Olympiades académiques de mathématiques

Manque Toulouse…

1. Algèbre - Arithmétique

1-1 : Les fourmis

Olympiades académiques 2002

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 centimètres de long.

La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.

Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 centimètres, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

1-2 : Les pages

Olympiades académiques 2004

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à *n* (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.

Quels sont le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées ?

1-3 : Calendrier

Olympiades académiques 2004

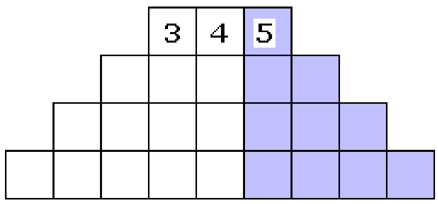
Sur la planète « *Mathématic* », les années ont toujours 365 jours et les mois ne peuvent avoir que 28, 30 ou 31 jours.

1. Montrer qu'une année « *Mathématicienne* » comporte toujours douze mois.

2. Donner toutes les compositions possibles d'une telle année en nombre de mois de 28, 30 et 31 jours.

1-4 : Pyramide d'entiers

Olympiades académiques 2004 (http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm)



On se propose de continuer à remplir le tableau ci-dessus avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

Règle 1 : Chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs.

Règle 2 : Sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

Remarque : La première ligne a été remplie grâce à l'égalité bien connue: $3^2 + 4^2 = 5^2$

1. Montrer qu'il n'y a pas d'autre façon de remplir la première ligne.

2. Remplir les deux lignes suivantes.

3. Montrer que si l'on continue à remplir le tableau, en rajoutant autant de lignes que nécessaire, l'une des cases contiendra le nombre 2004.

Préciser la couleur et la position exacte de cette case.

1-5 : Des nombres renversants

Olympiades académiques 2004

1. Soit N un nombre de trois chiffres, on le « renverse » c'est à dire : on lui associe le nombre N' obtenu en échangeant les chiffres des unités et des centaines, puis on calcule l'écart E entre ces deux nombres, on a donc $E = |N - N'|$. Par exemple $N = 753$, $N' = 357$ et $E = 396$.

Combien de nombres E différents peut-on obtenir quand N varie ? Soit S la somme des chiffres de E, préciser les valeurs prises par S quand N varie.

2. On recommence l'expérience avec un nombre N de cinq chiffres, le nombre N' est donc obtenu en échangeant le chiffre des unités avec celui des dizaines de milles, puis celui des dizaines avec celui des milles.

Par exemple, $N = 97531$, $N' = 13579$ et $E = 83952$.

Combien de nombres E différents peut-on obtenir ?

Quelles sont les valeurs possibles pour la somme S des chiffres de E et dans quels cas obtient-on ces différentes valeurs ?

1-6 : Nombres de Pozandis

Olympiades académiques 2003 (http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm)

En hommage au célèbre mathématicien grec Alex POZAIMDIS (1920-1992) qui leur a consacré l'essentiel de ses recherches, certains nombres entiers sont aujourd'hui appelés nombres de Pozandis.

Un entier naturel N, non nul, est un nombre de Pozandis si tout entier naturel de 1 à N est égal à une somme de diviseurs isolés de N, un diviseur étant isolé s'il n'apparaît pas plus d'une fois dans la somme.

Cette somme peut, évidemment, être réduite à un seul nombre.

Exemple: 6 est un nombre de Pozandis car ses diviseurs sont 1, 2, 3, 6 et on a: 1 = 1 ; 2=2 ; 3=3 ou 3=2+1 ; 4=3+1 ; 5=3+2 ; 6=6 ou 6=3+2+1.

1. Donner, sans justification, les dix premiers nombres de Pozandis.

2. Les années d'Alex POZANDÏS (1920 et 1992) sont-elles des nombres de Pozandis ?

3. Montrer qu'avant la fin du XXIème siècle, au moins une année sera un nombre de Pozandis.

1-7 : Baby-foot

Olympiades académiques 2001 (http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm)

Alain et Benoît jouent au baby-foot et notent le score après chaque but sur une fiche.

Exemple de fiche pour une partie en 5 balles remportée 3 buts à 2 par Alain.

Alain	1	2	2	2	3
Benoît	0	0	1	2	2

On remarque que dans cette partie, Benoît n'a jamais mené au score.

1. Combien peut-on trouver de fiches possibles (du type de celle donnée ci-dessus) pour une partie en cinq balles où Benoît n'a jamais mené au score ?

2. Combien peut-on trouver de fiches possibles pour une partie en dix balles où Benoît n'a jamais mené au score ?

3. Alain et Benoît jouent un nombre pair de balles. On note N le nombre de fiches possibles où Benoît n'a jamais mené au score.

Exprimer en fonction de N le nombre de ces fiches où Benoît a égalisé au moins une fois.

1-8 :Une équation diophantienne

Olympiades académiques 2004 (http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/xjeux_mjc.htm)

Partie A

Déterminer tous les entiers naturels x, y, z vérifiant l'équation : $x + y + z = xyz$.

Partie B

Pour n entier naturel non nul donné, on s'intéresse aux entiers naturels x, y et z vérifiant l'équation :

$$x + y + z + n = xyz\,.$$

1. Montrer que les nombres x, y et z sont tous inférieurs ou égaux à $n + 3$.

2. On suppose que $z = n + 3$. Déterminer les valeurs possibles de x et y.

3. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle on peut trouver des entiers naturels x, y, z strictement inférieurs à $n + 3$, vérifiant $x + y + z + n = xyz$?

1-9 : Equation diophantienne

Olympiades académiques 2001, Poitiers

Montrer que l'équation $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{z+2}$ n'admet pas de solution (x, y, z) constituée d'entiers strictement positifs où $x \geq 4$.

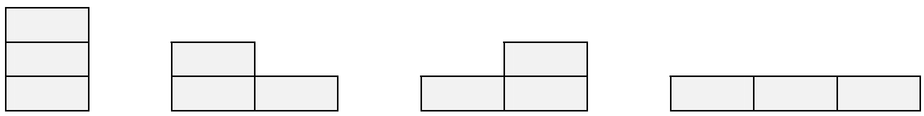
Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs qui sont solution.

1-10 : Mur de briques

Olympiades académiques 2004, Strasbourg

Pour n entier naturel non nul, on construit un mur d'un seul tenant à l'aide de n briques posées au sol ou sur une autre brique.

Par exemple pour $n = 3$, il y a 4 murs possibles :



Combien y-a-t-il de murs à n briques ?

1-11 : Pyramide de nombres

Olympiades académiques 2003, Strasbourg

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	…						

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.

Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.

Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquels il se trouve.

Par exemple : Le nombre 11 est repéré par (10 ; 5). Le nombre 8 est repéré par (5 ; 4).

Comment est repéré le nombre 2003 ?

1-12 : Révisions…

Olympiades académiques 2003

Pour préparer au mieux les Olympiades Académiques de Mathématiques, les élèves de première du lycée Honboss ont décidé de mettre à profit les 10 jours qui précèdent le jour J en révisant les épreuves des années précédentes.

1. Jean Névitmar a décidé d'alterner jour de révision et jour de repos, c'est à dire qu'un jour de révision est toujours suivi d'un jour de repos qui lui-même est toujours suivi d'un jour de révision.

De combien de façons Jean Névitmar peut-il organiser ses révisions durant les 10 jours ?

2. René Zitant, au gré de son humeur, choisit chaque jour de réviser ou non, sans se soucier de ce qu'il a fait les jours précédents.

De combien de façons René Zitant peut-il organiser ses révisions durant les 10 jours ?

3. Gérard Manvussa a une technique bien particulière. Lorsqu'il révise, il le fait par période de 2 jours consécutifs, jamais davantage. Seule exception, il peut réviser le dernier jour, même s'il n'a pas révisé l'avant-dernier jour.

De combien de façons Gérard Manvussa peut-il organiser ses révisions durant les 10 jours ?

4. Craignant le trouver des élèves trop fatigués pour le jour J, le professeur de mathématiques Yann Amar interdit de réviser 2 jours de suite. A partir de cette règle, toutes les démarches sont possibles ; par exemple, Théodore Toultant choisit de ne rien réviser, alors que Jean Veupluss travaille le premier jour, le troisième et ainsi de suite tous les jours impairs.

De combien de façons, suivant cette règle, un élève peut-il organiser ses révisions durant les 10 jours?

1-13 : Echanges

Olympiades académiques 2004

Quatre couples se retrouvent chez Mr et Mme Dupond ; embrassades et poignées de mains sont échangées sauf bien sûr entre les époux. Mr Dupond demande à chacun ainsi qu'à sa femme combien il (ou elle) a serré de mains et il obtient sept réponses différentes.

Combien Mme Dupond a-t-elle serré de mains ?

1-14 : L'archéologue

Olympiades académiques 2004

Après de multiples péripéties une archéologue a été abandonnée par un faux guide, évanouie et dévalisée à l'intérieur d'une pyramide. A son réveil, elle se retrouve seule, dans une immense pièce entourée de quatre cents portes fermées, numérotées de 1 à 400.

Elle découvre près d'elle un papyrus indiquant qu'une seule porte permet d'en sortir, les autres donnant dans des couloirs piégés. Ce papyrus donne aussi le moyen de trouver la bonne porte :

Sachant qu' « Actionner une porte » c'est « la fermer si elle est ouverte, l'ouvrir si elle est fermée », suivre les instructions suivantes :

Etape 1 : ouvrir toutes les portes

Etape 2 : actionner les portes dont les numéros sont multiples de 2. Ici cela revient à les fermer.

Etape 3 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 3.

Etape 4 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 4.

Etape 5 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 5.

Et ainsi de suite…

A la fin de toutes les étapes sortir par la dix-septième porte ouverte.

L'archéologue férue de mathématiques réfléchit un instant et se dirige sans hésitation vers la bonne porte.

A la fin de toutes les étapes :

1. Préciser la position (ouverte ou fermée) de chacune des 5 premières portes.
2. Que dire des positions des portes numérotées 24, 25, 27, 36 et 40 ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur le numéro des portes qui sont ouvertes ?
4. Quel est le numéro de la porte qui lui a permis de sortir ?
5. Comment l'archéologue a-t-elle fait pour le trouver ?

