Mavelec, Mrim, Msma, Electrotechnique

1. MSMA, France, juin 2006

Etude de la protection d'un moteur

On désire protéger le moteur contre toute surchauffe. Pour cela des thermistances à Coefficient de Température Positif (C.T.P.) sont placées dans les bobinages. A la température limite d'utilisation du moteur, leur résistance devient élevée, le moteur s'arrête et ne peut repartir qu'après refroidissement.

Les exercices suivants concernent l'étude de la variation de résistance de la C.T.P. en fonction de la température.

L'exercice n°1 en propose une modélisation statistique.

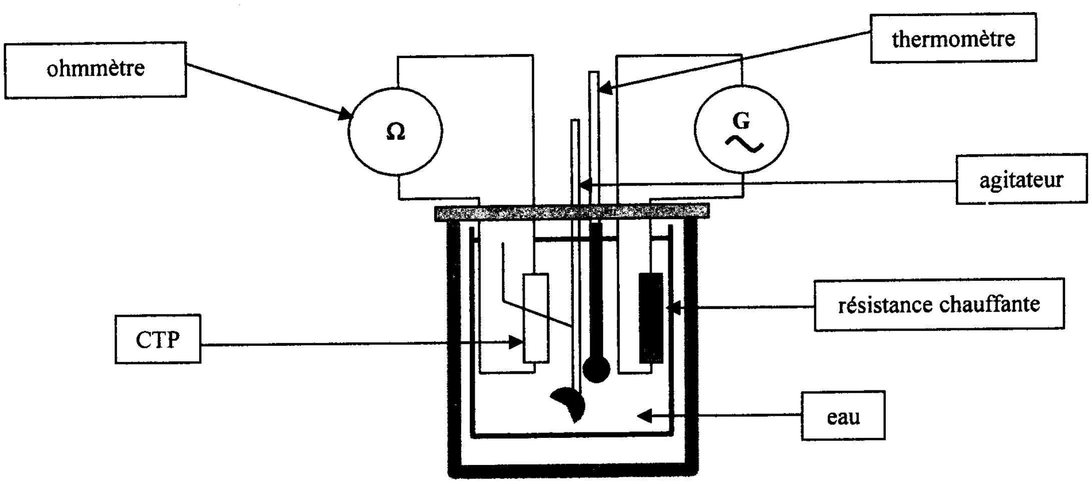
L'exercice n°2 traite de la modélisation proposée par le constructeur.

L'exercice n°3 permet de vérifier la validité du modèle constructeur.

Les trois exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres.

Exercice 1 : Modèle issu d'une étude statistique (4,5 points)

On a réalisé l'expérience schématisée ci-dessous et on a relevé la valeur de la résistance de la C.T.P. et la température de l'eau.



Les relevés sont résumés dans le tableau suivant.

Les points correspondants sont placés dans le repère de l'annexe 2 à rendre avec la copie

Point	A	B	C	D	E	F	G	H
Température en °C : x_i	25	35	40	50	60	70	80	90
Résistance en Ω : y_i	8	21	32	45	81	101	120	142

1. Calculer les coordonnées, arrondies à l'unité, du point moyen M de ce nuage de points. On rappelle que son abscisse est la moyenne des abscisses des points et que son ordonnée est la moyenne des ordonnées des points.

2. Dans le repère défini dans l'annexe 2 (à rendre avec la copie), on choisit comme droite d'ajustement la droite (MN) avec M de coordonnées (56 ; 69) et N de coordonnées (75 ; 120). Tracer la droite d'ajustement (MN).

3. L'équation de la droite (MN) est de la forme $y = ax + b$.

3.1. Déterminer les valeurs arrondies à 10^{-3} de a et b. Ecrire l'équation de la droite (MN)

3.2. On suppose que, pour des valeurs de la température comprises entre 35°C et 140°C, la résistance y varie en fonction de la température x selon la formule : $y = 2{,}68x - 81{,}32$.

Calculer les valeurs, arrondies à l'unité, de la résistance pour 35°C et 140°C.

4. Déterminer graphiquement les valeurs de la résistance pour 35°C et 140°C en laissant apparents les traits de construction.

