même borne ?
2. Sinon quelles sont les deux bornes sur lesquelles ils se trouveront nez à nez ?

Une mouche très curieuse et très rapide fait un aller-retour entre Nicolas et Jacques dans le court laps de temps qui sépare le moment où ils arrivent sur les bornes et le moment où ils en repartent.

3. Sachant que l'intervalle entre deux bornes est de 25 cm et que la mouche termine son périple en se posant sur Nicolas lorsqu'il arrive sur sa dernière borne quelle distance a-t-elle parcouru ?

19-b : C'est la fête du village à Sainte Olympe !!!

Le matin, c'est le marché traditionnel. Il est 9 heures et l'horloge de l'église vient de sonner les 9 coups en 9 secondes. Sur un étal, on propose des tomates. Elles proviennent d'un stock de 500 kg oublié pendant deux jours dans un hangar dont la température est de 28 °C.

Elles ont un peu souffert mais restent bien présentables bien que leur teneur en eau qui est habituellement de 95 % n'est plus que de 90 %.

A 11 heures, l'horloge de l'église sonne et la course cycliste va commencer : les 12 participants répartis en trois équipes prennent le départ.

Au bout de 35 mn, Mikaël Olympe, qui est un des favoris, réussit à doubler son cousin Gwendal qui était jusqu'alors le deuxième.

A l'arrivée le classement n'a pas changé. Un généreux donateur britannique, Sir Ing a sponsorisé la course et a offert en plus des premiers prix, une somme de 12 000 euros pour récompenser la participation des équipes.

Quelle injustice!!... Les dossards bleus reçoivent 2000 euros chacun, les dossards rouges 500 et les jaunes 250.

Questions

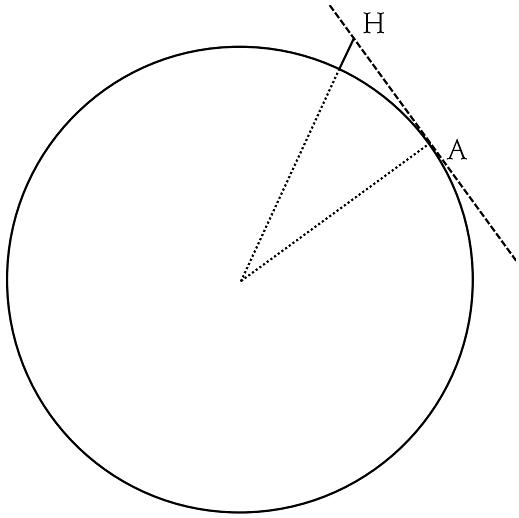
1. Quel poids de tomates le maraîcher propose-t-il à la vente ?
2. En combien de secondes sonnent les 11 coups de 11 heures ?
3. A quelle place arrive Mikaël ?
4. Combien y a-t-il de dossards de chaque couleur ?

http://www.ac-rennes.fr/pedagogie/maths/jeux/olympiade/olympia05rennescorrige.pdf

20. Rouen

20-a : La vue porte

La Terre est assimilée à une sphère de rayon R = 6400 km. Dans un port situé au bord d'un vaste océan, on dresse un point d'observation à h = 40 mètres du niveau de la mer afin de surveiller l'approche des navires et les appareillages. Un homme situé dans cet observatoire scrute l'horizon.



1. En supposant que le regard puisse se porter aussi loin que possible, à quelle distance se situe l'horizon pour l'homme de la vigie, au kilomètre près ?

La ligne d'horizon est définie par l'endroit où la rotondité de la Terre empêche à l'oeil de voir la surface de la mer au-delà de ce point. Ceci est schématisé ainsi.

2. Un bateau quitte le port à la vitesse constant de 10 noeuds (*) et s'éloigne en ligne droite depuis la vigie vers l'horizon. On considère que le navire disparaît de la vue dès qu'il a atteint la ligne d'horizon.

