# Secrétariat



## *1. France, juin 2006*

Une boutique spécialisée dans la vente de DVD a récemment ouvert un site Internet de location en ligne. Afin d'évaluer la pertinence de ce choix, le service commercial vous demande d'évaluer :

- le nombre de connexions durant la 10ème semaine.
- Le nombre de semaines nécessaires pour que le nombre total de connexions depuis l'ouverture du site soit supérieur à 20 000.

Vous disposez d'un tableau indiquant le nombre d'internautes qui se sont connectés sur le site au cours des cinq premières semaines.

| Semaine | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de connexions | 278 | 495 | 724 | 944 | 1 153 |

**Première partie (5 points)**

On considère que la suite numérique formée des nombres successifs de connexions est proche du modèle mathématique suivant :

| Semaine | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Terme $U_n$ | $U_1 = 280$ | 500 | 720 | 940 | 1 160 |

1. Montrer que $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$, $U_5$ sont les cinq premiers termes d'une suite arithmétique $(U_n)$, et préciser sa raison.

2. a. Donner l'expression de $U_n$ en fonction de $n$.

b. Montrer que $U_n$ peut s'écrire : $U_n = 200n + 60$.

3. Calculer $U_{10}$.

4. Montrer que la somme des $n$ premiers termes de cette suite peut s'écrire sous la forme $S_n = \dfrac{n(340+220n)}{2}$ et plus simplement sous la forme $S_n = 110n^2 + 170n$.

**Deuxième partie (13 points)**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 15] par : $f(x) = 110x^2 + 170x$ .

1. Calculer $f'(x)$ où $f'$ est la dérivée de la fonction $f$.

2. Monter que résoudre $f'(x) > 0$ revient à résoudre l'inéquation $22x + 17 > 0$. Résoudre cette inéquation.

3. Compléter le tableau de variation sur l'annexe.

4. Compléter le tableau de valeurs sur l'annexe.

5. Tracer la représentation graphique C de la fonction $f$ dans le repère de l'annexe, où trois points sont déjà placés.

6. Déterminer graphiquement la solution de l'équation $f(x) = 20\,000$. Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

7. On admet que l'équation $f(x) = 20\,000$ peut s'écrire : $11x^2 + 17x - 2\,000 = 0$ .

Résoudre cette dernière équation sur l'intervalle [0 ; 15]. Arrondir à l'unité.

**Troisième partie (2 points)**

En utilisant les résultats précédents et en supposant que la tendance se poursuivre :

1. Donner le nombre de connexions prévisibles la 10ème semaine.

2. Indiquer le nombre de semaines à l'issue desquelles le nombre total de connexions aura dépassé 20 000.

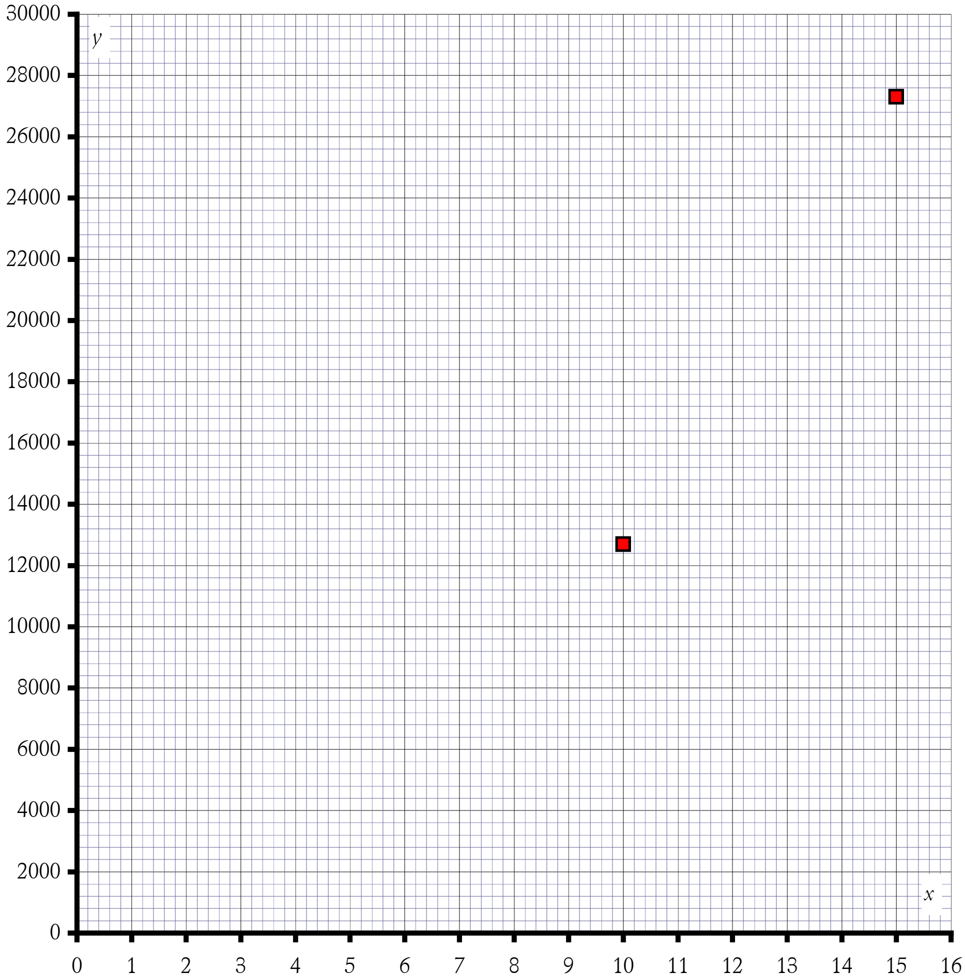
**DOCUMENT À RENDRE AVEC LA COPIE**

Tableau de variation de la fonction $f$

| $x$ | 0 15 |
|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | + |
| Sens de variation de $f$ | |

Tableau de valeurs de la fonction $f$

| $x$ | 0 | 2 | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | | | | 12 700 | | 27 300 |



## *2. France, septembre 2005*

**Première partie (11 points)**

La chambre des notaires de Paris a relevé dans le tableau ci-dessous l'évolution du prix du $m^2$ des appartements de 5 pièces et plus à Paris et en proche banlieue.

| Semestres | Paris (euros/$m^2$) | Proche banlieue (euros/$m^2$) |
|---|---|---|
| 2ème semestre 1998 | 2 800 | 1 800 |
| 1er semestre 1999 | 3 100 | 1 900 |
| 2ème semestre 1999 | 3 200 | 1 950 |
| 1er semestre 2000 | 3 400 | 2 000 |
| 2ème semestre 2000 | 3 900 | 2 050 |
| 1er semestre 2001 | 4 100 | 2 145 |
| 2ème semestre 2001 | 4 200 | 2 200 |
| 1er semestre 2002 | 4 300 | 2 400 |
| 2ème semestre 2002 | 4 200 | 2 500 |

1. On souhaite comparer pour ces appartements les prix du $m^2$ à Paris et en proche banlieue au 2ème semestre 2002.

a. Calculer pour ces appartements la différence de prix du $m^2$ entre Paris et la proche banlieue au 2ème semestre 2002.

b. Quel pourcentage du prix du $m^2$ en proche banlieue au 2ème semestre 2002 cette différence représente-t-elle ?

2. a. En prenant pour base 100 le 2ème semestre 1998, calculer l'indice des prix du $m^2$ au 2ème semestre 2002 à Paris.

b. Même question pour la proche banlieue. Arrondir à l'unité.

3. On a tracé en annexe 1 quatre points du nuage de points $M(x_i\,;\,y_i)$ correspondant au tableau ci-dessous relatif à l'évolution du prix du $m^2$ des appartements de 5 pièces ou plus en proche banlieue.

| Semestres : $x_i$ | **1** | 2 | 3 | **4** | 5 | 6 | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prix : $y_i$ | **1 800** | 1 900 | 1 950 | **2 000** | 2 050 | 2 145 | **2 200** | **2 400** | **2 500** |

Compléter ce nuage en plaçant les cinq points associés aux coordonnées en gras dans ce tableau.

4. On veut obtenir un ajustement affine de cette série chronologique.

a. Calculer les coordonnées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ du point moyen G de cette série.

b. On admet que la série chronologique peut être ajustée par une droite qui passe par le point G et le point A de coordonnées (9 ; 2 435). Tracer la droite (GA).

c. Montrer que la droite (GA) a pour équation $y = 82{,}5x + 1\,692{,}5$ .

d. En supposant que la tendance se confirme, utiliser l'équation établie précédemment pour déterminer le prix du $m^2$ au second semestre de l'année 2003.

e. Vérifier graphiquement le résultat obtenu à la question d. Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

**Deuxième partie (9 points)**

Dans une seconde étude la chambre des notaires de Paris a relevé le prix au m$^2$ de 260 appartements vendus à Paris depuis le 1$^{er}$ janvier 2002. Les résultats sont consignés dans le tableau de l'annexe 2.

1. Dans cette question on fait l'approximation suivante : les valeurs d'une même classe sont égales au centre de la classe. Déterminer le prix moyen du m$^2$ en euros à l'unité.