1-15 : Autour de la table

Olympiades académiques, 2002

Dix personnes sont assises autour d'une table ronde.

Dix jetons portant les numéros de 1 à 10 sont distribués au hasard à ces dix personnes.

Chaque personne gagne une somme égale en euros au total du numéro de son propre jeton, de celui de son voisin de gauche et de de celui de son voisin de droite.

1. A l'aide d'un procédé aléatoire de votre choix, donner un exemple de répartition des jetons. Sur cet exemple, indiquer le gain de chaque personne et la moyenne de ces dix gains.

2. Prouver que, quelle que soit la répartition des jetons, au moins une des dix personnes aura un gain supérieur ou égal à 17 euros.

3. Donner un exemple où tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 euros.

4. Peut-on, dans la deuxième question, remplacer 17 par 18 ?

1-16 : Les joueurs

Olympiades académiques, 2001 (http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/xjeux_mjc.htm)

Un jeu se déroule avec trois joueurs. À chaque partie, chaque joueur gagne une somme fixée selon son classement à la partie.

Ces sommes sont des entiers non nuls distincts deux à deux .

Sachant que ces trois joueurs ont gagné respectivement 20 F, 10 F et 9 F à l'issue du jeu, déterminer le nombre de parties jouées et les sommes attribuées suivant le classement.

1-17 : Equation

Olympiades académiques, 2001

Quelles sont les solutions de cette équation ? Expliquer.

$$x=1+\cfrac{1}{x}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

1-18 : Dé tétraédrique

Olympiades académiques 2001

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4 .

Le dé est posé sur une table, face «1» contre cette table.

Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.

A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait ainsi la somme s de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le «1» initial.

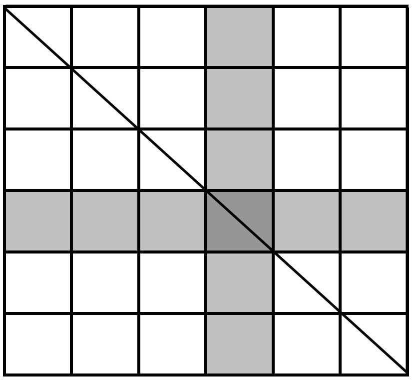
1. Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour s.

2. La somme s peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

1-19 : La croix des nombres

Olympiades académiques 2003

Dans un tableau carré à n lignes et n colonnes, on appelle *croix* la figure formée par une ligne et une colonne se croisant sur la diagonale principale conformément au dessin.



On remplit les n^2 cases du tableau avec les entiers de 1 à $2n - 1$.

On souhaite que dans chaque croix on puisse trouver ces $2n - 1$ nombres.

Exemple : pour $n = 4$, $2n - 1 = 7$

		1	
		2	
5	6	3	7
		4	

* Construire un tel tableau 2×2.

* Peut-on construire un tel tableau 3×3 ?

* Peut-on construire un tel tableau 4×4 ?

* Peut-on construire un tel tableau 2003×2003 ?

1-20 : Des entiers académiques

Olympiades académiques 2004, Versailles

Un entier $n \geq 2$ est dit *académique* si on peut répartir les entiers 1, 2, …,n en deux groupes disjoints S et P, de sorte que la somme des nombres du groupe S est égale au produit des nombres du groupe P.

Exemple : le nombre 7 est académique car $2 + 4 + 5 + 7 = 1 \times 3 \times 6$.

1. Prouver que $n = 4$ n'est pas académique.

2.a. Le nombre 5 est-il académique ?

b. Le nombre 6 est-il académique ?

3. Prouver que, pour tout entier n supérieur ou égal à 7, le nombre n est académique.

1-21 :Le tournoi des n nations

Olympiades académiques 2004, Versailles

On considère un entier $n \geq 3$.

Dans un tournoi des n nations, chaque nation joue avec les $n - 1$ autres.

Le classement se fait selon le nombre de matchs gagnés (un match ne pouvant être que gagné ou perdu). En cas d'égalité, le classement se fait en regardant le nombre de points marqués.

Faire le *grand chelem* c'est gagner tous ses matchs. Obtenir la *cuiller de bois*, c'est perdre tous ses matchs.

1. Existe-t-il des tournois pouvant donner ces scores :

Tournoi des 6 Nations		
Equipes	Victoires	Défaites
A	5	0
B	4	1
C	4	1
D	1	4
E	1	4
F	0	5

Tournoi des 5 Nations		
Equipes	Victoires	Défaites
A	3	1
B	3	1
C	2	2
D	1	3
E	1	3

2. Démontrer que les entiers n pour lesquels il existe un tournoi où le vainqueur a autant de victoires que de défaites sont les entiers impairs.

3. Pour quelles valeurs de n existe-t-il un tournoi où le second compte plus de défaites que de victoires ?

4. Pour quelles valeurs de n, existe-t-il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués ?

5. Pour quelle valeur minimale de n existe-t-il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant qu'il n'y a pas eu de grand chelem ?

2. Analyse

2-22 : Deux entiers

Olympiades académiques 2004

On définit pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x+b}.$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

2. Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

3. A quelle condition deux <u>entiers</u> u et v sont-ils échangeables ?

<u>Corrigé</u>

1. Il s'agit de déterminer a et b tels que la fonction f ainsi définie vérifie à la fois $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.

Cela signifie $a - \sqrt{2+b} = 3$ et $a - \sqrt{3+b} = 2$.

Les conditions d'existence des racines impliquent $2+b \geq 0$ et $3+b \geq 0$, ce qui donne $b \geq -2$.

Dans ces conditions, les deux égalités deviennent $a-3=\sqrt{2+b}$ et $a-2=\sqrt{3+b}$ d'où :

$(a-3)^2=2+b$ et $(a-2)^2=3+b$, soit $a^2-6a+9=2+b$ et $a^2-4a+4=3+b$.

Par soustraction on obtient $2a-5=1$ et $a=3$. On en déduit alors $3-\sqrt{2+b}=3$, d'où $b=-2$.

Après vérification, on conclut que 2 et 3 sont échangeables avec $a=3$, $b=-2$.

2. Il faudrait déterminer a et b tels que $a-\sqrt{4+b}=7$ et $a-\sqrt{7+b}=4$: cela implique $\sqrt{7+b}-\sqrt{4+b}=3$ d'où $\sqrt{7+b}=3+\sqrt{4+b}$ et en élevant au carré on obtient $7+b=9+6\sqrt{4+b}+4+b$, ce qui donne $\sqrt{4+b}=-1$, ce qui évidemment n'est pas possible puisqu'une racine carrée est positive.

Par conséquent 4 et 7 ne sont pas échangeables.

3. Supposons que des entiers relatifs u et v avec $u<v$ sont échangeables.

Il existe alors des réels a et b tels que $a-\sqrt{b+u}=v$ et $a-\sqrt{b+v}=u$. Les conditions d'existence des racines impliquent $b+u \geq 0$ et $b+v \geq 0$, soit $b \geq -u$, $b \geq -v$ et comme $-u>-v$, cela revient à $b \geq -u$.

Dans ces conditions les deux égalités entraînent par soustraction $\sqrt{b+v}-\sqrt{b+u}=v-u.$ En multipliant par le conjugué on obtient $v-u=(v-u)\left(\sqrt{b+v}+\sqrt{b+u}\right)$ et puisque $v-u>0$, on en déduit $\sqrt{b+v}+\sqrt{b+u}=1.$

Supposons $b+u>0$, alors $\sqrt{b+u}>0$ et d'autre part, comme u et v sont des entiers avec $v>u$, on a $v \geq u+1$ d'où $b+v \geq b+u+1$ et comme $b+u>0$, on déduit $b+v>1$, soit $\sqrt{b+v}>1.$ Mais alors on aurait $\sqrt{b+v}+\sqrt{b+u}>1+0=1,$ ce qui n'est pas possible.

Par conséquent $b+u=0$, soit $b=-u$ et $\sqrt{b+v}=1$, soit $b=1-v.$ On déduit alors $-u=1-v$, $v=u+1$ autrement dit u et v sont consécutifs.

Réciproquement, on montre que deux entiers u et v consécutifs sont échangeables et de plus il est facile de voir que les uniques valeurs de a et b sont $a=v$, $b=-u$, ce qui donne la fonction f définie par $f(x)=u+1-\sqrt{x-u}.$

En conclusion, les entiers u et v sont échangeables si et seulement si ils sont consécutifs.

2-23 : Livres en promo

Olympiades académiques 2003

Un professeur commande des livres pour n élèves de première S. Le prix d'un livre est 20 euros mais l'éditeur offre un livre pour 4 livres achetés. On appelle p_n le prix de revient moyen de chaque livre.

1. Présenter dans un tableau les vingt premières valeurs p_1 , p_2 ,…, p_{20} de la suite (p_n).
2. Quelles conjectures formuleriez-vous à propos de cette suite ?
3. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles $p_n = 16$?
4. Exprimer p_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geq 1$.
5. La suite (p_n) est-elle convergente ?

2-24 : Suite d'entiers

Olympiades académiques 2004

On s'intéresse aux suites $x_1, x_2, ..., x_9$ de neuf nombres entiers naturels vérifiant :

$0<x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7<x_8<x_9$ et $x_1+x_2+...+x_9=53$ (Conditions (C))

$x_1, x_2, ..., x_9$ sont appelés termes de la suite.

1. Donner deux exemples de telles suites.

Cas général : on considère dans les questions suivantes une suite $x_1, x_2, ..., x_9$ de neuf nombres entiers naturels vérifiant les conditions (C).

2. a. Prouver que cette suite ne peut pas comporter un nombre impair de termes pairs.

b. Démontrer que cette suite comporte au moins quatre termes pairs.

3. Prouver qu'au moins un des termes de cette suite est un multiple de 3.

4. Prouver que le produit des termes de cette suite est divisible par 96.

Correction

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17 et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 16 sont de telles suites.

2. a. La somme d'un nombre pair de nombres impairs est paire.