Estimer au centimètre près l'écart entre la portée de vue depuis la vigie et la distance réelle parcourue par le bateau jusqu'à l'horizon. En combien de temps le bateau aura-t-il passé l'horizon, à la minute près ?

(*) *Un noeud est la vitesse mise un navire pour parcourir un mille marin (1,852km) en une heure.*

3. A quelle hauteur, au mètre près, doit-on construire un phrare pour que la vision puisse se porter au maximum à 40km ?

20-b : Equilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral. On pose AB = BC = CA = x.

Sit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit D le point du petit arc AC de cercle (C) tel que CD = 2AD ; on pose AD = y.

Soit E le point d'intersection de la droite (AD) et de la parallèle à (BD) passant par C.

Soit H le pied de la hauteur issue de C du triangle CDE.

1. Quelle est la nature du triangle CDE? Justifier.

2. Montrer que $\text{aire}(CDE) = \frac{4}{7}\,\text{aire}(ABC)$.

http://www.ac-rouen.fr/pedagogie/equipes/maths/article.php3?id_article=141

21. Toulouse

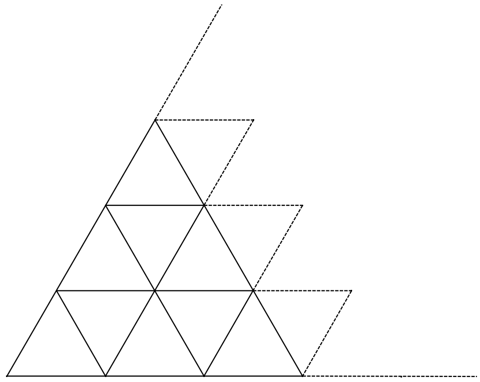
21-a : Les rayons de miel

Les cellules formant les rayons de miel des ruches sont en forme d’hexagones réguliers. Pour expliquer ce phénomène, les entomologistes (spécialistes des insectes) ont récemment émis une hypothèse « économique » que nous allons essayer de comprendre.

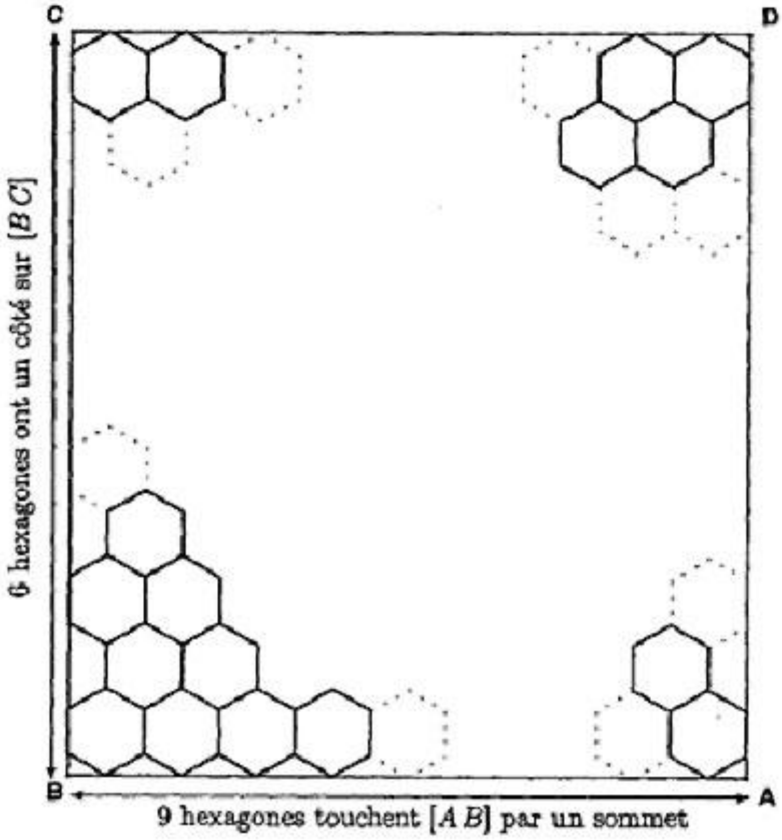
En effet, pourquoi des hexagones plutôt que des carrés ou des triangles ou des cercles ?