Exercice 2 : Modèle proposé par le constructeur (8,5 points)

Le constructeur de la thermistance indique que la valeur R en Ohm de la résistance de C.T.P. est donnée, pour des températures θ exprimées en °C et comprises entre 25°C et 150°C par :

$$R = -0{,}000297\theta^3 + 0{,}078\theta^2 - 3{,}341\theta + 49{,}44 .$$

<u>PARTIE A</u> : Etude d'une fonction

On se propose d'étudier la fonction f définie sur un intervalle "élargi" [20; 160] par :

$$f(x) = -0{,}000297x^3 + 0{,}078x^2 - 3{,}341x + 49{,}44 .$$

1. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

2. Résoudre l'équation : $-0{,}000891x^2 + 0{,}156x - 3{,}341 = 0$.

Les valeurs des solutions seront arrondies à 10^{-1}.

3. 1. Compléter sur l'annexe 2 (à rendre avec la copie), le tableau de valeurs de $f(x)$ arrondies à l'unité.

3.2. On admet que les valeurs arrondies à l'unité de $f'(x) = 0$ sont $x_1 = 25$ et $x_2 = 150$. Compléter sur l'annexe 2 (à rendre avec la copie), le tableau de variation de la fonction f.

4. Tracer la courbe représentative C_f de la fonction f dans le repère défini dans l'annexe n°2 (à rendre avec la copie).

<u>PARTIE B</u> : Exploitation de l'etude

1. Dans quel intervalle de température, peut-on considérer que la résistance de la C.T.P. augmente lorsque la température augmente?

2. Dans quel intervalle varie la valeur de la résistance de la C.T.P.?

Exercice 3 : Comparaison des deux modèles (2 points)

On désire vérifier si le modèle fourni par le constructeur est acceptable. Un indicateur i est alors défini par :

$$i = 100 \times \frac{|R_c - R_m|}{R_c}$$

R_m désigne la valeur de la résistance issue du modèle statistique.

R_c désigne la valeur de la résistance issue du modèle proposé par le constructeur.

Dans l'annexe 3 (à rendre avec la copie), on dispose d'un tableau de valeurs donnant R_m et R_c pour des températures variant de 15°C en 15°C dans l'intervalle [35°C ; 140°C].

1. Compléter le tableau de comparaison de l'annexe 3 (à rendre avec la copie). Les valeurs de l'indicateur i seront arrondies à l'unité.

2. On considère que le modèle fourni par le constructeur est acceptable si, pour les valeurs figurant dans le tableau de comparaison de l'annexe 3 (à rendre avec la copie), l'indicateur i est inférieur ou égal à 20 pour au moins 6 d'entre elles.

Le modèle convient-il ? Justifier votre réponse.