En effet en groupant ces termes par deux, on obtient un certain nombre de groupes de deux nombres. La somme dans chaque groupe est paire et par conséquent la somme des sommes dans chaque groupe, autrement dit la somme de tous les nombres, est paire.

Supposons maintenant que la suite comporte un nombre impair de termes pairs. Comme en tout il y a 9 termes, il reste alors un nombre pair de termes impairs dont la somme est paire d'après ce qui précède. Comme la somme des termes pairs est paire, on déduit que la somme de tous les termes de la suite est paire, ce qui est faux car cette somme vaut 53.

b. D'après ce qui précède, moins de 4 termes pairs signifie aucun ou 2 nombres pairs.

Or les plus petits termes d'une suite de 9 nombres avec aucun terme impair sont 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Comme cela dépasse largement 53, il n'existe pas de suite de 9 nombres naturels non nuls avec aucun nombre impair.

Si la suite comportait exactement deux nombres pairs, les plus petits termes seraient 1, 2, 3, 4 5, 7, 9, 11, 13, la somme serait alors 55, ce qui dépasse encore 53. Donc il n'existe pas non plus de suite de 9 nombres avec 2 termes pairs. Donc la suite admet au moins 4 termes pairs.

3. Si la suite ne comportait aucun multiple de 3, la suite dont la somme des termes est minimum est 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13. Cette somme minimum est alors 61, ce qui dépasse 53.

Par conséquent, la suite admet au moins un multiple de 3.

4. On a $96 = 3\times 2^5$. Comme au moins un des termes est divisible par 3, le produit des termes est aussi divisible par 3.

On a vu qu'il y a au moins 4 termes pairs. S'il y a plus de 4 termes pairs, il y a en fait plus de 5 termes pairs, le produit de ces termes pairs est alors divisible par 2^5, et donc le produit de tous les termes est divisible par 2^5.

Si la suite comporte exactement 4 nombres pairs un au moins de ces termes est divisible par $4 = 2^2$. En effet, dans le cas contraire les plus petits termes d'une telle suite seraient 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14 ce qui donne une somme égale à 57 qui dépasse 53.

Le produit des termes pairs est alors divisible par $2\times 2\times 2\times 4 = 2^5$ et donc le produit de tous les termes est encore divisible par 2^5.

Le produit des termes est donc toujours divisible par 2^5 et comme il est aussi divisible par 3, on déduit qu'il est divisible par $3\times 2^5 = 96$.

2-25 : Sommes d'entiers

Olympiades académiques 2004, Orléans

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Montrer qu'avec un choix judicieux de + ou de − à la place des $\pm$, on peut obtenir :

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 99 \pm 100 = 2004.$$

3. Déterminer tous les entiers n pour lesquels on peut obtenir, selon le même principe :

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 99 \pm 100 = n.$$

2-26 : Quelques carrés

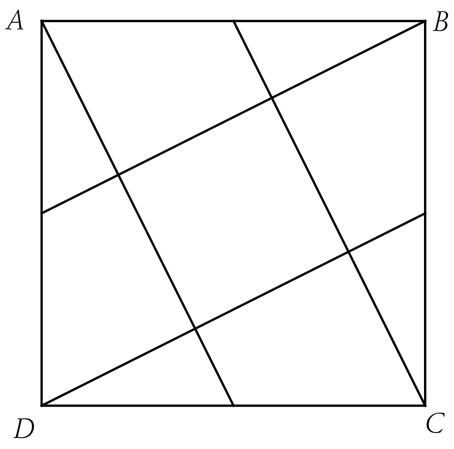
Olympiades académiques 2004

ABCD est un carré de côté 1.

À partir des milieux des côtés du carré *ABCD*, on construit la figure ci-contre.

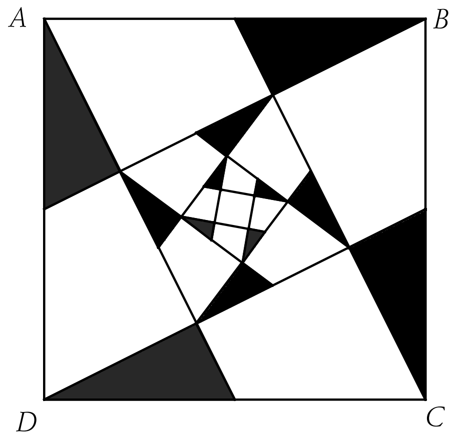
1. Justifier que l'on a construit un petit carré à l'intérieur du carré ABCD.

Quelle est la longueur de son côté ?



2. Dans la suite on procède au même découpage des carrés ainsi construits et à chaque étape on colorie les quatre petits triangles formés, comme indiqué sur la figure ci-contre.

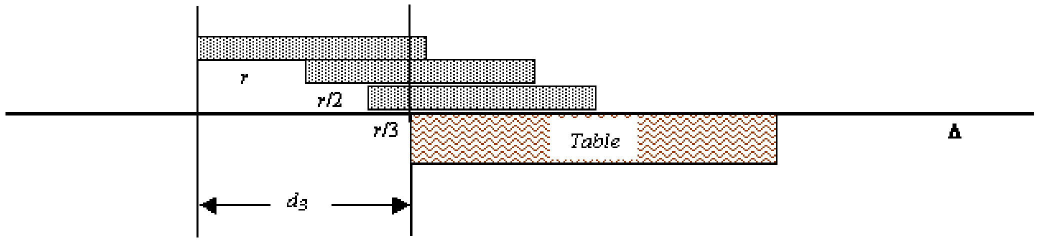
Montrer que l'aire de la partie colorée tend vers un quart de l'aire du carré *ABCD* lorsqu'on poursuit indéfiniment cette construction.



2-27 : Equilibre ?

Olympiades académiques 2001

1. On dispose de trois pièces de monnaie homogènes, de même épaisseur et de même rayon : $r = 1$ cm. On empile ces pièces sur une table conformément au dessin ci-dessous :



Montrer que le système est en équilibre c'est à dire que le centre d'inertie du solide constitué des trois pièces est situé à la verticale du bord de la table. (On pourra munir la droite Δ d'un repère adapté)

2. On généralise à n pièces le précédent empilement.

1. Montrer que le centre d'inertie du solide constitué des n pièces est encore situé à la verticale du bord de la table.

2. On appelle d_n la longueur du surplomb. Montrer que $d_{2n} - d_n \geq \frac{1}{2}$.

3. Peut-on choisir n de telle manière que le surplomb soit aussi long que l'on veut ?

2-28 : Equation et suite

Olympiades académiques 2001, Versailles

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel.

1. Démontrer que l'équation $x^n + x^2 + x - 1 = 0$ admet une solution positive que l'on notera u_n.

2. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on a $0 \le u_n \le \alpha$, où α est la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

3. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n^n + (u_n - \alpha)\left(u_n + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

4. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2-29 : La feuille de papier

Olympiades académiques 2004

Soit $ABCD$, une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$.

Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord gauche de la feuille).

On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur gauche de la feuille).

Dans tout l'exercice on s'intéresse, comme dans la figure ci-contre, au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord droit de la feuille).

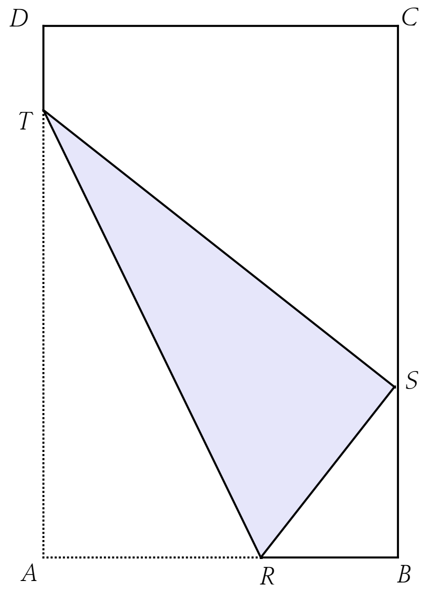
On pose $AR = x$, $AT = y$.

1. Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2. Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.

3. Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale.

4. Quelle est alors la nature du triangle AST ?



Correction

On va déterminer dés le début la relation entre x et y, cela permettra de répondre à la question 1. mais aussi à la question 2.

Considérons donc une configuration ou le point S, symétrique de A par rapport à la droite (RT) est sur le segment $[BC]$.

$RA = RS = x$, $TA = TS = y$; la distance entre les droites (BC) et (AD) étant $AB = 4$, on a $TS \ge 4$, soit $TA \ge 4$. Si on avait $BS > TA$, on aurait $BS > 4$ et alors $SR > 4$, soit $x > 4$, ce qui n'est pas possible.

Par conséquent on a $BS \le TA$, ce qui fait que le projeté orthogonal H de S sur (AD) appartient au segment $[TA]$. On a alors $TH = TA - HA$, et comme $HA = SB$ on obtient $TH = y - SB$.

Dans le triangle BRS, rectangle en B, on a d'après Pythagore, $BS = \sqrt{RS^2 - BR^2}$ et puisque $BR = BA - RA = 4 - x$, on obtient $BS = \sqrt{x^2 - (4-x)^2} = \sqrt{8x - 16} = 2\sqrt{2x - 4}$.

On en déduit alors : $TH = y - 2\sqrt{2x-4} \Rightarrow TH^2 = y^2 - 4y\sqrt{2x-4} + 8x - 16$.

D'un autre côté, dans le triangle HST rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore, $TH^2 = TS^2 - SH^2 = y^2 - 16$.

On en déduit $y^2 - 4y\sqrt{2x-4} + 8x - 16 = y^2 - 16$, ce qui donne finalement : $y = \dfrac{2x}{\sqrt{2x-4}}$.