2. On suppose dans la suite que les valeurs d'une même classe sont uniformément réparties dans la classe.

a. Compléter le tableau de l'annexe 2.

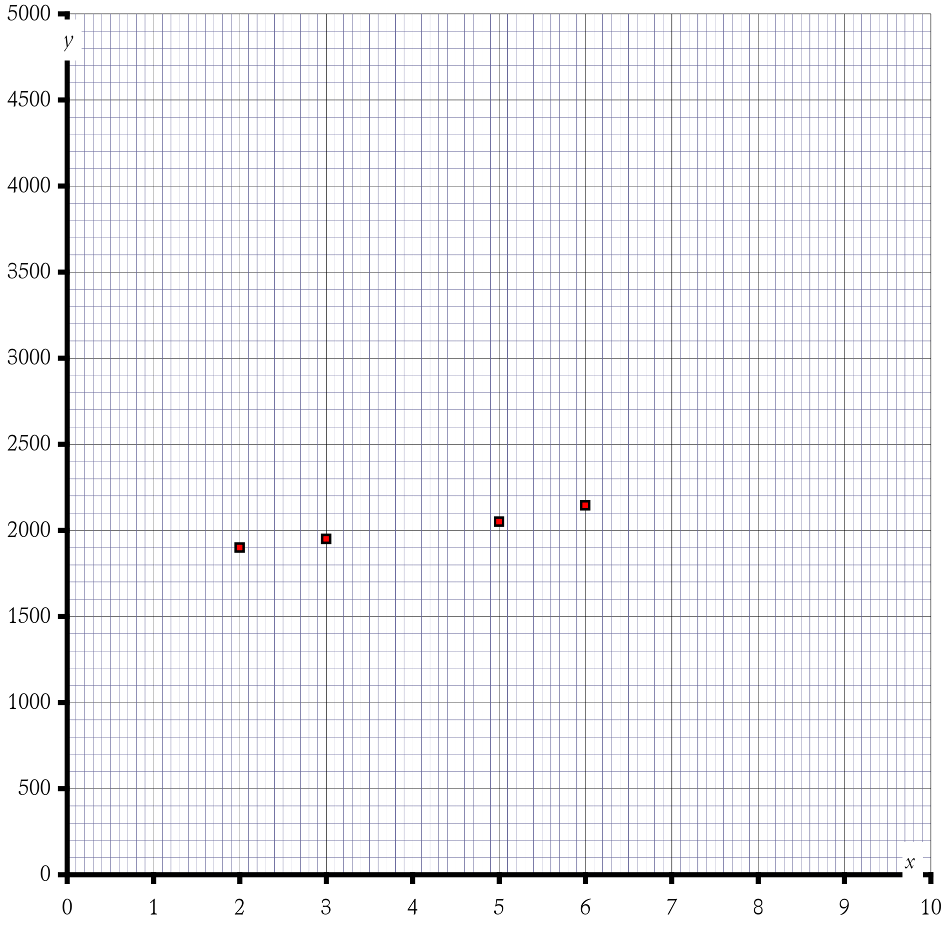
b. Représenter dans le repère de l'annexe 2 le polygone des effectifs cumulés croissants.

c. Déterminer graphiquement le prix moyen médian du m$^2$. Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

d. Rédiger une phrase donnant la signification du prix médian trouvé dans la question précédente.

3. Déterminer graphiquement le pourcentage d'appartements dont le prix du m$^2$ est inférieur au prix moyen obtenu à la question 1. Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

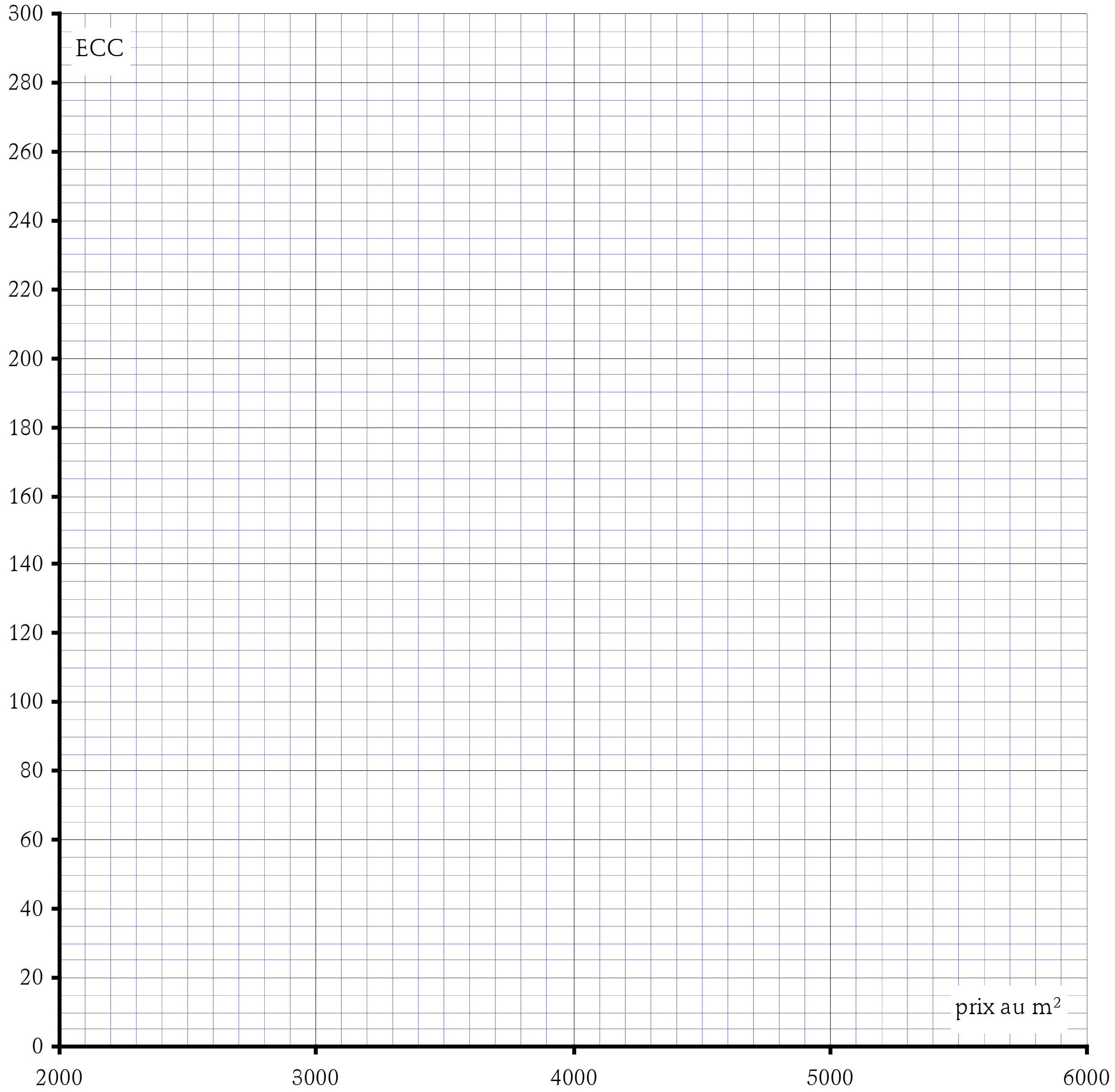
**Annexe 1 à rendre avec la copie**




**Annexe 2**

| Classe : prix au m$^2$ (en euros) | Effectif : nombre d'appartements vendus | Effectifs cumulés croissants |
|---|---|---|
| [2 000 ; 2 500[ | 66 | |
| [2 500 ; 3 000[ | 58 | |
| [3 000 ; 3 500[ | 44 | |

| | | |
|---|---|---|
| [3 500 ; 4 000[ | 41 | |
| [4 000 ; 4 500[ | 38 | |
| [4 500 ; 5 000[ | 13 | |
| Total | 260 | |



### *3. France, juin 2005*

Une municipalité envisage d'ouvrir un terrain de camping d'une capacité d'accueil de 2 000 à 2 500 personnes par jour.

Elle souhaite que le bénéfice moyen, par personne et par jour, soit au moins égal à 3 euros.

Elle vous demande de déterminer le nombre minimum de personnes accueillies par jour qui satisfait cette contrainte.

Les deux premières parties peuvent être traitées de façon indépendante.

**Première partie (8 points)**

On fixe le prix du séjour à 8 euros par jour et par personne. On estime que le coût de fonctionnement journalier est constitué :

- d'un coût fixe de 1 500 euros ;
- d'un coût variable de 4 euros par personne.

1. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où l'occupation journalière est de 1 250 personnes.

a. Calculer la recette journalière relative au prix du séjour.

b. Calculer le coût de fonctionnement journalier.

c. Calculer le bénéfice journalier, différence entre la recette journalière et le coût de fonctionnement journalier.

d. En déduire le bénéfice journalier moyen, par personne (arrondir au centime).