ANNEXE 2

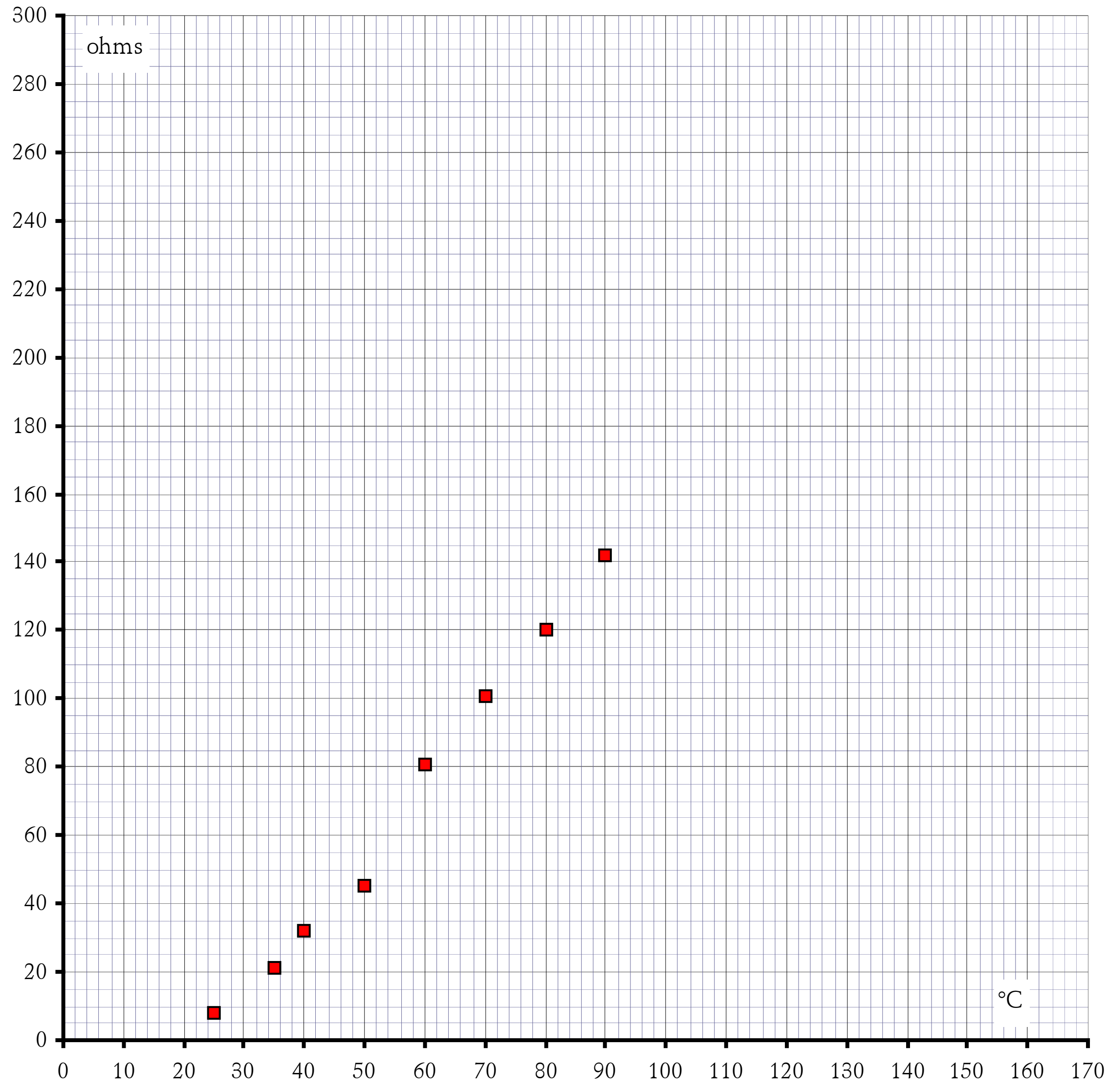


Tableau de valeurs de la fonction f

x	20	25	40	60	90	110	140	150	160
$f(x)$			22	66	164	230	296		

Tableau de variation de la fonction f

x	20					160
Signe de $f'(x)$	−	0	+	0	−	
Variation de f						

Température en °C	35	50	65	80	95	110	125	140
$R_{\text{modèle statistique}}$: R_m	12	53	93	133	173	213	254	294
$R_{\text{constructeur}}$: R_c	15	40	80	129	181	230	270	296
$e = R_c - R_m$	3	-13					16	2
Valeur absolue : e	3	13					16	2
i	20	33					6	1

Exercice n°1 (9 points)

Photorésistance (LDR)

Dans un montage audiovisuel, un système photoélectrique est équipé d'une photorésistance (LDR) : sa résistance R (en ohms) s'exprime en fonction de son éclairement E (en lux) suivant la relation :

$$R = 1220e^{-0,003E} .$$

1. Calculs numériques

Calculer la résistance de la photorésistance dans le cas où son éclairement est :

a. E = 150 lux. Arrondir le résultat à l'unité.

b. E = 1 000 lux. Arrondir le résultat à l'unité.

2. Etude de fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [150 ; 1 000] par : $f(x) = 1220e^{-0,003x}$

a. Déterminer $f'(x)$ où $f'(x)$ est la dérivée de la fonction f.

b. Donner le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [150 ; 1 000].

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [150 ; 1 000].

d. Compléter le tableau de valeurs de l'annexe. Arrondir le résultat à la dizaine.

e. Vérifier que la valeur approchée de $f'(200)$ arrondie au dixième est égale à –2.

f. Placer le point $A(200 ; 670)$ dans le repère de l'annexe et utiliser le résultat de la question 2.e. pour tracer la tangente T en A à la courbe C représentant le fonction f.

g. Tracer la courbe C sur l'annexe.

3. Exploitation

a. Déterminer graphiquement pour quelle valeur de l'éclairement la résistance de la LDR est égale à 200 ohms. Laisser apparents les traits permettant la lecture.

b. Retrouver le résultat précédent en résolvant l'équation $200 = 1220e^{-0,003x}$.