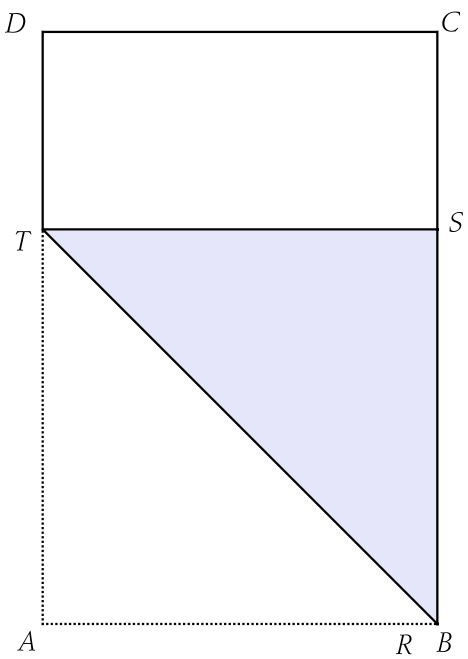
On peut maintenant répondre aux questions :

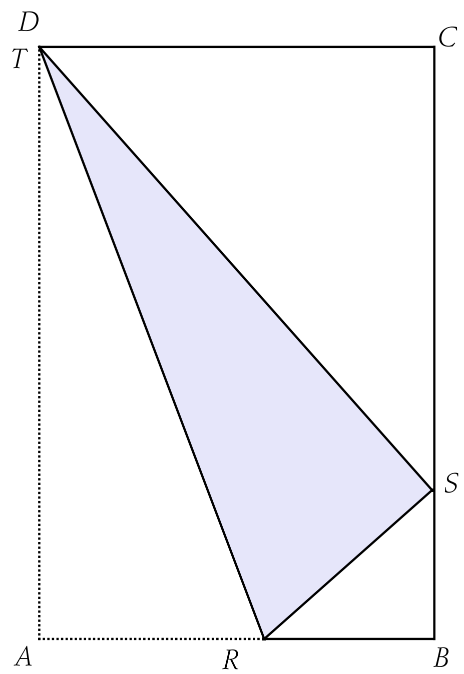
1. On remarquera d'abord qu'on doit avoir $2x - 4 > 0$. On doit avoir $y \leq 6$, soit $y^2 \leq 36$, soit $\dfrac{4x^2}{2x-4} \leq 36$, ce qui donne $x^2 - 18x + 36 \leq 0$.

Or les racines de la fonction de second degré $x \mapsto x^2 - 18x + 36$ sont $9 - 3\sqrt{5}$ et $9 + 3\sqrt{5}$ et l'inégalité précédente entraîne $x \geq 9 - 3\sqrt{5}$. Si $x = 9 - 3\sqrt{5}$ on obtient $y = 6$ et comme ces deux valeurs correspondent à des positions de *R* et *T* sur les segments respectifs [*AB*] et [*AD*] (*T* serait alors confondu avec *D)*, on peut affirmer que la valeur minimale de *x* est $9 - 3\sqrt{5}$.

Puisque *R* est sur le segment [*BA*], on a $x \leq 4$ et pour $x = 4$ on obtient $y = 4$. Comme ces valeurs correspondent à des placements de *R* et *T* sur les segments respectifs [*AB*] et [*AD*] (*R* serait alors confondu avec le point *B)*, on peut affirmer que la valeur maximale de *x* est 4.

Les figures ci-dessous représentent ces deux situations.





2. La relation a été déjà donnée.

3. Les triangles *SRT* et *ART* sont isométriques car un est l'image de l'autre par la symétrie d'axe (*RT*). L'aire $f(x)$ du triangle *SRT* est donc celle du triangle *ART*, rectangle en *A*.

Par conséquent $f(x) = \dfrac{xy}{2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x-4}}$, *x* variant entre $9 - 3\sqrt{5}$ et 4. $f(x)$ est une quantité positive qui varie dans le même sens que son carré. Posons donc $g(x) = \left[f(x)\right]^2 = \dfrac{x^4}{2x-4}$. La fonction *g* est dérivable sur l'intervalle $I = \left[9 - 3\sqrt{5}\,;4\right]$ et pour tout *x* de *I*, ona : $g'(x) = \dfrac{6x^4 - 16x^3}{(2x-4)^2} = \dfrac{2x^3(3x-8)}{(2x-4)^2}$ qui a sur *I* le même signe que $3x-8$ qui s'annule en $\frac{8}{3}\in I$. On déduit que g (ainsi que f) est décroissante sur $\left[9-3\sqrt{5}\,;\frac{8}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{8}{3}\,;4\right]$.

La fonction f admet donc un minimum en $\frac{8}{3}$ égal à $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{32\sqrt{3}}{9}$. Pour $x=\frac{8}{3}$ on obtient $y=\dfrac{2f\left(\frac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3}}=\dfrac{\frac{64\sqrt{3}}{9}}{\frac{8}{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, soit $TS=TA=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. On a aussi : $AS^2=AB^2+SB^2=16+8\times\frac{8}{3}-16=\frac{64}{3}$, d'où $AS=\frac{8\sqrt{3}}{3}=TS=TA$. Le triangle AST est donc équilatéral.

2-30 : *Une fonction*

Olympiades académiques 2002

Trouver les fonctions f de $]0,\ +\infty\,[$ vers $]0,\ +\infty\,[$ qui vérifient :

Pour tout x strictement positif et pour tout y strictement positif :

$$f\left(xf\left(y\right)\right)=yf\left(x\right)\text{ et }\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0\,.$$

On déterminera progressivement des propriétés de f permettant de trouver toutes les solutions.

2-31 : *Sondage*

Olympiades académiques 2001 (http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/maths/olympiad/olympiad01/sujets01.htm)

Un sondage paru dans la presse décrit la population des lecteurs d'un fameux journal du soir en donnant les renseignements suivants donnant le sexe, l'état-civil et la profession des lecteurs :

31,2% sont des hommes,

47% sont mariés,

52,5% sont des étudiants,

4,2% sont des étudiants masculins,

14,7% sont des étudiants mariés,

8,6% sont des hommes mariés,

2,5% sont des étudiants masculins mariés.

Les résultats de ce sondage sont incohérents. Pourquoi ?

2-32 :*Elèves et Notes*

Olympiades académiques 2002 (http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/maths/olympiad/olympiad02/sujets02.htm)

5 candidats se présentent à trois épreuves : Anne, Bertrand, Claude, Damien et Esthelle, en Sciences et Vie de la Terre, en Physique et en Mathématiques.

Attribuer à chaque candidat la note obtenue en Mathématiques.

* En SVT les notes vont de 1 en 1 de 11 à 15, en Physique de 2 en 2 de 6 à 14, en Mathématiques de 2 en 2 de 8 à 16.

* C'est une fille qui a eu la meilleure note en mathématiques.

* Esthelle n'a pas eu 11 ni 13 en SVT. Elle a obtenu 2 points de moins en Physique qu'en Maths.

* Claude a ramené des notes identiques en SVT et en Maths de 2 points supérieures à celle de Physique.

* Anne qui a eu 8 en Physique, a obtenu en SVT un point de moins que l'élève ayant eu 8 en Maths mais un point de plus que l'élève noté 14 en Physique.

* Bertrand, en Physique, a eu 2 points de plus que l'élève qui a eu 12 en SVT mais 2 points de moins que l'élève ayant eu 14 en Maths.

2-33 : *Croissance fractale*

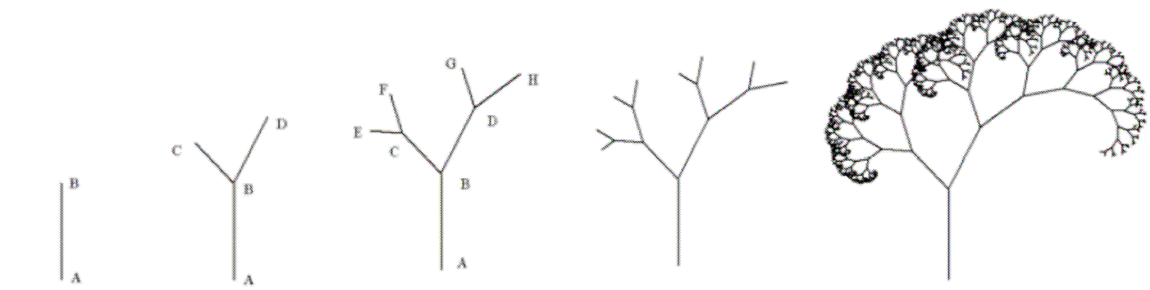
Olympiades académiques 2004

L'unité de longueur est le mètre.

On modélise la croissance d'un arbuste de la façon suivante, illustrée par les dessins ci-dessous.

* L'état initial est représenté par un segment [AB] vertical de longueur 1, le sol est horizontal en A.
* Un an après, deux « branches » ont poussé, représentées par les segments [BC] et [BD].
* L'année suivante, au bout de chacune des « branches » [BC] et [BD], ont poussé deux « branches » représentées par les segments tels que les triangles BCE, BDG et ABC sont semblables, et que les triangles BCF, BDH et ABD sont semblables.
* Le même processus se répète ensuite chaque année.

Exemple de croissance :



Etat initial 1 an 2 ans 3 ans 10 ans

Dans la suite, on suppose que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$, que $CB = 0{,}7$ et que $BD = 0{,}75$.

1. Faire une figure à l'échelle, en prenant 5 cm pour [AB], représentant l'arbre au bout de 3 ans.
2. Avec les notations de l'exemple, donner les hauteurs des points $EFGH$ (extrémités au bout de 2 ans).
3. Si on ne tient pas compte de la durée de vie de l'arbuste, sa taille (hauteur) peut-elle dépasser 3,5 ?

3. Géométrie

3-34 : *Sept d'un coup*

Olympiades académiques 2002

On considère sept points d'un disque de rayon 1 dont les distances mutuelles sont toutes supérieures ou égales à 1. Prouver que l'un de ces points est au centre du disque.

3-35 : *Loi des sinus*

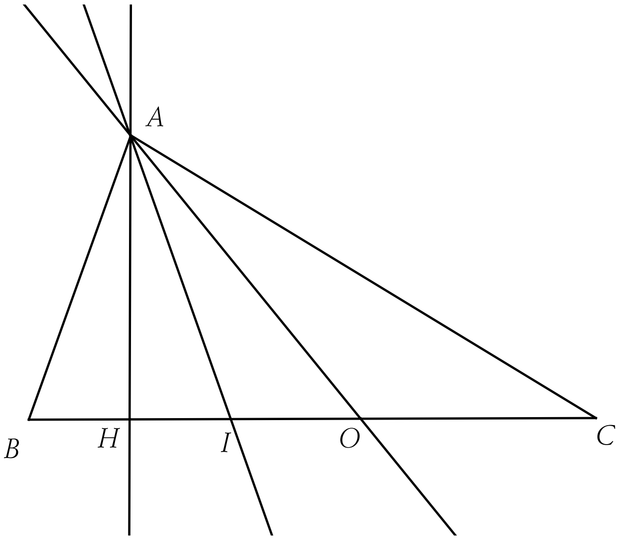
Olympiades académiques 2004

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant : dans tout triangle ABC $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}}$.