2. Dans la suite, on se place dans le cas général où l'occupation journalière est de $n$ personnes.

a. Exprimer le recette journalière $R(n)$ en fonction de $n$.

b. Exprimer le coût de fonctionnement journalier $C(n)$ en fonction de $n$.

c. En déduire le bénéfice journalier $J(n)$ donné par la relation : $J(n) = R(n) - C(n)$

d. Monter que le bénéfice journalier moyen, par personne, peut s'exprimer sous la forme :

$$B(n) = 4 - \frac{1500}{n}.$$

**Deuxième partie (11 points)**

On considère la fonction $f$ définie pour tout $x$ de l'intervalle [300 ; 2 500] par : $f(x) = 4 - \frac{1500}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ où $f'$ est la dérivée de la fonction $f$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$.
3. Compléter, sur l'annexe, le tableau de variation de la fonction $f$.
4. Compléter, sur l'annexe, le tableau de valeurs exactes de $f(x)$.
5. Tracer la courbe C, représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle [300 ; 2 500], dans le repère de l'annexe où trois points de la courbe sont placés.
6. Tracer la droite D d'équation $y = 3$ dans le même repère.
7. Déterminer graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la courbe C et de la droite D. Laisser apparent le trait permettant la lecture.

**Troisième partie (1 point)**

Indiquer par une phrase le nombre minimum de personnes qui doivent fréquenter le camping chaque jour pour que le bénéfice moyen, par personne et par jour, soit au moins égal à 3 euros.

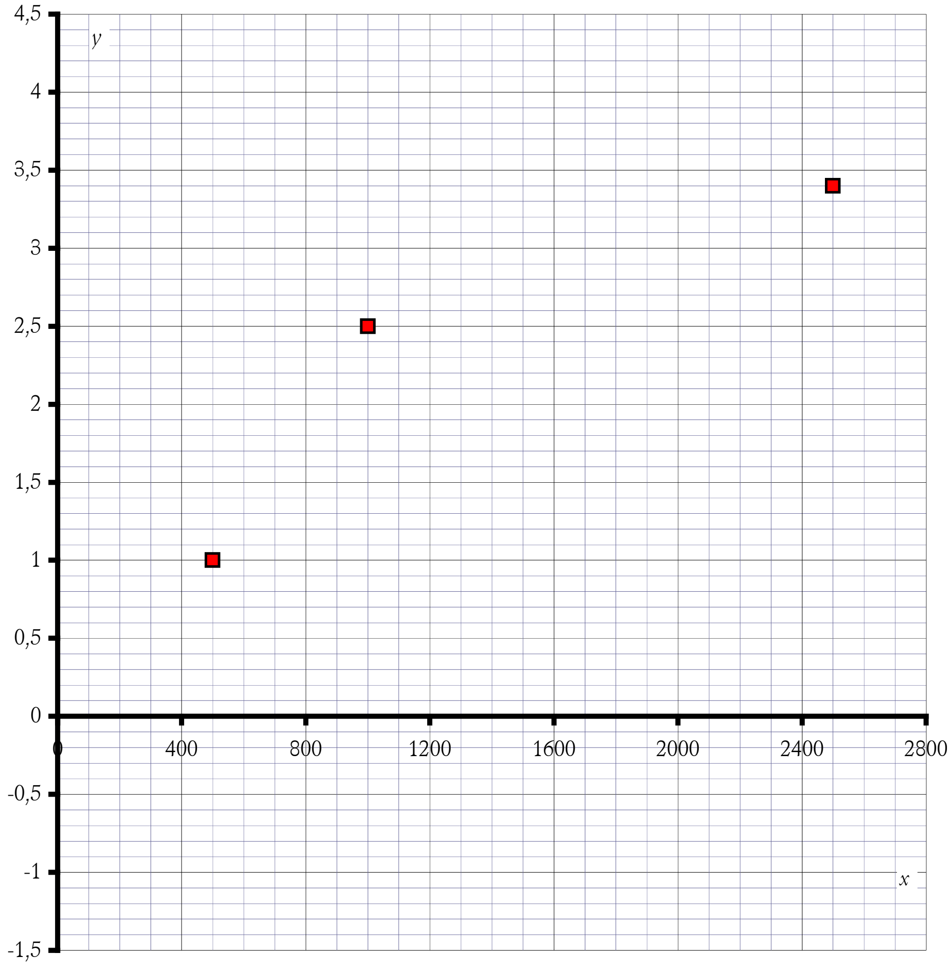
**DOCUMENT À RENDRE AVEC LA COPIE**

Tableau de variation

| $x$ | 300 2 500 |
|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | |
| Sens de variation de $f$ | |

Tableau de valeurs

| $x$ | 300 | 500 | 750 | 1 000 | 1 250 | 2 000 | 2 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 1 | | 2,5 | | | 3,4 |



## *4. France, septembre 2004*

Une entreprise spécialisée dans la vente d'articles de bureautique a ouvert ses portes dans la région il y a deux ans. Vous y travaillez en tant que secrétaire.

**Première partie (5 points)**

Monsieur Buzu, votre responsable, vous demande de réaliser une étude sur le coût de revient de son contrat de location des locaux de l'entreprise. Cette étude portera sur les 6 premières années de vie de l'entreprise.

La première année le loyer annuel a été fixé à 27 600 euros par an ; Monsieur Buzu suppose que chaque année le loyer subit une augmentation de 3 %.

1. Calculer le loyer annuel de la deuxième année, puis celui de la troisième année.

2. On désigne par $U_1$ le loyer de la première année ($U_1 = 27\,600$), par $U_2$ celui de la deuxième année, ..., par $U_n$ le loyer de la $n^{\text{ième}}$ année.

a. Montrer que les trois nombres $U_1$, $U_2$, $U_3$ pris dans cet ordre sont les trois premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Calculer $U_6$. Arrondir à 0,01.

3. Quel sera le loyer annuel de la sixième année ?

**Deuxième partie (15 points)**

Monsieur Buzu s'est intéressé, de son côté,aux bénéfices réalisés par l'entreprise, au cours d'une année, sur les ventes d'imprimantes.

Le bénéfice exprimé en euros, est donné par la relation : $B(q) = -3q^2 + 270q - 4\,000$ où $q$ désigne le nombre d'imprimantes vendues.

Monsieur Buzu vous demande de réaliser une étude afin de déterminer :

- Le nombre d'imprimantes vendues dans l'année pour que le bénéfice soit maximal ;
- Le nombre d'imprimantes vendues dans l'année pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 1 400 euros.

<u>I. Etude de fonction</u>

Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle [17 ; 70] par : $f(x) = -3x^2 + 270x - 4\,000$ .

1. Compléter le tableau de valeurs de l'annexe.

2. Calculer $f'(x)$ où $f'$ est la dérivée de la fonction *f*.

3. a. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ . On note $x_0$ la solution de cette équation.

b. On admet que *f* atteint son maximum pour $x = x_0$ . Calculer $f(x_0)$ .

4. Compléter le tableau de variation de la fonction *f* sur l'annexe.

5. Tracer la courbe C représentative de la fonction *f* dans le repère de l'annexe où trois points de cette courbe sont placés.

<u>II. Résolution d'équation et d'inéquation</u>

1. Tracer dans le repère de l'annexe la droite D d'équation $y = 1\,400$ .

2. Estimer graphiquement les abscisses des points d'intersection de la droite D avec la courbe C. Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

3. On admet que résoudre l'équation $f(x) = 1\,400$ revient à résoudre l'équation $-3x^2 + 270x - 5\,400 = 0$ . Résoudre cette équation.

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 1\,400$ . Donner le résultat sous forme d'un intervalle.

III. Conclusion

En utilisant les résultats précédents, indiquer par une phrase :

1. Le nombre d'imprimantes vendues dans l'année pour que le bénéfice soit maximal. Quel est alors le montant de ce bénéfice maximal ?

2. Les nombres d'imprimantes vendues dans l'année pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 1 400 euros.

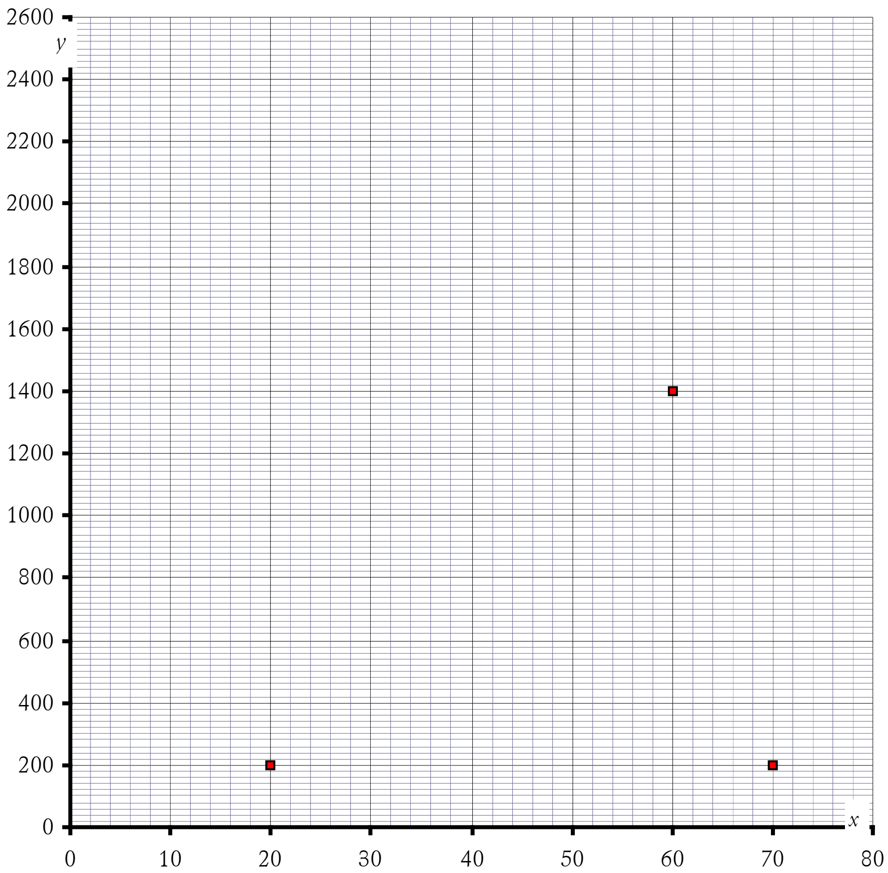
**Document à rendre avec la copie**

Tableau de valeurs

| $x$ | 17 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 200 | | | | 1 400 | 200 |