Exercice n°2 (6 points)

Signal périodique

Un signal périodique u, de période T = 0,01 s est utilisé dans un magnétoscope : à tout instant t, en seconde, ce signal prend une valeur $u(t)$ en volt.

Sa représentation graphique sur l'intervalle [0 ; 0,01] est donnée en annexe.

1. Donner la valeur maximale $\widehat{U}$ prise par le signal.

2. Tracer sur l'annexe la représentation graphique de u sur l'intervalle [0,01 ; 0,02[puis sur l'intervalle [−0,02 ; 0[.

3.Le signal u est-il pair, impair, ni pair ni impair ? Justifier.

4. Le signal u est défini sur l'intervalle [0 ; 0,01] par :

$$\begin{cases} u(t) = 4\cos(100\pi t) \text{ si } 0 \le t < 0,005 \\ u(t) = 0 \text{ si } 0,005 \le t < 0,01 \end{cases} .$$

On rappelle que la valeur moyenne du signal u est : $\bar{u} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)\,dt$.

a. Montrer que $\bar{u} = 400\displaystyle\int_0^{0,005} \cos(100\pi t)\,dt$.

b. Soit v la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 0,005] par : $v(t) = \frac{1}{100\pi}\sin(100\pi)$. Calculer $v'(t)$ où $v'(t)$ est la dérivée de la fonction v.

c. En déduire $\bar{u}$.

d. Vérifier que $\bar{u} = \frac{\hat{U}}{\pi}$.

Exercice n°3 (5 points)

Rapport d'onde stationnaire

Lors d'une réception par satellite, il apparaît une perte d'énergie due aux impédances de la parabole et du coaxial. Le coefficient de réflexion R est le nombre complexe définie par $R = \frac{z - z'}{z + z'}$ où z est l'impédance complexe de la parabole et z' celle du coaxial.

1. On considère le cas particulier d'une installation où $z = 75$ et $z' = 46{,}6 - 20{,}3j$ (j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$)

a. Donner la forme algébrique de $z_1 = z - z'$ et calculer le module ρ_1 de z_1. Arrondir à 10^{-2}.

b. Donner la forme algébrique de $z_2 = z + z'$ et calculer le module ρ_2 de z_2. Arrondir à 10^{-2}.

c. Montrer que le module de $R = \frac{z_1}{z_2}$ est $\rho = 0{,}28$ (valeur arrondie à 10^{-2}).

d. Le rapport d'onde stationnaire ROS est défini par : $ROS = \frac{1+\rho}{1-\rho}$. Calculer le ROS pour cette installation. Arrondir à 10^{-2}.

e. La norme préconise que le rapport d'onde stationnaire défini par $ROS = \frac{1+\rho}{1-\rho}$ soit inférieur à 2. L'installation respecte-t-elle la norme ?

2. Dans le cas général, le module ρ du coefficient de réflexion R de l'installation est un nombre réel tel que $0 < \rho < 1$.