Dans un triangle ABC, la hauteur, la bissectrice et la médiane relatives au sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure α.

1. Exprimer en fonction de α, les mesures de tous les angles de la figure.

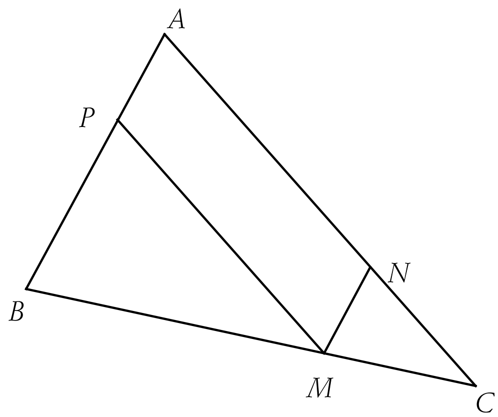
2. Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?



3-36 :Triangle de périmètre donné

Olympiades académiques 2004 (http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/xjeux_mjc.htm)

Un segment de longueur p ($p > 0$) étant donné, on cherche à construire un parallélogramme $ANMP$ ayant pour périmètre $2p$, comme indiqué sur la figure ci-contre, M, N et P appartenant chacun à l'un des côtés du triangle.



On note a la longueur du côté $[BC]$, b celle du côté $[AC]$ et c celle du côté $[AB]$.

On suppose $b \geq c$.

1. Discuter suivant les valeurs de p l'existence d'un tel parallélogramme

* lorsque $b = c$

* lorsque $b > c$.

2. Proposer, lorsque le problème a une solution, une construction.

3-37 : Périmètre et angle

Olympiades académiques 2002, Versailles

On considère un carré $ABCD$ de côté a. Soit E un point fixé de $]BC[$.

1. Montrer qu'il existe un point F de $]CD[$ tel que le périmètre du triangle CFE soit égal à $2a$.

2. Quelle est alors la mesure de l'angle $\widehat{EAF}$?

3-38 : Fonctions et triangles équilatéraux

Olympiades académiques 2004

Dans les trois premières questions on considère les fonctions f définies sur le plan, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant la propriété (P) suivante :

Pour tout triangle équilatéral ABC, on a $f(A)+f(B)+f(C)=1$.

1. Donner un exemple d'une telle fonction.

2. M et N sont deux points distincts.

a. Construire à la règle et au compas deux points A et B tels que les triangles MAB et NAB soient équilatéraux. Expliquer la construction.

b. Prouver que pour une fonction *f* vérifiant la propriété (P), on a $f(M)=f(N)$.

3. Déterminer toutes les fonctions *f* vérifiant la propriété (P).

4. Déterminer toutes les fonctions *f* définies sur le plan, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que pour tout losange *ABCD*, on ait : $f(A)+f(B)+f(C)+f(D)=1$.

Correction

1. La fonction constante définie pour tout point point *M* par $f(M)=\dfrac{1}{3}$ est un tel exemple.

2. a. Pour une telle configuration, on a $AM=BM=AB=AN=BN$. Les points *A* et *B* sont donc équidistants de *M* et *N*, par conséquent *A* et *B* se trouvent sur la médiatrice du segment [*MN*]. Par ailleurs, le triangle *AMN* est isocèle en *A* et comme $\widehat{MAN}=\widehat{MAB}+\widehat{BAN}=60^\circ+60^\circ=120^\circ$, on déduit $\widehat{AMN}=\dfrac{180-120}{2}=30^\circ$, la moitié d'un angle de 60°. De là, la construction des points *A* et *B* est claire…

On construit d'abord la droite *d* médiatrice de [*MN*]. On construit ensuite un point intermédiaire *R* tel que le triangle *MNR* soit équilatéral. On construit la bissectrice de l'angle $\widehat{RMN}$. Un des deux points cherchés, par exemple *A* sera l'intersection de cette bissectrice avec la droite *d*. On finit par construire (avec le compas) le point *B* sur *d,* de l'autre côté de (MN), tel que $AB=AM$.

b. Si *f* est une fonction vérifiant la propriété (P), les triangles *MAB* et *NAB* étant équilatéraux, on a $f(M)+f(A)+f(B)=1$ et $f(N)+f(A)+f(B)=1$.

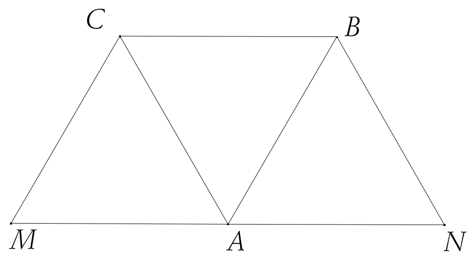
Par soustraction on obtient $f(M)-f(N)=0$ soit $f(M)=f(N)$.

3. Pour tous points *M et N*, on a $f(M)=f(N)$ (cela veut dire que *f* est une fonction constante).

Dans le triangle équilatéral *MAB*, $f(M)=f(A)=f(B)$, $f(M)+f(A)+f(B)=1$ et $f(M)+f(A)+f(B)=1$ devient $3f(M)=1$, d'où $f(M)=\dfrac{1}{3}$.

Cela veut dire qu'il existe une seule fonction vérifiant (P), à savoir la fonction constante définie pour tout point *M* par $f(M)=\dfrac{1}{3}$.

4. Soit *f* une telle fonction. Soient *M* et *N* deux points distincts, *A* le milieu de [*MN*] et *B* et *C* les points tels que les triangles *CAM* et *ABC* soient équilatéraux (voir figure).



Il est facile de prouver que *MABC* et *NBCA* sont des losanges et par conséquent :

$f(M)+f(A)+f(B)+f(C)=0$ et $f(N)+f(B)+f(C)+f(A)=1$ et par soustraction on obtient $f(M)-f(N)=0$ soit $f(M)=f(N)$.

Ceci étant valable pour tous points *M* et *N,* on a $f(M)=f(A)=f(B)=f(C)$ et $f(M)+f(A)+f(B)+f(C)=0$ devient $4f(M)=1 \Leftrightarrow f(M)=\dfrac{1}{4}$.

Il est aisé de voir que la fonction ainsi définie vérifie la condition requise, donc la fonction constante f définie par $f(M)=\dfrac{1}{4}$ est la seule vérifiant la condition donnée.

3-39 : Aires égales…

Olympiades académiques 2004

ABC est un triangle quelconque. I est un point du segment $[AC]$.

Déterminer puis construire le ou les points J de (BC) tels que la droite (IJ) partage le triangle en deux parties de même aire.

3-40 : Triangle à deviner

Olympiades académiques 2004, Corse

Soit ABC un triangle ; on définit les trois points P, Q et R par $\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CR}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{CA}$.

1. On se donne les trois points P, Q et R ; construire le triangle ABC.
2. Généralisation…

3-41 : Distances dans le plan

Olympiades académiques 2003

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan tels que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD, ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y.

C'est par exemple le cas lorsque $ABCD$ est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1. Étude du cas « 1−5 » où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y, $(x \neq y)$.

Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessiner cette configuration.

2. Étude du cas « 2−4 » où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y, $(x \neq y)$.

On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun. Quelle configuration obtient-on ? La dessiner.

3. Que se passe t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?
4. Étudier le cas « 3−3 » .

3-42 : Lieu de points et aire maximale

Olympiades académiques 2002

C_1 et C_2 sont deux cercles de centres distincts O_1 et O_2 et de rayons distincts R_1 et R_2, tangents extérieurement en un point A.

On appelle B le point de C_1, diamétralement opposé à A.

A tout point M de C_1, distinct de A et de B, on associe le point M' de C_2 tel que le triangle MAM' soit rectangle en A.

1. Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe lorsque M décrit le cercle C_1 privé de A et de B.
2. On appelle J le milieu du segment $[MM']$. Déterminer le lieu de J lorsque M décrit le cercle C_1 privé de A et de B.
3. Quelle doit être la position de M pour que l'aire du triangle MAM' soit maximale ?

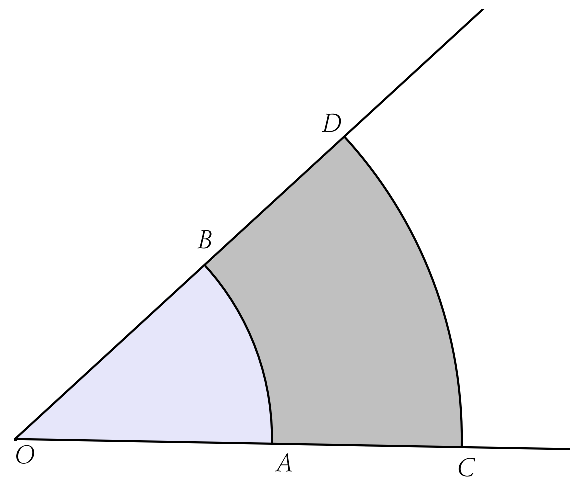
3-43 : Arcs de cercles concentriques

Olympiades académiques 2003, Nancy

Les deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ sont centrés en O, A appartient à $]OC]$ et B appartient à $]OD]$.

On note :

- S_1 l'aire du domaine (OAB),
- S_2 l'aire du domaine ($ABDC$),
- P_1 le périmètre du domaine (OAB),
- P_2 le périmètre du domaine ($ABDC$),
- α une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$, $0 < \alpha \leq \pi$.



1. On suppose que $S_1 = S_2$ et $P_1 = P_2$.
Déterminer la mesure α .

2. On suppose que : $S_1 = S_2$.

Existe-t-il une valeur de α pour laquelle le rapport des périmètres $\frac{P_2}{P_1}$ est maximum ? minimum ?