Tableau de variation

| $x$ | 17 | … | 70 |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | + | 0 | − |
| Sens de variation de $f$ | | | |



## *5. France, juin 2004*

Vous êtes secrétaire à la capitainerie du port de la ville.

Un bateau de plaisance souhaite faire escale dans cette ville le 12/07/2004 entre 10 heures et 18 heures. Pour accéder au port de plaisance, il lui faut une hauteur d'eau minimale de 2,10 m. Vous devez communiquer au navigateur à quel moment de la journée il pourra entrer dans le port.

*Les deux parties peuvent être traitées indépendamment*

**Première partie : calcul de hauteurs d'eau**

A cette date, entre 10 heures et 18 heures, la formule suivante permet de calculer la hauteur d'eau $h$ en mètres, dans le port en fonction de l'heure $t$ de la journée :

$$h(t) = -0{,}125t^2 + 3{,}5t - 22 .$$

1. Calculer la hauteur d'eau à 13 h.

2. Calculer la hauteur d'eau à 18 h.

**Deuxième partie : étude de fonction**

On considère la fonction $f$ définie pour tout $x$ de l'intervalle [10 ; 18] par :

$$f(x) = -0{,}125x^2 + 3{,}5x - 22 .$$

1. Compléter le tableau de valeurs de l'ANNEXE.

2. Calculer $f'(x)$ ou $f'$ est la dérivée de la fonction $f$.

3. a. On admet que résoudre l'équation $f'(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $0{,}25\,x = 3{,}5$.

Résoudre l'équation $0{,}25\,x = 3{,}5$. On note $x_0$ la solution de cette équation.

b. On admet que $f$ admet un maximum pour $x = x_0$. Calculer $f(x_0)$.

4. Tracer avec précision la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $f$ dans le repère donné en ANNEXE où cinq points de cette courbe ont été placés.

5. a. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2{,}1$ sur l'ANNEXE.

b. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2{,}1$. Laisser les traits apparents permettant la lecture graphique.

c. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 2{,}1$.

6. 6. On admet que résoudre l'équation $f(x) = 2{,}1$ revient à résoudre l'équation

$$-0{,}125x^2 + 3{,}5x - 2{,}41 = 0 .$$

Résoudre cette équation. Arrondir les solutions au centième.

**Troisième partie : conclusion**

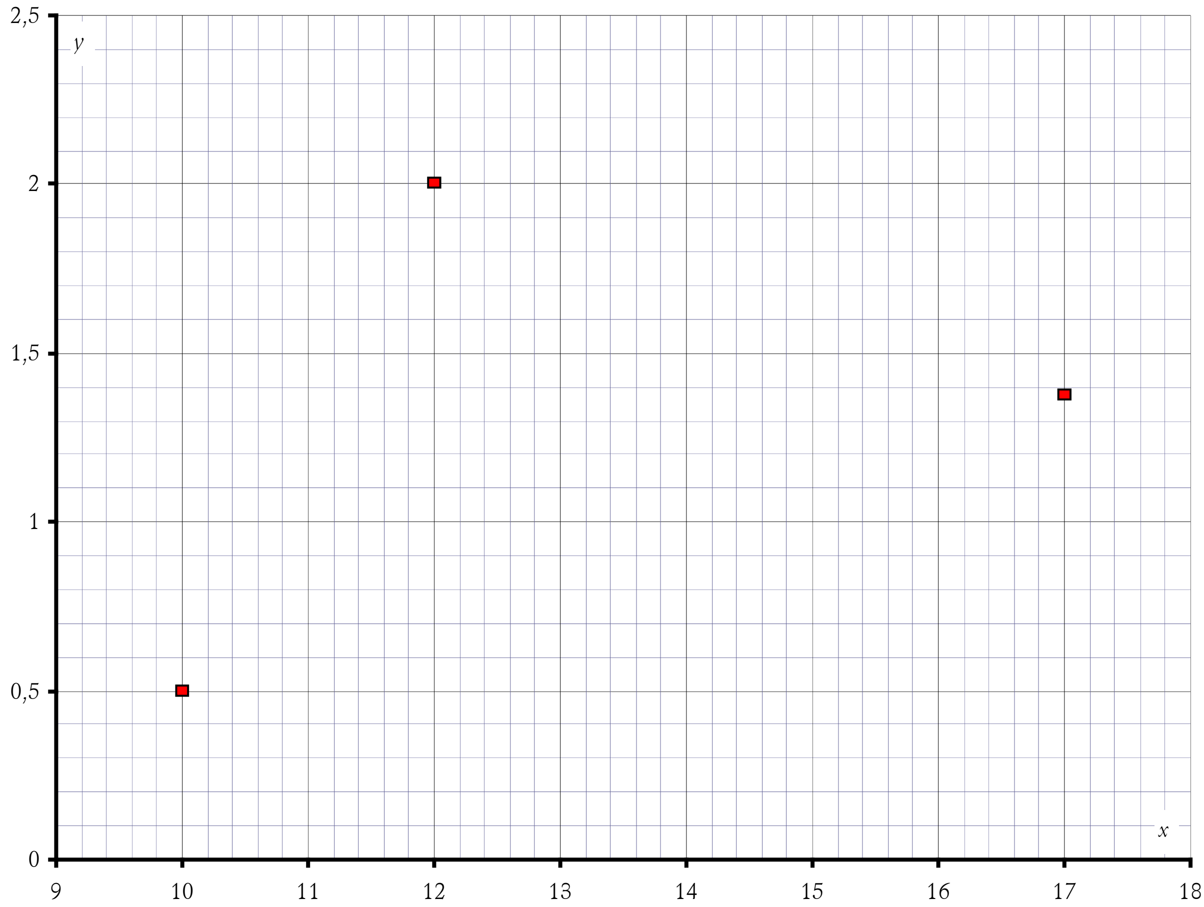
1. En utilisant les résultats précédents, indiquer par une phrase à quelles heures la hauteur d'eau dans le port est égale à 2,10 m le 12 juillet 2004. Arrondir au quart d'heure.

2. Indiquer par une phrase l'information à communiquer au navigateur.

ANNEXE

Tableau de valeurs

| $x$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,5 | | 2 | | 2,5 | 2,375 | | 1,375 | |



### *6. France, juin 2003*

Une entreprise fabrique et commercialise depuis deux ans des articles de mode.

*Les deux parties sont indépendantes.*

**Première partie (5 points)**

Le tableau ci-dessous indique le nombre d'articles vendus par trimestre au cours de ces deux années :

| Trimestre | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'articles vendus | 90 | 160 | 216 | 226 | 270 | 280 | 276 | 276 |

La représentation graphique de l'évolution des ventes est partiellement donnée en ANNEXE.

1. Compléter ce graphique en plaçant les points correspondants aux ventes réalisées au cours des quatre derniers trimestres.

2. Calculer le pourcentage d'augmentation des ventes du cinquième trimestre au sixième trimestre par rapport aux ventes du cinquième trimestre (arrondir à l'unité).

3. Décrire, en une phrase faisant intervenir un pourcentage, l'évolution des ventes entre le sixième et le septième trimestre.

**Deuxième partie (15 points)**

Cet article commençant à moins se vendre, le directeur commercial décide d'en arrêter la production lorsque le nombre d'articles vendus par trimestre atteindra 200.

Il s'agit d'estimer la date de cet arrêt, en considérant que la fonction suivante donne une bonne approximation de l'évolution du nombre d'articles vendus par trimestre.

**A. Étude de fonction**

On considère la fonction $f$, définie sur l'intervalle [0 ; 12] par $f(x) = -5x^2 + 70x + 35$.