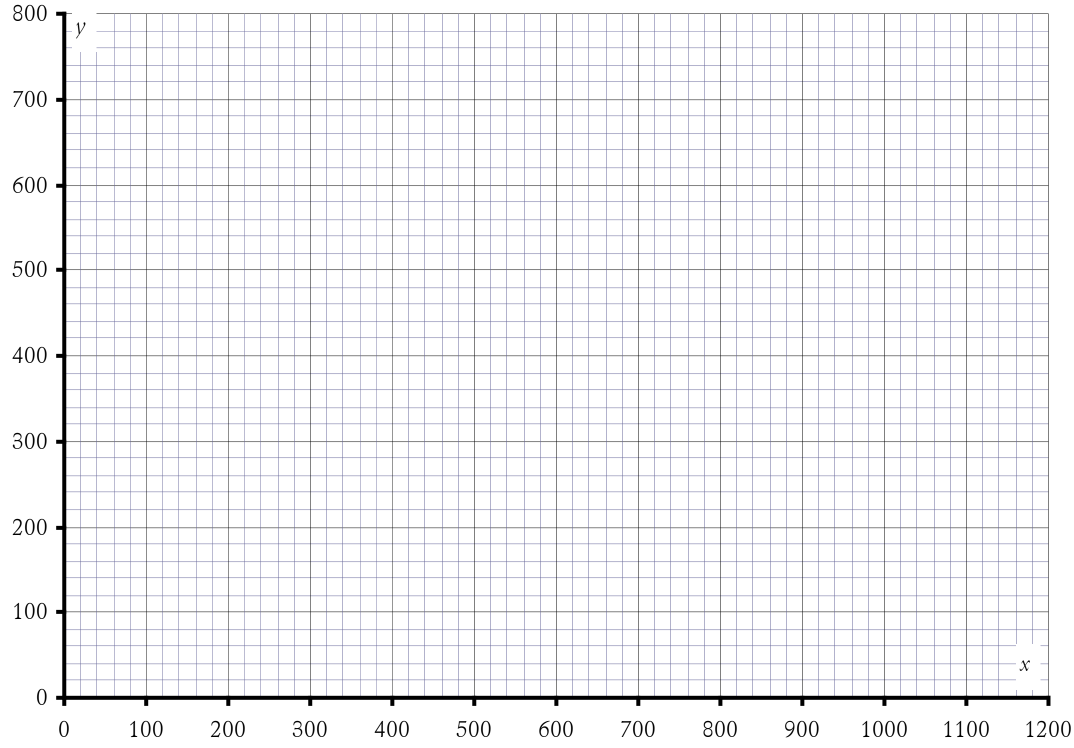
a. Montrer que l'inéquation $\frac{1+\rho}{1-\rho} \leq 2$ où $0 < \rho < 1$ se ramène à $3\rho \leq 1$.

b. Quelle est la valeur maximum de ρ qui respecte la norme énoncée à la question 1.e. ?

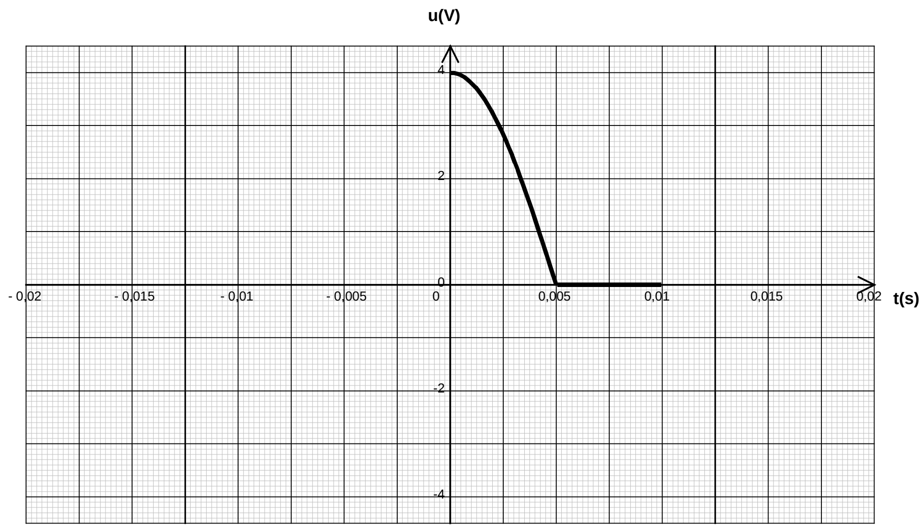
Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice n°1 : Etude de fonction

x	150	200	300	500	700	800	900	1 000
$f(x)$		670		270	150		80	



Exercice n°2 : signal périodique



Exercice n°3 : (8,5 points)

Pour assurer la régulation d'un système, on utilise une thermistance qui est un capteur dont la résistance varie avec la température. Cette résistance *R* en ohms varie en fonction de la température (en °C) suivant la relation : $R(\theta) = 0{,}008\theta^2 - 0{,}6\theta + 40$.

I. Calcul numérique

Calculer *R* pour $\theta = 55$ °C.

II. Etude d'une fonction

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 150] par $f(x) = 0{,}008x^2 - 0{,}6x + 40$.

1. Calculer $f'(x)$ où $f'(x)$ est la dérivée de la fonction *f*.

2. a. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

b. Calculer $f(37{,}5)$.

3. a. Compléter le tableau de variation de l'annexe 1.

b. Compléter le tableau de valeurs de l'annexe 1.

c. Tracer la représentation graphique de *f* sur l'intervalle [0 ; 150] dans le repère de l'annexe 1.