3. On suppose que : $P_1 = P_2$.

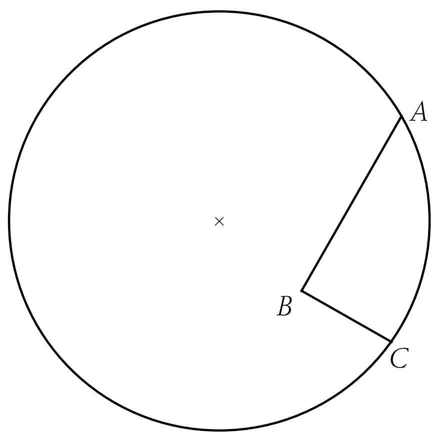
Existe-t-il une valeur de α pour laquelle le rapport des aires $\frac{S_2}{S_1}$ est maximum ? minimum ?

3-44 : Cercle et distance

Olympiades académiques 2001, Strasbourg

Un disque de rayon $\sqrt{50}$ cm est découpé comme l'indique la figure.

On donne $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm et l'angle $\widehat{ABC}$ est droit.
Calculer la distance de B au centre du disque.



3-45 : Longueurs de cordes

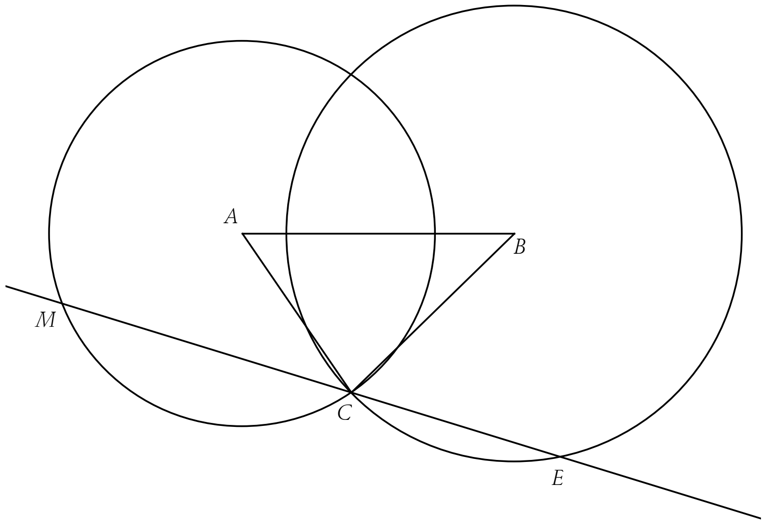
Olympiades académiques 2004, Orléans

1. Prouver que pour tous réels a et b,
$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$.

2. Étant donné un triangle ABC, on note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre A et passant par C et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre B et passant par C.

Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ distinct de C. La droite (MC) recoupe $\mathcal{C}_2$ en E.

Construire M pour que le produit des distances $CM.CE$ soit maximum.



3-46 : Lieu de points

Olympiades académiques 2003, Poitiers

Soit un segment $[AB]$ de longueur 4. Un point O peut se déplacer sur $[AB]$.

O est l'origine d'une tige articulée constituée de deux segments $[OI]$ et $[IJ]$:

* $OI = 5$ et $[OI]$ peut pivoter librement autour de O.
* $IJ = 1$ et $[IJ]$ peut pivoter librement autour de I.

1. Déterminer et représenter l'ensemble D des positions que peut prendre le point J lorsque O est en A.

2. Déterminer et représenter l'ensemble E des positions que peut prendre le point J lorsque O se déplace sur $[AB]$.

3. Quelle est l'aire de E ?

3-47 : Aires de cercles

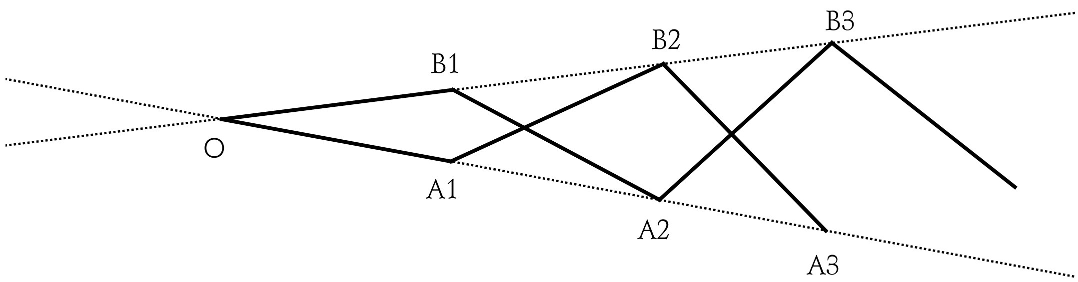
Olympiades académiques 2002, Poitiers

Soit un carré $ABCD$ de côté a. Un cercle Γ, intérieur au carré, est tangent à (AB) et (AD). Un second cercle Γ', intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD).

Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ' : quelles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

3-48 : Les allumettes

Olympiades académiques 2004



On dispose de sept allumettes, toutes de la même longueur, qu'on assimilera pour l'occasion à 7 segments de même longueur, disposés comme indiqué sur le dessin.

La septième allumette n'a pas encore trouvé sa place. Trouver la valeur de l'angle $\alpha = \widehat{A_1OB_1}$ pour que cette septième allumette relie exactement A_3 et B_3.

Si on dispose de $2n+1$ alumettes peut-on généraliser ?

3-49 : Angle de tir

Olympiades académiques 2004

On s'intéresse à l'angle de tir $\widehat{P_1JP_2}$ d'un joueur J sur un terrain de football. On précise que pour la plupart des matches internationaux le terrain est un rectangle de longueur et largeur respectives 105 m et 68 m et les poteaux des cages P_1 et P_2 distants de 7,32 m ; valeurs que l'on adoptera pour cet exercice.

1. Quel est l'angle de tir arrondi au dixième de degré pour :

 * un gardien de buts placé au milieu de sa cage et tirant dans les cages opposées à celles qu'il défend ?

 * un joueur situé au point de pénalty (situé à 11 m du milieu des cages, et équidistant des deux poteaux) ?

2. Représenter sur une feuille à l'échelle 1/500 le terrain de football, les cages ainsi que des lignes de niveau où l'angle de tir est constant ; on donnera les valeurs approchées des angles correspondants au dixième de degré. On représentera, en particulier, l'ensemble des points du terrain :

 * où l'angle de tir est droit,

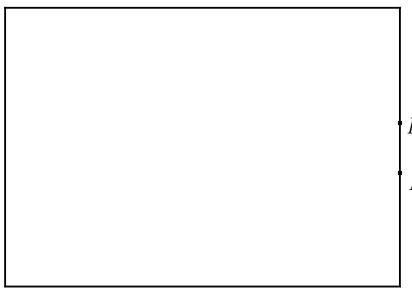
 * où il est identique à ceux de la question 1.

Déterminer la zone du terrain où l'angle de tir est supérieur à l'angle droit.

3. Excepté sur la ligne de sortie (P_1P_2), peut-on placer un joueur pour lequel l'angle de tir serait inférieur à celui obtenu au point le plus éloigné du gardien ?

Si tel est le cas, le placer sur la figure réalisée à la question 2.

4. Le joueur J se déplace sur la ligne de touche (CC') (CC' désigne une longueur du terrain, C étant un point de corner situé sur (P_1P_2) ; voir la figure ci-contre).



On appelle x la longueur CJ $(0 \le x \le 105)$.

a. Exprimer $\cos\widehat{P_1JP_2}$ en fonction de x, $d_1 = CP_1$ et $d_2 = CP_2$.

(Les calculs seront plus simples au b. en gardant d_1 et d_2 plutôt que les valeurs numériques.)

b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'angle de tir est maximal.

Il n'est pas rare de marquer un but de cette position, Ronaldinho en a marqué un, dans une position proche, lors de la coupe du monde 2002.

3-50 : Des carrés

Olympiades académiques 2003 : http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/xjeux_mjc.htm

Etant donné un triangle ABC rectangle en A, on note : $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

On veut construire deux carrés inscrits dans ce triangle : le premier ayant A pour sommet, le second ayant un côté porté par l'hypoténuse.

1. Expliquer pour chacun d'eux comment réaliser la construction.

2. Exprimer les côtés x et y de ces deux carrés en fonction de b et c puis comparer leur aire.

3-51 : Les abeilles

Olympiades académiques 2003 : http://webetab.ac-bordeaux.fr/Pedagogie/Maths/elv/jeux/xjeux_mjc.htm

Les abeilles ont à déposer leur miel dans des alvéoles disposées sur une surface plane donnée.

Elles vont paver cette surface au moyen de polygones réguliers juxtaposés, tous identiques.

a. Quelles sont les trois formes qu'elles peuvent choisir pour réaliser ce pavage ? (on ne justifiera pas la réponse).

b. La construction de ces alvéoles doit être la plus économique possible.

À aire égale, quel est, parmi les trois polygones réguliers possibles, celui qui a le plus petit périmètre.

3-52 : Polygones convexes

Olympiades académiques 2004, Corse

Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe à n côtés. Soit $B_1B_2\dots B_n$ le polygone dont les sommets sont les milieux des côtés du polygone $A_1A_2\dots A_n$. On cherche à étudier le rapport de l'aire de $A_1A_2\dots A_n$ par l'aire de $B_1B_2\dots B_n$.

1. Etude du cas des polygones réguliers.

Démontrer que si $A_1A_2\dots A_n$ est un polygone régulier, alors $B_1B_2\dots B_n$ est un polygone régulier, et calculer le rapport des aires de $A_1A_2\dots A_n$ et de $B_1B_2\dots B_n$ en fonction de n.

2. Etude des polygones convexes quelconques.

a. Etude du cas $n = 3$. Démonter que le rapport des aires de $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ est constant et calculer ce rapport.

b. Etude du cas $n = 4$. Démonter que le rapport des aires de $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ est constant et calculer ce rapport.

c. Ce rapport est-il constant pour tous les polygones convexes à 5 côtés ?