1. Soit un carré de 10 cm de côté, recouvert par des petits carrés de 1 cm de côté. Quelle est l'aire totale de ces petits carrés ? Quelle est la longueur totale de leurs bords (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?

2. On considère un « grand » triangle équilatéral recouvert par des « petits » triangles équilatéraux de 1 cm^2 d'aire (voir le dessin ci-dessous). On suppose que la longueur d'un côté du « grand » triangle fait 10 fois la longueur du côté d'un « petit ». Combien faut-il de « petits » triangles pour recouvrir le grand » ? Quelle est la longueur totale des bords des « petits » triangles (un côté communà deux cellules est compté une seule fois) ?



3. On considère enfin des hexagones réguliers d'aire 1 cm^2 disposés à l'intérieur d'un rectangle *ABCD* comme ci-dessous, de telle sorte que 9 hexagones aient un sommet sur [*AB*] et 6 hexagones aient un côté sur [*BC*]. Quel est le nombre total d'hexagones dans le rectangle *ABCD* ? Quelle est la longueur totale des bords de ces hexagones ?



4. Quel avantage les abeilles trouvent-elles à construire des cellules à cloisons hexagonales plutôt que carrées ou triangulaires, ceci à aires égales pour les cellules de ces trois différentes formes ?

21-b : Concombres et champignons

Candidats autres séries que S et STI

1. Un concombre de 300 grammes est cueilli lorsqu'il contient 98 % d'eau. Après transport il n'en contient plus que 97 %. Quelle est alors sa masse ?

2. La conversation ci-dessous a été entendue sur un marché. Qui est de bonne foi, d'après vous, et pourquoi ?

« Mes champignons sont très frais, ils sont composés à 99 % d'eau, c'est un régal de fraîcheur ! » s'exclame le marchand.

La cliente : « Je vous en achète 2 kilos que vous voudrez bien me livrer demain matin. »

Le lendemain à la livraison, la cliente : « Dites donc, ils ont perdu au moins la moitié de leur poids vos champignons ! »

« C'est impossible, Madame, ils contiennent encore 99 % d'eau ! » réplique le marchand.

21-c : Les skieurs attendent

Candidats séries S et STI

Une file de n skieurs portant des dossards numérotés de 1 à n (n sera appelé « effectif ») attend à un téléski. Ils sont placés en file suivant l'ordre de leur dossard. Le perchman fait passer un skieur sur deux, et le suivant va se remettre au bout de la file. Le skieur de dossard 1 passe en premier. Le problème est de déterminer le dossard du skieur qui passera en dernier.

1. Indiquer le dossard du skieur qui passera en dernier pour chacun des effectifs du tableau ci-dessous :

Effectifs	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Dernier									

2. a. Quel est le dossard du skieur qui passe en dernier pour un effectif de 27 skieurs ? de 54 skieurs ?

Justifier vos réponses.

b. Exposer une méthode permettant de répondre à cette question pour un effectif plus important, par exemple en se ramenant à un effectif plus faible que celui proposé (il n'est demandé ni formule ni démonstration).

3. Le perchman fait maintenant passer 2 skieurs sur 3, en commençant par les dossards 1 et 2, les recalés venant comme précédemment se remettre en bout de file.

Quel est le dossard du skieur qui passe en denier si l'effectif vaut $3p$, p étant un entier naturel non nul ?

Justifier la réponse !