III. Exploitation

1. On admet que la valeur minimale de la résistance *R* du capteur utilisé est de 28,75 ohms.

On appelle température de basculement la température pour laquelle le capteur a une résistance double de sa résistance minimale. Déterminer graphiquement cette température (laisser apparents les traits permettant la lecture graphique).

2. La recherche, par le calcul de la température de basculement conduit à l'équation :

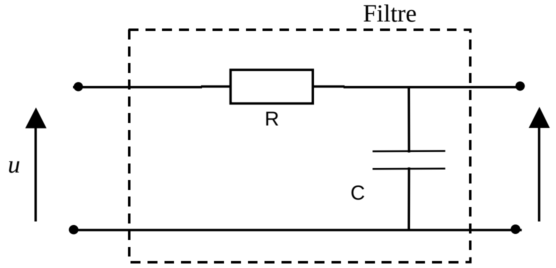
$$0{,}008\theta^2 - 0{,}6\theta + 40 = 2\times 28{,}75 .$$

C'est à dire : $0{,}008\theta^2 - 0{,}6\theta - 17{,}5 = 0$.

Déterminer la température de basculement en résolvant cette dernière équation. Arrondir le résultat à 0,1 °C.

Exercice n°4 : (3,5 points)

On applique une tension *u* de fréquence variable *f* à l'entrée d'un filtre passe-bas.



Ce filtre atténue ou « arrête » les tensions de fréquence supérieure à la fréquence $f_0 = \dfrac{1}{RC\omega}$.

On appelle gain (en décibel) du filtre le nombre : $G = 20\log T$ où log est le logarithme décimal et où *T* est le module du nombre complexe $Z = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$. On rappelle que *j* désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On donne $R = 100\ \Omega$; $C = 63\ \mu$F et $\omega = 2\pi f$ avec $f = 50$ Hz.

Calculer $RC\omega$ où la capacité C doit être exprimée en Farad. Arrondir à 10^{-2}.

2. On admet que $Z = \dfrac{1}{1+1{,}98j}$.

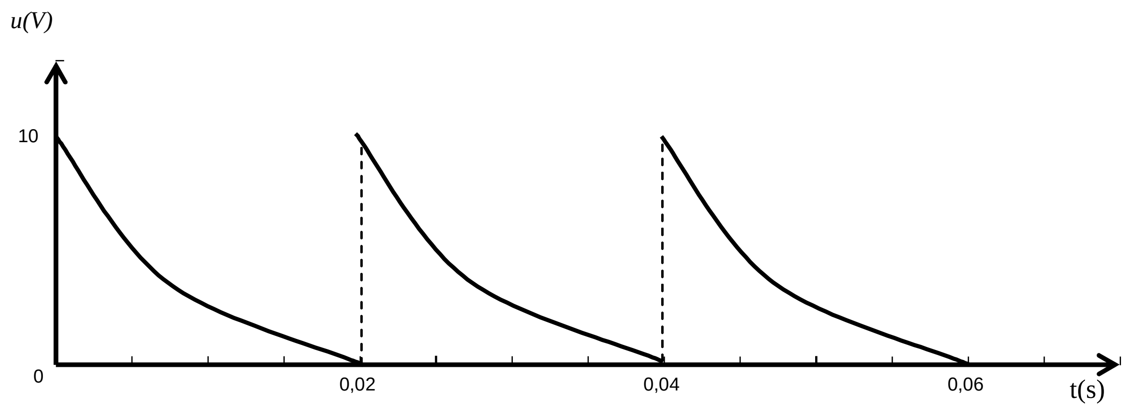
En multipliant le numérateur et le dénominateur de Z par le nombre complexe $(1 - 1{,}98j)$, montrer que Z peut s'écrire $Z = 0{,}2 - 0{,}4j$.

3.a. Calculer le module T du nombre complexe Z Arrondir à 10^{-3}.

b. En déduire le gain G du filtre. Arrondir à l'unité.

Exercice n°5 : (3 points)

Un générateur d'impulsions délivre une tension périodique $u(t)$, en volts, dont l'évolution en fonction du temps t, en seconde, est donnée par le schéma.