3-53 : Polygones réguliers

Olympiades académiques 2003, Versailles

Dans tout ce qui suit, les polygones considérés sont convexes ; pour chaque sommet S d'un polygone, on notera $\hat{S}$ l'angle intérieur $\widehat{RST}$, où R et T sont les sommets voisins de S.

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que :

   * La diagonale $[AC]$ divise chacun des angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ en deux angles égaux,

   * La diagonale $[BD]$ divise chacun des angles $\hat{B}$ et $\hat{D}$ en deux angles égaux.

a. Prouver que $ABCD$ est un losange.

b. Le losange $ABCD$ est-il nécessairement un carré ?

2. Soit maintenant un pentagone $ABCDE$ tel que les deux diagonales issues du sommet A (respectivement B, C, D et E) divisent l'angle $\hat{A}$ (respectivement $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ et $\hat{E}$) en trois angles égaux.

Prouver que $ABCDE$ est un pentagone régulier.

3. Soit enfin $A_1A_2\dots A_{2003}$ un polygone à 2003 sommets tel que pour chaque sommet A_i, les 2000 diagonales issues de A_i divisent l'angle en 2001 angles égaux $\widehat{A_i}$.

Prouver que le polygone $A_1A_2\dots A_{2003}$ est un polygone régulier.

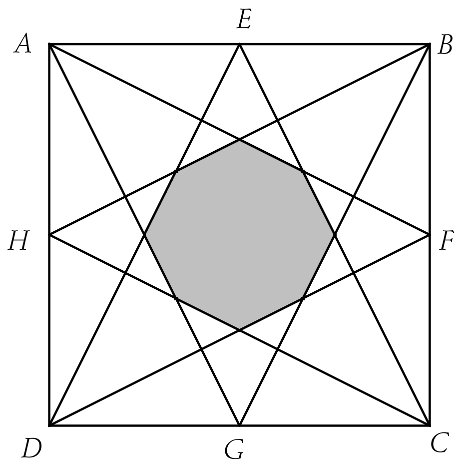
3-54 : Octogone

Olympiades académiques 2002, Nancy

ABCD est un carré de côté 1. *E*, *F*, *G* et *H* sont les milieux des côtés du carré.

1. Montrer que l'octogone central a 8 côtés égaux. Est-il régulier ?

2. Calculer l'aire de cet octogone.



3-55 :Le parasol

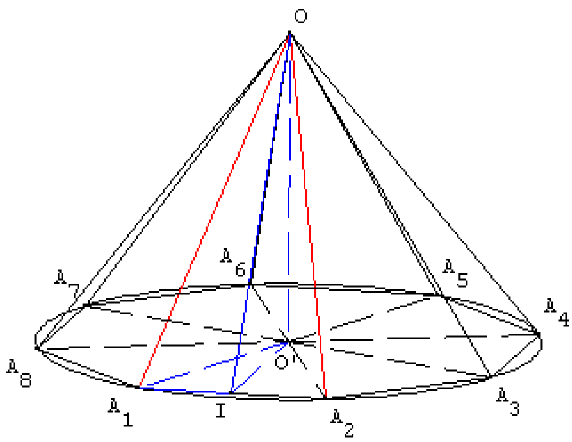
Olympiades académiques 2004, Créteil

A une terrasse de café, sous un parasol moderne aux tiges en bois bien droites, par un bel après-midi ensoleillé, Yves et quelques-uns de ses camarades de classe parlent du devoir à la maison qu'ils doivent rendre prochainement. Ce devoir de mathématiques a pour objectif de trouver le nombre de solides réguliers dans l'espace.

Yves réalise que la première question du devoir revient à montrer que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à 2π radians.

En effet, puisque les tiges sont droites, toutes de même longueur, que l'angle formé par deux tiges consécutives est toujours le même et que les extrémités des tiges toutes situées dans un même plan perpendiculaire au piquet du parasol forment un polygone régulier, Yves explique à ses camarades qu'il est évident que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à 2π radians. Ils lui demandent pourquoi.

Ses réponses n'étant pas suffisamment convaincantes, il compte alors le nombre de tiges du parasol et fait le dessin suivant :



Il note O le sommet du parasol, A_1, A_2,A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 les extrémités des tiges, O' le centre de l'octogone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ et I le milieu du segment $[A_1A_2]$. Puis il présente son raisonnement :

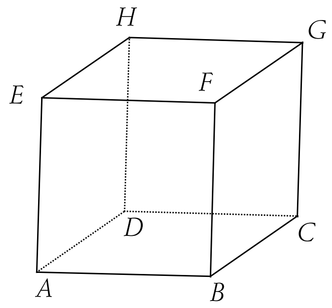
« Si nous montrons que les triangles A_1IO' et A_1IO sont rectangles en I et que l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ est inférieur à l'angle $\widehat{A_1O'A_2}$, nous en déduirons facilement que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à 2π radians. »

1. Proposer une explication qui pourrait convaincre les camarades d'Yves.

2. Justifier son raisonnement.

Puis Yves revient au problème et développe son idée :

« Un solide de l'espace est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques. Par exemple un cube est un solide régulier à faces carrées.



(1) Si un polygone régulier a n sommets ($n \geq 3$), chaque angle au sommet mesure $\pi - \frac{2\pi}{n}$ radians.

On sait que l'angle formé par deux arêtes consécutives est égal à chacun des angles au sommet des polygones réguliers constituant les faces du solide et que les extrémités des arêtes issues d'un même sommet sont, comme celles des tiges du parasol, toutes dans un même plan et forment un polygone régulier.

En notant p le nombre d'arêtes issues d'un des sommets d'un solide régulier dont les faces ont n côtés*, on a alors $p \geq 3$ et on peut montrer que

$$(2)\ p\left(1-\frac{2}{n}\right) < 2 \text{ puis que } \frac{1}{p}+\frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

(3) Alors on en déduira facilement le nombre maximum de solides réguliers que l'on pourrait avoir dans l'espace ;

(4) et en fonction des valeurs trouvées pour n et p on pourra reconnaître quelques-uns de ces solides. »

3. Démontrer les affirmations (1) ; (2) ; (3) et (4).

**(par exemple pour le cube p=3 et n=4).*

3-56 :Distances

Olympiades académiques 2003

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts *A, B, C, D* du plan tels que leurs distances mutuelles *AB, AC, AD, BC, BD, CD*, ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y. C'est par exemple le cas lorsque *ABCD* est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1. Étude du cas (1, 5) où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y.

Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessiner cette configuration.

2. Étude du cas (2, 4) où deux des distances sont égales à x et les quatre autres à y.

a. On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet en commun. Quelle configuration obtient-on ? La dessiner.

b. Que se passe-t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet commun ?

c. Etudier le cas (3, 3).

3-57 : Somme des distances d'un point aux sommets d'un polygone

Olympiades académiques 2004, Strasbourg

On dit qu'un polygone est régulier convexe si :

* tous ses côtés ont même longueur.

* tous ses angles aux sommets ont même mesure.

* tous les segments joignant deux sommets quelconques sont à l'intérieur du polygone.

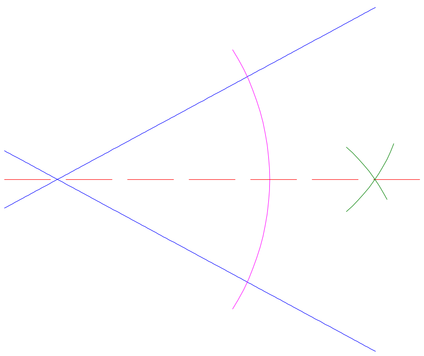
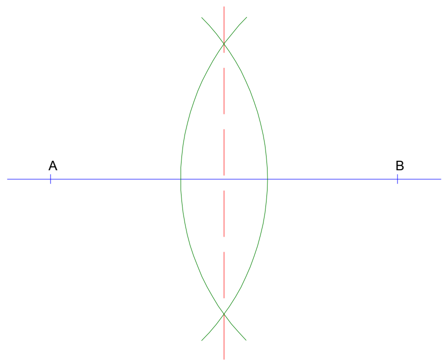
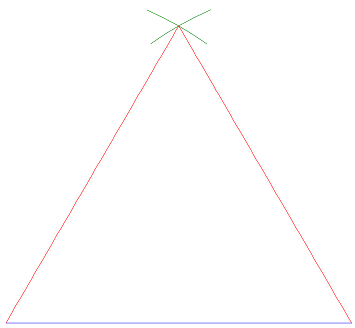
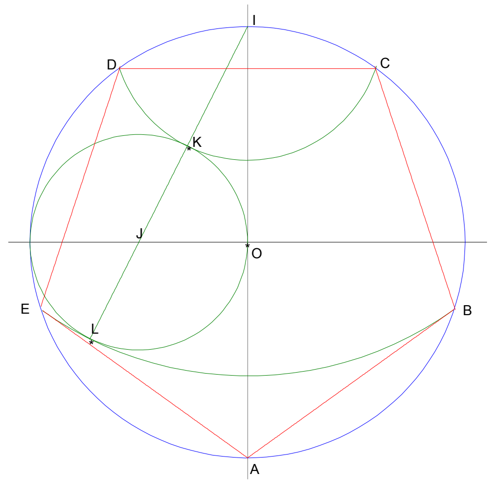
On désire étudier la somme S des distances d'un point M, intérieur à un polygone régulier convexe P, à chaque côté de P.

1. Vérifier que S est indépendante de M dans le cas où P est un carré.
2. Etudier de même le cas où P est un triangle équilatéral.
3. Généraliser cette étude au cas où P est un polygone régulier convexe à n côtés, $n \geq 3$.

3-58 :A la règle et au compas

Olympiades académiques 2004 (corrigé : http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/Olympiades-1S/index.htm)

Avec un compas et une règle non graduée, on sait faire beaucoup de choses ; ainsi

Tracer une bissectrice de deux droites 	Tracer la médiatrice de deux points 
Tracer un triangle équilatéral 	Et même tracer un pentagone régulier 

On sait faire bien d'autres choses encore mais pas tout …

Ainsi, les Grecs ont en vain essayé de chercher une construction de trisection de l'angle : au lieu de diviser un angle en deux parties égales (la " bissection "), ils voulaient diviser l'angle en trois parties égales (la " trisection ").