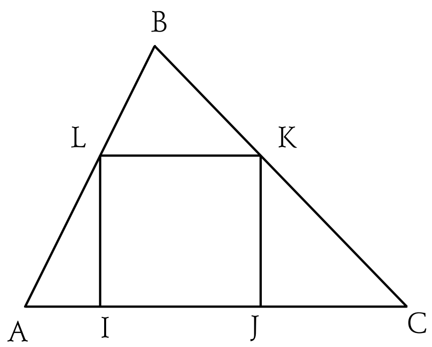
22. Versailles

22-a : Carré dans le triangle

On considère un triangle ABC dont les trois angles sont aigus. On pose BC = a , CA = b et AB = c. On appelle h la hauteur relative à [BC] et S l'aire du triangle ABC.

On inscrit dans ce triangle le carré IJKL tel que I soit sur [BC] , J sur [BC] , [J sur [AC] et L sur [AB] comme indiqué sur la figure ci-dessous. On dit que le carré IJKL est *posé* sur [BC]. On appelle C_1 ce carré.

On peut construire de même deux autres carrés C_2 et C_3 inscrits dans le triangle ABC, l'un *posé* sur [CA], l'autre *posé* sur [AB].



1. Exprimer le côté du carré IJKL en fonction de a et h.

2. On suppose que $a \leq b \leq c$. Classer les trois carrés C_1, C_2 et C_3 par ordre de grandeur.

3. Déterminer les triangles ABC d'aire S donné tels que l'aire du carré IJKL soit maximale.

4. Existe-t-il des triangles ABC d'aire S donnée tels que les trois carrés soient d'aires maximales ?

22-b : omme

On dispose de 100 cartes . Sur chacune sont écrites deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers 1, 2, 3, ..., 199, 200 est écrit sur une et seule carte.

1. Alice a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ces cartes et annonce à Bob que cette somme est égale à 2004.

Prouver qu'Alice s'est trompée dans son calcul.

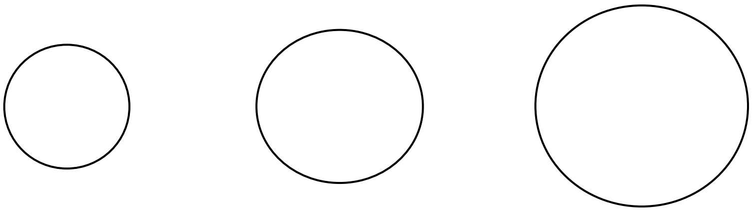
2. Alice recompte et annonce 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.

3. En fait, le total d'Alice est 2003. Pendant ce temps, Bob a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient. Il fait la somme des nombres écrits sur ses cartes et annonce à Alice que cette somme est 1396. Prouver que Bob s'est trompé dans son calcul.

22-c : Gâteaux

Concours STT, ES, L

La figure ci-dessous représente trois gâteaux de forme circulaire. Ils ne diffèrent que par leurs diamètres. Le premier a pour diamètre 6 cm, le second 8 cm et le troisième 10 cm.



Quatre enfants désirent se partager équitablement ces gâteaux : les parts de chacun, même si elles sont constituées de plusieurs morceaux, doivent avoir la même aire totale.

Pour chaque gâteau, on ne s'autorise que des coupes rectilignes passant par le centre.

Quel est le nombre minimal de coupes pour cette répartition ?

22-d : Somme

Concours STT, ES, L

Un nombre entier naturel quelconque peut être écrit comme la somme de puissances de 2. On a, par exemple, $6 = 4 + 2$, mais aussi $6 = 2 + 2 + 1 + 1$, ou encore $6 = 2 + 2 + 2$.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux décompositions dans lesquelles une même puissance de 2 apparaît au maximum deux fois (par exemple, la dernière décomposition proposée ci-dessus pour 6 ne convient pas). On note $d(n)$ le nombre de telles décompositions du nombre n .

1. Montrer que $d(6) = 3$.
2. Calculer $d(n)$ pour les entiers compris entre 1 et 5.
3. Calculer $d(10)$, $d(11)$, $d(21)$ et $d(22)$.
4. Prouver que $d(2005) = d(1002)$.
5. Calculer $d(2005)$.

http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/suj2005/solution.pdf