La valeur moyenne U de la tension est donnée par l'expression $\overline{U} = 500\displaystyle\int_0^{0{,}02} e^{-50t}\,dt$.

a. Montrer par le calcul que : $\overline{U} = 10\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$.

b. Donner la valeur de $\overline{U}$ arrondie à 0,1 V.

Document à rendre avec la copie

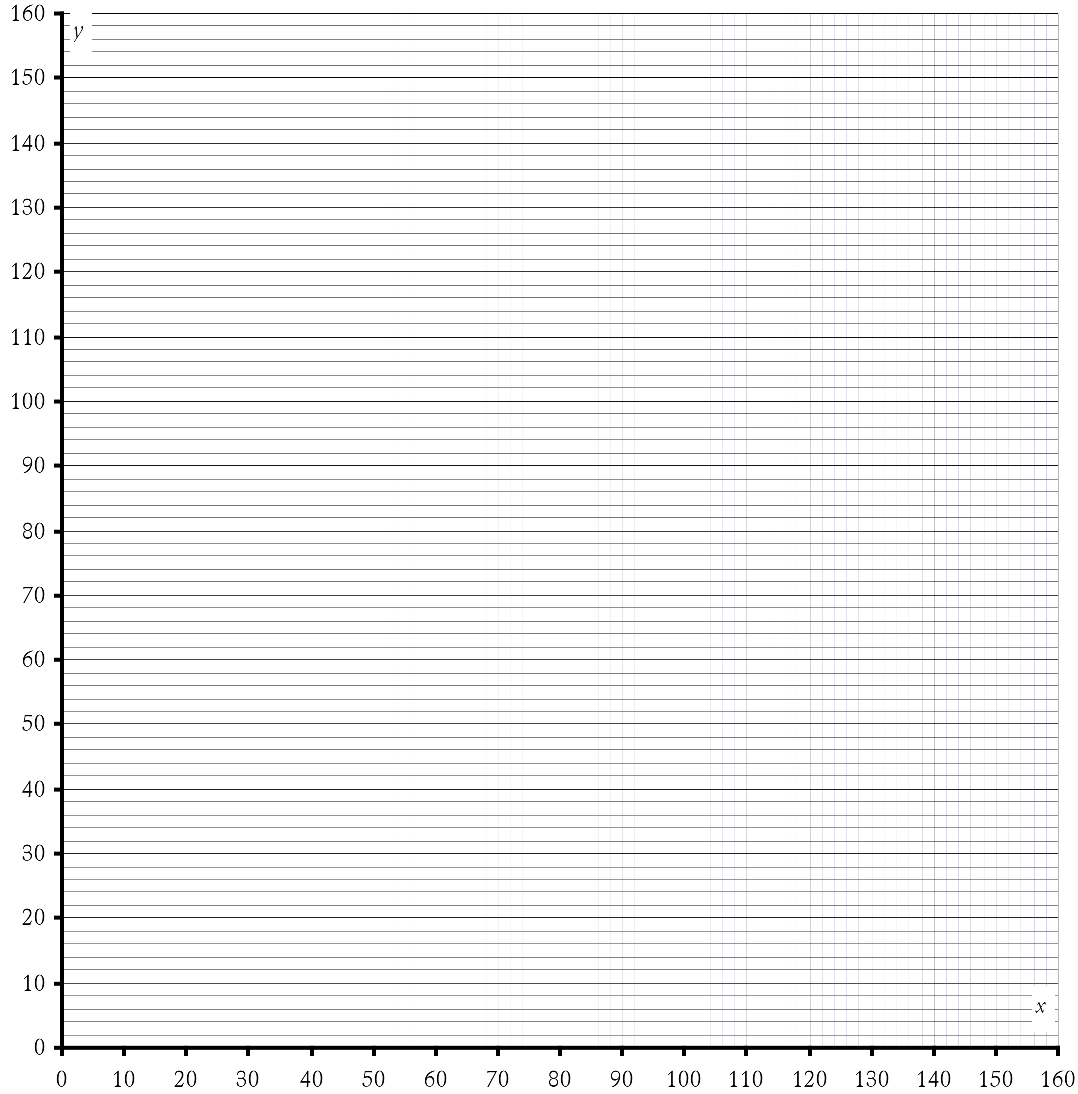
Annexe 1 : Tableau de variation

x	0 150
Signe de $f'(x)$	
Variation de f	

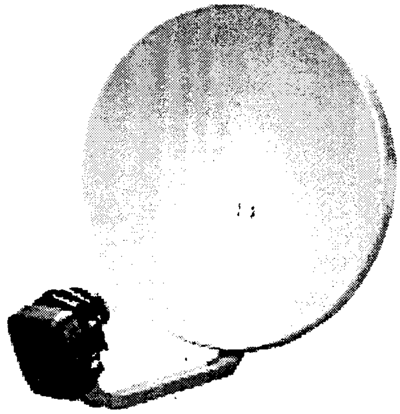
Tableau de valeurs

x	0	20	50	70	85	100	120	135	150
$f(x)$		31,2		37,2	46,8		83,2	104,8	

Représentation graphique :


160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
y
x
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160

Exercice 1 : la parabole (9 points)



Une antenne parabolique permet de capter des signaux grâce à un dispositif appelé tête, placé en un point appelé foyer de la parabole.

Un arc de parabole est représenté dans le repère de l'annexe 1 : il a pour extrémités les points

A (−3 ; 1,125) et B (3 ; 1,125).

A - Equation de la parabole

On admet que la parabole a une équation de la forme $y = ax^2$ où a est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante a en utilisant les coordonnées du point B de la parabole. Donner alors l'équation de la parabole.

2. Vérifier par le calcul que le point C de coordonnées (2 ; 0,5) appartient à la parabole.

B - Tangente T à la parabole au point C

On admet que la parabole de l'annexe 1 est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [−3 ; 3] par $f(x) = 0{,}125x^2$.

1. Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.

2. Pour quelle valeur x_0 la dérivée est-elle nulle ? En déduire la tangente au point de la courbe d'abscisse x_0.

3. Montrer que la tangente T à la parabole au point C (2 ; 0,5) a pour équation $y = 0{,}5x - 0{,}5$.

4. Tracer la tangente T dans le repère de l'annexe 1.

C - Foyer F de la parabole

1. Justifier que le point d'intersection K de la tangente T et de l'axe des abscisses a pour coordonnées (1 ; 0).

2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KC}$.

3. Soit F le point d'intersection de la perpendiculaire à la tangente T passant par K et de l'axe des ordonnées. Déterminer graphiquement les coordonnées du point F.