Il a fallu attendre beaucoup plus tard (XIX$^{\text{ième}}$ siècle) pour démontrer que ce n'est pas toujours possible : par exemple, il est impossible avec une simple règle non graduée et un compas de partager un angle de 60° en trois parties égales.

Ayant pu tracer un triangle équilatéral, on sait donc tracer un angle de 60° uniquement avec une règle (non graduée) et un compas. On dit qu'un angle de 60° est "constructible à la règle et au compas".

A l'aide de tous les renseignements donnés dans cette présentation, répondez aux questions suivantes :

Question 1 : peut-on construire à la règle et au compas un angle de 45° ? de 10° ?

Question 2 : quel est le plus petit angle non nul dont la mesure est un nombre entier positif de degrés et qui est " constructible à la règle et au compas " ?

3-59 :La table de jardin

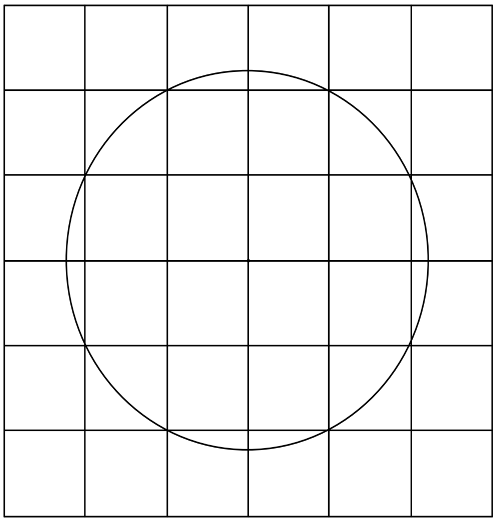
Olympiades académiques 2003

René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec de très belles dalles carrées de 0,5 m de côté. Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés dans le sol. Tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent…

Mais René est aussi bricoleur soigneux ; alors pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation.

La figure ci-contre donne un exemple de table à 8 pieds.



Si n désigne le nombre de pieds de la table et d son diamètre exprimé en mètres, on définit le coefficient de solidité s de la table par la formule $s = \frac{n}{d}$. Une table est d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

1. Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci-dessus.

2. Quelles sont les deux tables les plus petites ? Préciser leur coefficient de solidité.

3. Quel est le coefficient de solidité maximal d'une table à 12 pieds ?

4. Quelle est la table la plus solide ?

5. René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre exprimé en mètres est un nombre entier ?

3-60 :Au croisement des cordes

Olympiades académiques 2003

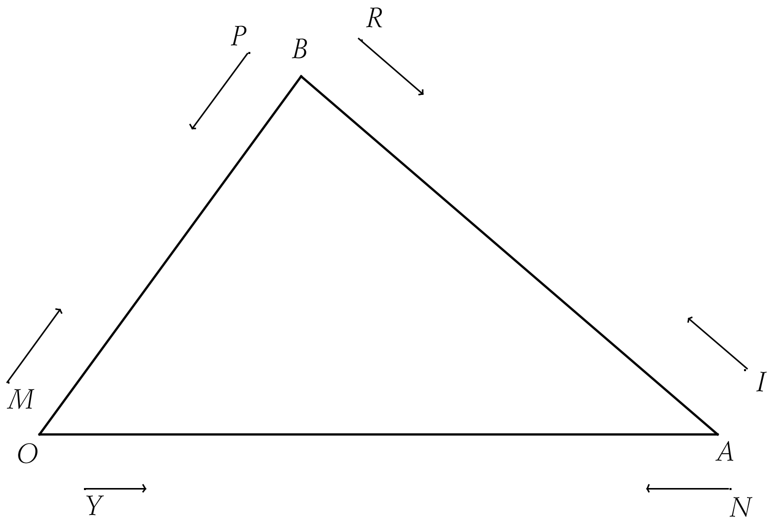
Toute idée ou élément de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés seront pris en compte, même s'ils ne conduisent pas à une solution.

Aux trois coins O, A, B d'une cour triangulaire représentée ci-dessus, se trouvent respectivement **M**onique et **Y**ves, **N**icole et **I**sabelle, **R**ené et **P**ierre.

Sur les cotés [OA], [AB] et [BO] sont respectivement dessinées trois marques matérialisant les points des droites (OA), (AB) et (BO) les plus proches de B, O et A.

Yves et Nicole courent l'un vers l'autre à la même vitesse le long de [OA], en tenant chacun à la main une corde attachée au pied d'un poteau en B, et s'arrêtent dès que Yves a atteint la marque située sur [OA].

Isabelle et René font de même le long de [AB] et Monique et Pierre le long de [BO], les deux premiers tenant chacun une corde attachée au pied d'un poteau en O et les deux derniers une corde attachée au pied d'un poteau en A. C'est toujours le garçon qui s'arrête à la marque.



Lorsqu'ils sont tous arrêtés les trois garçons tendent leurs cordes à ras de terre et les trois filles aussi.

1. Reproduire la figure et la compléter en représentant les six cordes dans leur position finale.
2. Les cordes des trois garçons se croisent-elles en un même point ? Pourquoi ?
3. Les cordes des trois filles se croisent-elles en un même point ? Pourquoi ?

3-61 :Tangentes

Olympiades académiques, 2002

On considère trois points A, B et C alignés dans cet ordre sur une droite $(\mathcal{D})$. Soit O le milieu du segment $[BC]$. On appelle $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[BC]$.

Un cercle variable (Γ) passant par les points O et A recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en P et Q.

Les tangentes en P et Q au cercle $(\mathcal{C})$ se coupent en T.

1. Quel est l'ensemble des points T ?
2. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle APQ. Quel est l'ensemble des points I ?

3-62 :Tetris

Olympiades académiques, 2002

On dispose :

* d'un damier carré formé de 10×10 petits carrés identiques,

* d'une pièce d'un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un côté neuf petits carrés identiques à ceux du damier.

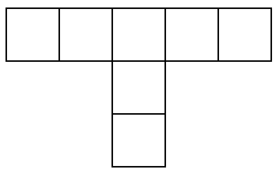
Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce sur le damier en respectant les règles suivantes :

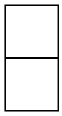
* chaque exemplaire peut être tourné ou retourné,

* chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier,

* deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.

1. Dessiner l'une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-dessous :





2. Montrer que, quelle que soit la forme de la pièce au départ, il est possible de poser deux exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci-dessus.

3. Peut-on dans la question précédente remplacer deux par trois, par quatre, par cinq, etc… ?

3-63 : Volumes de tétraèdres

Olympiades académiques 2003, Orléans

L'unité de longueur est 1cm , l'unité de volume est 1 cm^3. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle pour lequel les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles et $AE = BF = CG = DH = 3$. D'autre part $AB = 1$ et $AD = 2$.

1. On considère dans cette question les tétraèdres $MNPQ$ dont les sommets sont des sommets du parallélépipède $ABCDEFGH$.

a. Déterminer tous ceux dont le volume est exactement 1.

b. On démontre, dans les cours de dénombrement, qu'il y a 70 tétraèdres distincts dont les sommets sont des sommets du parallélépipède $ABCDEFGH$: certains sont plats et leur volume est alors 0 cm^3 (par exemple $ABCD$).

Déterminer les différentes valeurs prises par le volume du tétraèdre $MNPQ$ et pour chacune d'elles le nombre de tétraèdres qui la fournissent.

2. On considère dans cette question les tétraèdres $MNPQ$ dont les sommets sont sur des segments d'arête du parallélépipède $ABCDEFGH$.

Déterminer ceux dont le volume est maximal et calculer ce volume maximal.

3-64 : Faces d'un octaèdre

Olympiades académiques 2002, Orléans

Deux pyramides de même base carrée $ABCD$, de sommets respectifs E et F distincts, sont accolées par leur base et forment un octaèdre régulier, c'est-à-dire un solide formé de huit faces identiques qui sont des triangles équilatéraux. On suppose que $AB = 1$.

Montrer que les faces ABE et CDF sont parallèles et déterminer leur distance, c'est-à-dire la plus courte distance d'un point du plan ABE à un point du plan CDF.

3-65 :Tétraèdre

Olympiades académiques, 2001

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4. Le dé est posé sur une table, face 1 contre cette table. Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base. A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme S de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le 1 initial.

1. Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour S.

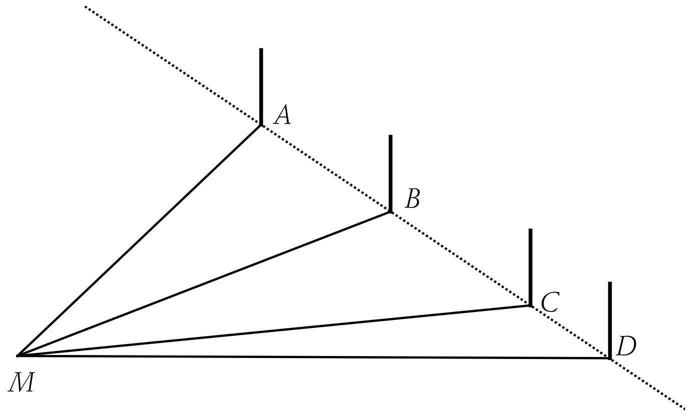
2. La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces deux valeurs ?

3-66 :Terrain de jeu

Olympiades académiques, 2001

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux en A, B, C et D dans cet ordre. Ces poteaux délimitent trois buts de largeur : $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = d$, où d est une longueur donnée.

Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMD}$ égaux.



3-67 :Volumes dans un cube

Olympiades académiques, 2001

Dessiner un cube C (un dessin même approximatif en perspective suffira). Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est à dire tel que le milieu du segment $[AB]$ soit le centre du cube.

Considérons un autre cube C' admettant aussi (A, B) comme couple de sommets opposés. Certaines arêtes de C rencontrent des arêtes de C'.

1. Justifier le fait que, en dehors de A et B, on obtient ainsi six points d'intersection entre une arête de C et une arête de C'. Placer l'un d'eux sur le dessin et expliquer comment placer alors les cinq autres.

2. v étant le volume de C, quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes C et C' ?