1. Calculer $f'(x)$ où $f'$ est la dérivée de la fonction $f$.

2. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

3. Compléter le tableau de variation de l'ANNEXE.

4. Compléter le tableau de valeurs de l'ANNEXE.

5. Tracer la courbe C représentative de la fonction $f$ dans le repère de l'ANNEXE.

**Attention** : les points déjà placés dans le repère n'appartiennent pas forcément à la courbe représentative de la fonction $f$.

6. Représenter graphiquement dans le repère de l'ANNEXE la droite D d'équation $y = 200$.

7. Par lecture graphique, indiquer quelles semblent être les coordonnées des points d'intersection de la droite D avec la courbe C représentative de la fonction $f$. Laisser apparents les traits de construction et rédiger la réponse.

8. Pour vérifier les abscisses des points d'intersection, montrer qu'on est amené à résoudre l'équation suivante : $-5x^2 + 70x - 165 = 0$. Résoudre cette équation.

**B. Exploitation**

On considère que le nombre $f(x)$ défini au **A.** peut représenter le nombre d'articles vendus au cours du $x^{\text{ème}}$ trimestre, où $x$ est un nombre entier compris entre 1 et 12.

Le directeur commercial ayant fixé une valeur limite de 200 articles, indiquer à partir de quel trimestre l'entreprise doit envisager de cesser la production.

**Document à rendre avec la copie**

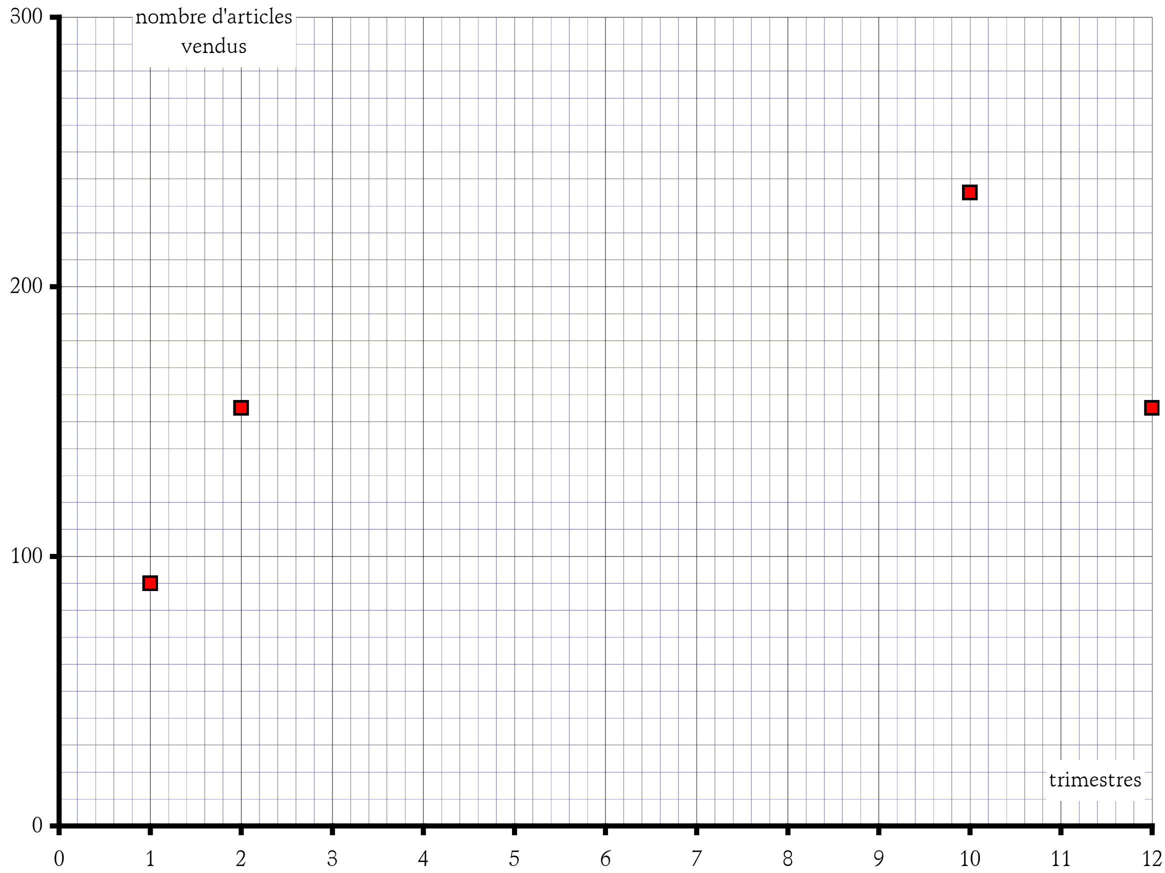
ANNEXE

Tableau de variation

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 12 |
| Signe de $f'(x)$ | | |
| Sens de variation de $f$ | | |

Tableau de valeurs

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 155 | | | | 235 | 155 |



L'entreprise SOPRA, qui commercialise des aspirateurs, décide d'investir dans la publicité pour relancer les ventes.

L'évolution du chiffre d'affaires en fonction de la somme investie dans la publicité est donnée dans le tableau suivant :

| Somme investie dans la publicité en € : $x_i$ | 1 000 | 2 000 | 3 000 | 4 000 | 5 000 | 6 000 | 8 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffre d'affaires réalisé en € : $y_i$ | 27 000 | 35 500 | 43 500 | 49 000 | 53 000 | 54 000 | 51 000 | 39 500 |

**1re Partie (2,5 points)**

1) Dire en une phrase comment semble évoluer le chiffre d'affaires en fonction de la somme investie dans la publicité ?

   Cinq points correspondant à cinq couples ($x_i$ ; $y_i$) du tableau ci-dessus ont été placés sur le graphique en **annexe**. Placer les trois autres points sur le même graphique.

**2ème partie (8,5 points)**

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 10 000] par $f(x) = -0{,}001\,x^2 + 12{,}5\,x + 15\,000$.

1) Compléter le tableau de valeurs de l'**annexe.**

2) Calculer $f'(x)$ où $f'$ est la dérivée de la fonction $f$.

3) a) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. On note $x_0$ la solution de cette équation.
   b) On admet que $f$ atteint son maximum pour $x = x_0$. Calculer la valeur arrondie à l'unité de ce maximum.

4) Dans le repère de l'**annexe**, tracer la courbe $C$ représentant la fonction $f$.

5) On supppose que la fonction $f$ est une "bonne" approximation de la situation étudiée, c'est-à-dire que $f(x)$ peut être considérée comme le chiffre d'affaires, en euros, correspondant à la somme $x$, en euros, investie dans la publicité.
   Quel est le montant en euros, de l'investissement dans la publicité que l'entreprise SOPRA n'a pas besoin de dépasser ? Justifier la réponse.

**3ème partie (9 points)**

Les contraintes financières de l'entreprise lui imposent un chiffre d'affaires minimal de 45 000 €.

1) Tracer, dans le repère de l'**annexe**, la droite $D$ d'équation : $y = 45\,000$.

2) Lire graphiquement les abcisses des points d'intersection de la courbe $C$ avec la droite $D$. Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

3) Montrer que résoudre l'équation $f(x) = 45\,000$ revient à résoudre l'équation :

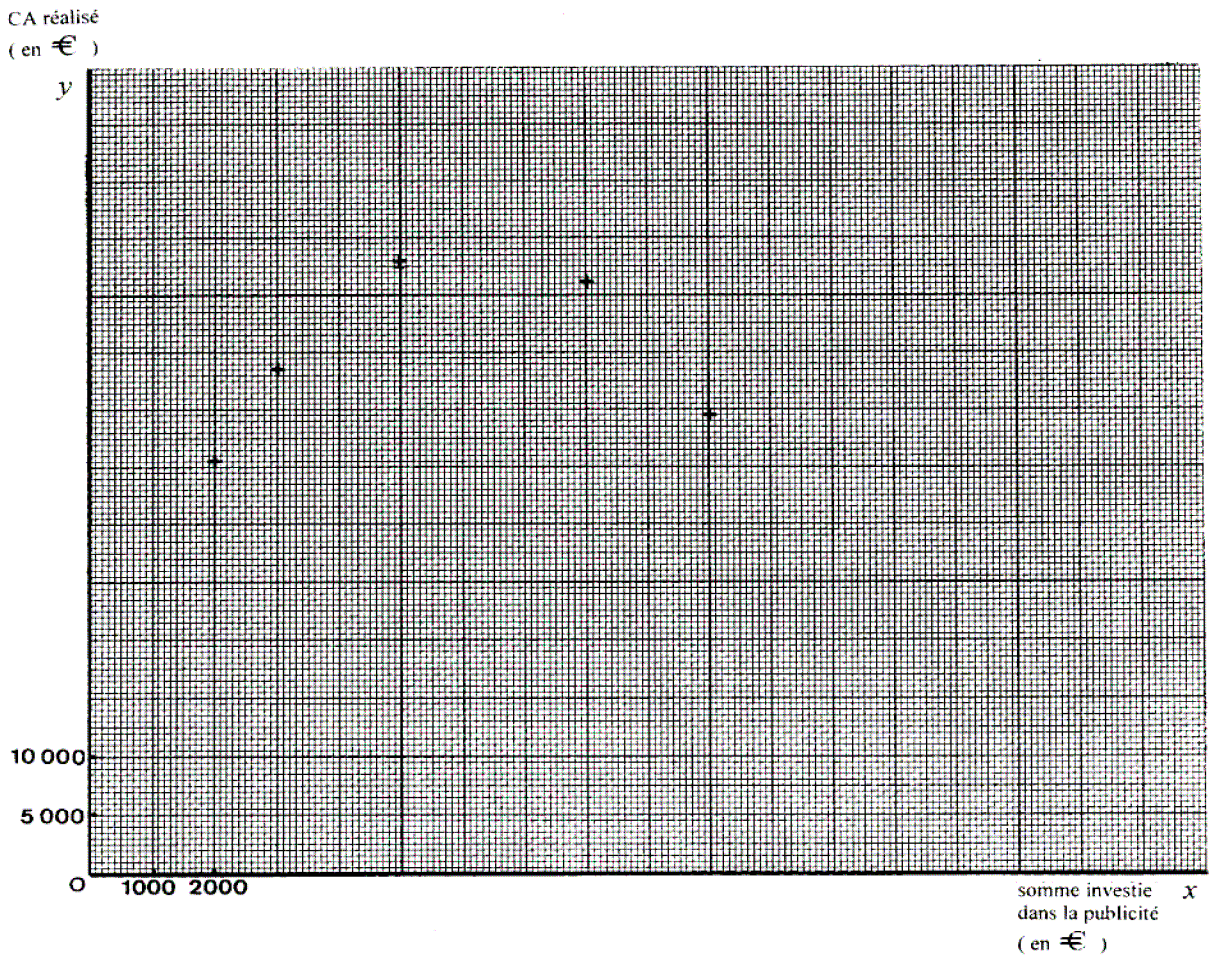
$$-0{,}001\,x^2 + 12{,}5\,x - 30\,000 = 0.$$

4) Résoudre l'équation : $-0{,}001\,x^2 + 12{,}5\,x - 30\,000 = 0$. Arrondir chaque solution à l'unité.

5) Préciser, à l'aide du graphique et des valeurs obtenues précédemment, pour quelles sommes investies dans la publicité le chiffre d'affaires reste supérieur à 45 000 €.

# ANNEXE

| $x$ | 0 | 1 000 | 3 000 | 7 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 26 500 | | | |



***8. France, juin 2001***

**I. PROBLEME (5 points)**

Vous travaillez dans une petite entreprise régionale. Suite à l'arrivée d'une nouvelle société de téléphonie (COMMISSIS), votre directeur vous demande de réaliser une étude comparative entre cette nouvelle société et la société de téléphonie qu'elle utilise actuellement (MEGATEL) pour les communications internationales.

*Tous les resultats seront arrondis au centime.*

La facture de MEGATEL comporte :

- L'abonnement mensuel : 82, 30 F TTC.
- Le prix des communications : 0,60 F TTC la minute.

1. Calculer le montant hors taxe, en francs, de l'abonnement mensuel (TVA : 19,6 %).

2. Calculer le montant TTC, en francs, de la facture correspondant à 3 heures de communications dans le mois.

3. Exprimer le montant TTC, en francs, de la facture mensuelle en fonction du nombre $n$ de minutes de communication. On note $C(n)$ ce montant.

4. On rappelle que le coût TTC, en francs, par minute de communication est $\frac{C(n)}{n}$. Exprimer ce coût par minute en fonction du nombre $n$ de minutes de communication.

5. Calculer le coût TTC, en francs, par minute de communication, dans le cas où la durée de communication est :

a. 1 heure de communication dans le mois.

b. 3 heures de communication dans le mois.

**II. Analyse mathématique du problème (12,5 points)**

On considère la fonction $f$ définie, sur l'intervalle [30 ; 180], par $f(x) = \frac{82,30}{x} + 0,6$ .

1. Calculer $f'(x)$ ou $f'$ est la dérivée de la fonction $f$.

2. Etudier le signe de cette dérivée et reporter le résultat dans le tableau de l'ANNEXE. En déduire le sens de variation de la fonction $f$ en complétant le tableau de l'ANNEXE.

3. Compléter le tableau de valeurs de l'ANNEXE.

4. Tracer la représentation graphique $C_f$ de la fonction $f$ dans le repère de l'ANNEXE.

Le nouvel opérateur (COMMISSIS) propose les conditions suivantes :

- Aucun abonnement.
- Le prix des communications : 1,45 F TTC la minute.

La modélisation mathématique du coût TTC, en francs, par minute de communication correspond à la fonction $g$, définie sur l'intervalle [30 ; 180] par $g(x) = 1,45$.

La représentation graphique $C_g$ de cette fonction est tracée en ANNEXE.

5. Déterminer graphiquement quelles semblent être les coordonnées du point d'intersection des deux représentations graphiques $C_f$ et $C_g$. Laisser le tracé apparent.

6. Résoudre l'équation $\frac{82,30}{x} + 0,6 = 1,45$ .

**III. Retour au problème ( 2,5 points )**

Indiquer ce que représente le résultat précédent pour l'étude de la comparaison des deux sociétés.

L'entreprise dans laquelle vous travaillez a une consommation moyenne de 120 minutes par mois. Rédiger une phrase indiquant, dans ce cas, quelle société vous proposez à votre directeur.

**ANNEXE**

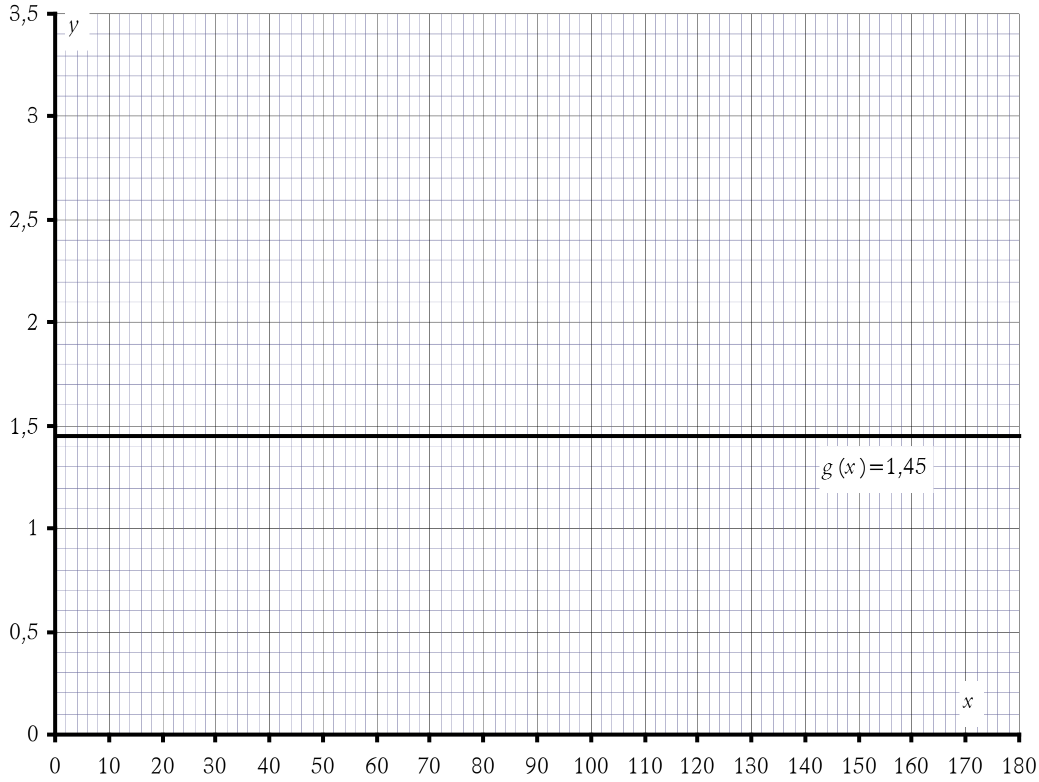
II.2. Signe de la dérivée et sens de variation de la fonction $f$

| $x$ | 30 180 |
|---|---|
| $f'(x)$ | |
| $f(x)$ | |

II.3. Tableau de valeurs pour la fonction $f$

| $x$ | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,34 | | | | | 1,06 |

II.4. Représentation graphique des fonctions $f$ et $g$



## *9. France, juin 2000*

Vous êtes secrétaire chez CAP-BEL fabricant en matériels informatiques, ouvert du lundi au samedi de 8 h à 18 h.

**Première partie**

Pour diminuer les coûts de connexion à Internet, le responsable du service souhaite remplacer la ligne téléphonique classique par une ligne Numéris.

Il souhaite en plus souscrire l'abonnement « avantage Numéris Internet » qui permet de bénéficier de 35 % de réduction sur les coûts de connexion Internet de 8 h à 22 h du Lundi au Samedi.

| | Ligne classique | Ligne Numéris Internet |
|---|---|---|
| Abonnement mensuel | 78,00 F | 238,00 F |
| Tarif horaire normal | 16,70 F | 16,70 F |
| Abonnement mensuel Avantage Numéris Internet | | 46,00 F |
| Taux de réduction sur le coût des communications | | 35 % |
| Horaires et jours d'application de la réduction | | De 8 h à 22 h<br>du Lundi au Samedi. |

Tous les prix du tableau sont donnés toutes taxes comprises.

Travail à effectuer

1. a. Pour la ligne classique, le coût mensuel $C_1$, en francs, des connexions à Internet en fonction du nombre d'heures mensuel de connexion $n$ est donné par la relation suivante : $C_1 = 16,70n + 78$ .

Calculer le coût mensuel de connexion à Internet, pour cette ligne classique, pour un nombre mensuel d'heures de connexion égal à 30.

b. Montrer que le coût mensuel $C_2$, en francs, des connexions à Internet, durant les heures d'ouverture de l'entreprise, en utilisant la ligne Numéris Internet, en fonction du nombre d'heures mensuel de connexion $n$ est donné par la relation : $C_2 = 10,855n + 284$ .

2. On considère les fonctions $f$ et $g$ définies, pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle [0 ; 50], par

$$f(x) = 16,70x + 78 \text{ et } g(x) = 10,855x + 284 .$$

A l'annexe A est donnée la représentation graphique D de la fonction $f$ dans le plan rapporté au repère (O$x$, O$y$).

a. Tracer à l'annexe A la représentation graphique D' de la fonction $g$ dans le plan rapporté au repère (O$x$, O$y$).

b. Par une lecture graphique, indiquer quel semble être l'ensemble S des solutions de l'inéquation d'inconnue $x$ : $f(x) \leq g(x)$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue $x$ : $16,70x + 78 \leq 10,855x + 284$ .

3. En tenant compte des résultats précédents, rédiger une phrase précisant le nombre d'heures de connexion à Internet à partir duquel l'utilisation d'une ligne Numéris est plus intéressante financièrement que l'utilisation d'une ligne classique.

**Deuxième partie**

Monsieur Richard, directeur de l'établissement, vous demande de lui imprimer les graphiques correspondants à :

* l'évolution des ventes au cours des 100 derniers jours ;

* l'évolution des coûts de production d'une série d'imprimantes si l'on produit de 0 à 100 de ces imprimantes ;
* l'évolution du cours de la bourse sur les actions CAP-BEL sur les 100 derniers jours.

Suite à une erreur les trois graphiques sont imprimés sans légende ni titre ni unité sur les axes. Sachant que le coût de production, en francs, de $q$ ordinateurs est donné par la relation

$$C = q^3 - 120q^2 + 3\,600q + 10\,000$$

et afin de retrouver le graphique correspondant à l'évolution de ce coût Monsieur Richard vous demande de procéder comme il est indiqué ci-dessous.

Travail à effectuer

Soit la fonction $f$, de la variable $x$, définie sur l'intervalle[0 ; 100] par : $f(x) = x^3 - 120x^2 + 3\,600x + 10\,000$.

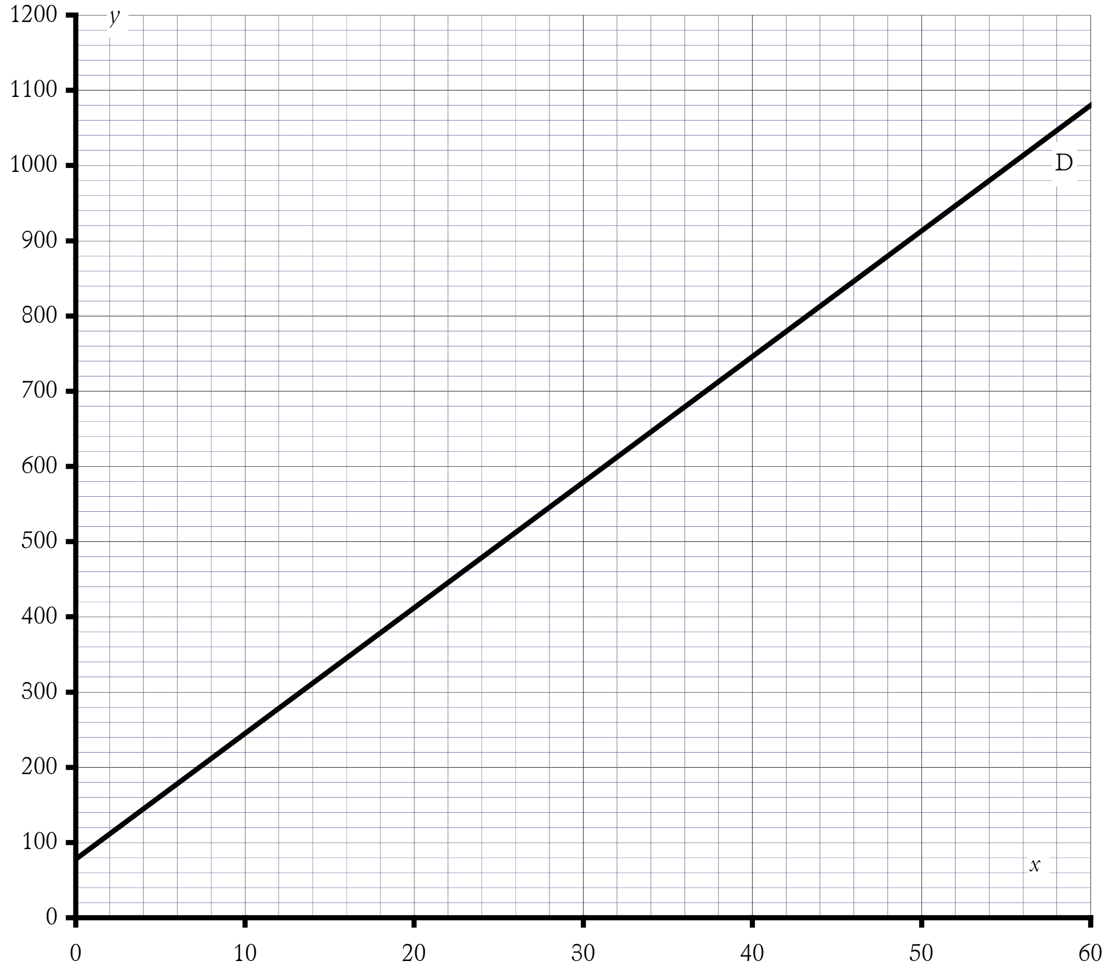
1. Déterminer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue $x$, $3x^2 - 240x + 3\,600 = 0$.

3. Compléter le tableau de variation de l'annexe B.

En déduire le numéro du graphique de l'annexe C représentant l'évolution du coût de production (justifier la réponse donnée).

## Annexe A

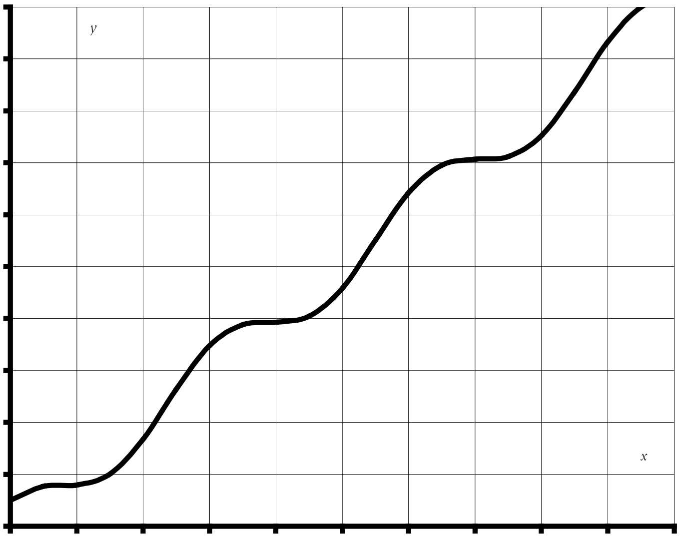


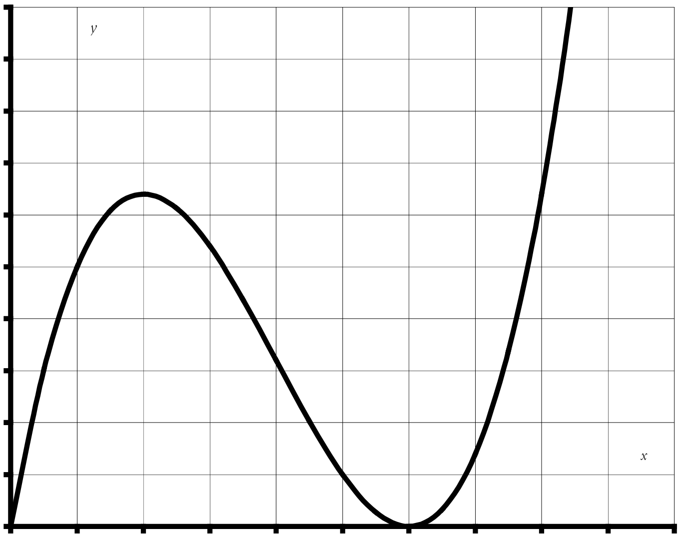

## Annexe B

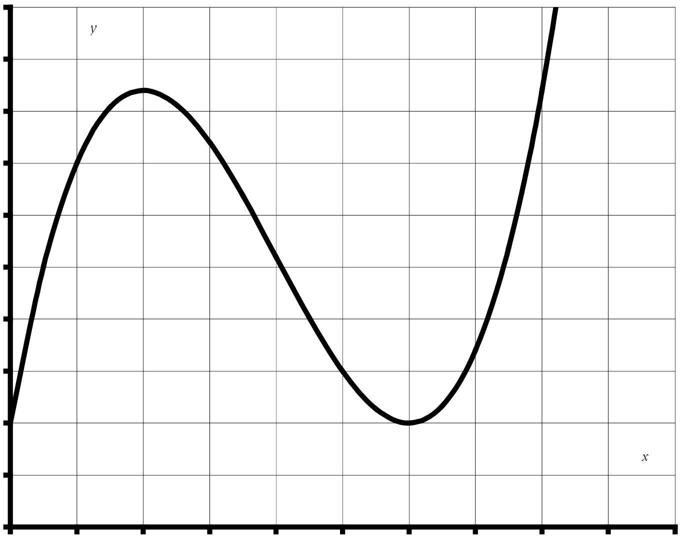
Tableau

| $x$ | 0 | | …. | | …. | | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| sens de variation de la fonction $f$ | | | | | | | |

## Annexe C



### *10. France, juin 1999*

Mr Ringuenet doit expédier, à l'un de ses clients, un lot de tee-shirts dont la masse totale est de 50 kg. Pour cela, il lance un appel d'offre à deux transporteurs. Les propositions des deux sociétés sont les suivantes :

Société A

Pour un transport dont la distance est inférieure à 50 km, le coût total $C_A$, en F, comprend un fixe de 100 F plus 30 centimes du kilomètre.

Pour un transport dont la distance est supérieure ou égal à 50 km, le coût total $C_A$, en F, comprend un fixe de 80 F plus 70 centimes du kilomètre.

Société B

Le coût total $C_B$, en F, du transport est donné par la formule suivante où $n$ désigne le nombre de kilomètres parcourus : $C_B = \frac{6}{1000}n^2 + 90$ .

Afin de déterminer le transporteur le plus économique, M. RINGUENET vous demande de réaliser une étude comparative.

**PREMIERE PARTIE**

Dans cette partie, les calculs se feront avec les données de la société A. On désigne par $n$ le nombre de kilomètres parcourus.

TRAVAIL A FAIRE

1. Recopier et compléter le tableau suivant

| Nombre de kilomètres parcourus : $n$ | 10 | 20 | 50 | 80 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| Coût total, en F, du transport : $C_A$ | | | | | |

2. Exprimer :

a. $C_A$ en fonction de n pour tout $n$ compris entre 10 et 50 ( $10 \leq n \leq 50$ ).

b. $C_A$ en fonction de n pour tout $n$ compris entre 50 et 120 ( $50 \leq n \leq 120$ ).

3. On considère la fonction $f$ définie, sur l'intervalle [10 ; 120], de sorte que :

Pour tout $x$ de l'intervalle [10 ; 50], $f(x) = 100 + 0{,}3\,x$ ;

Pour tout $x$ de l'intervalle [50 ; 120], $f(x) = 80 + 0{,}7\,x$.

Sur l'annexe, dans le plan rapporté au repère (O$x$ ; O$y$), tracer la représentation graphique de la fonction $f$.

**DEUXIEME PARTIE**

Dans cette partie, les calculs se feront avec les données de la société B.

TRAVAIL A FAIRE

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

| Nombre de kilomètres parcourus : $n$ | 10 | 20 | 50 | 70 | 90 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coût total, en F, du transport : $C_B$ | | 92,4 | | | | 162,6 | |

2. On considère la fonction $g$ définie, pour tout $x$ de l'intervalle [10 ; 120], par $g(x) = \frac{6}{1000}x^2 + 90$.

a. Déterminer la fonction dérivée $g'$ de la fonction $g$.

b. Etudier, pour tout $x$ de l'intervalle [10 ; 120], le signe de $g'(x)$.

c. Déduire des résultats précédents, le sens de variation de la fonction $g$.

d. Sur l'ANNEXE, dans le plan rapporté au repère ($Ox$ ; $Oy$) tracer la courbe représentative de la fonction $g$.

**TROISIEME PARTIE**

TRAVAIL A FAIRE

Etude comparative

1. Par une lecture graphique, donner une estimation de la solution sur l'intervalle [50 ; 120], de l'équation, d'inconnue $x$, $f(x) = g(x)$.

2. a. Dans l'intervalle [50 ; 120], montrer que l'équation, d'inconnue $x$, $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation, d'inconnue $x$, $0{,}006x^2 - 0{,}7x + 10 = 0$.

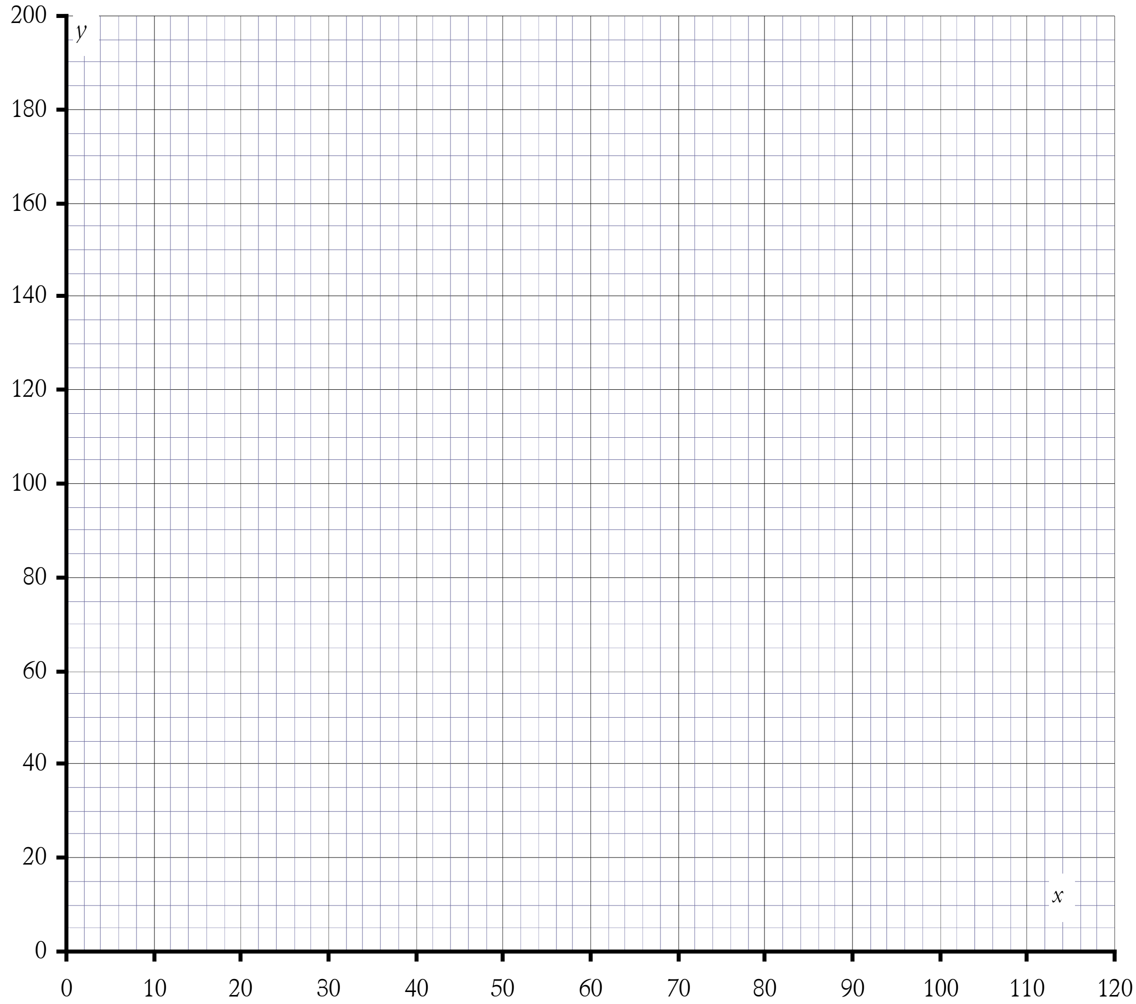
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation, d'inconnue $x$, $0{,}006x^2 - 0{,}7x + 10 = 0$.

c. Donner la valeur exacte de la solution sur l'intervalle [50 ; 120] de l'équation, d'inconnue $x$, $f(x) = g(x)$.

3. Par une lecture graphique, indiquer quel semble être dans l'intervalle [10 ; 120], l'ensemble S des solutions de l'inéquation, d'inconnue $x$, $f(x) \leq g(x)$.

4. Sachant que la destination du colis est à plus de 100 km, rédiger une note pour Mr Ringuenet dans laquelle le choix à faire entre les 2 sociétés A et B sera indiqué.

## Annexe



y
x
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120