4. On veut déterminer par le calcul l'ordonnée y du point F.

a. Sans calcul de produit scalaire, justifier que $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KF} = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KF}$ en fonction de l'ordonnée y du point F.

c. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KF}$ est égal à $-1 + 0{,}5y$.

d. En déduire l'ordonnée y du point F.

D - Aire sous la parabole

1. Colorier, dans le repère de l'annexe 1, la partie du plan dont l'aire correspond à l'intégrale

$$I = \int_0^3 0{,}125x^2\,dx.$$

2. Calculer I.

Exercice 2 : Gain de la parabole (3 points)

Le gain de la parabole peut se calculer avec la formule ci-dessous : $G = 10\log\left(\dfrac{\pi D f^2}{2c}\right)$ où G est le gain en dB, D est le diamètre en m, f est la fréquence d'utilisation en Hz, c est la célérité de la lumière égale à 3.10^8 m/s, log est le logarithme décimal.

1. Calculer le gain de la parabole si D = 60 cm et $f = 9.10^9$ Hz. Arrondir à 10^{-2}.

2. A partir de quelle fréquence peut-on utiliser une telle parabole sachant que le gain doit être supérieur ou égal à 20 dB ? Arrondir la fréquence à 10^7 Hz.

Exercice 3 : Adaptation d'impédance (8 points)

L'antenne est reliée à une ligne de transmission. Le rapport d'ondes stationnaires appelé *ROS* exprime la désadaptation d'impédance entre les deux. Si l'adaptation d'impédance n'est pas parfaite, il y a réflexion d'une partie plus ou moins importante de l'énergie, caractérisée par le coefficient de réflexion ρ .

On admet la relation : $ROS = \dfrac{1+\rho}{1-\rho}$.

On se propose d'étudier les variations du *ROS* en fonction de ρ à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1[par : $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer en utilisant le formulaire que $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$.

2. Déterminer le signe de $f'(x)$.

3. En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. Compléter le tableau de valeurs de l'annexe 1. Arrondir les valeurs à 0,1.

5. Tracer la courbe représentative de f dans le repère de l'annexe 2.

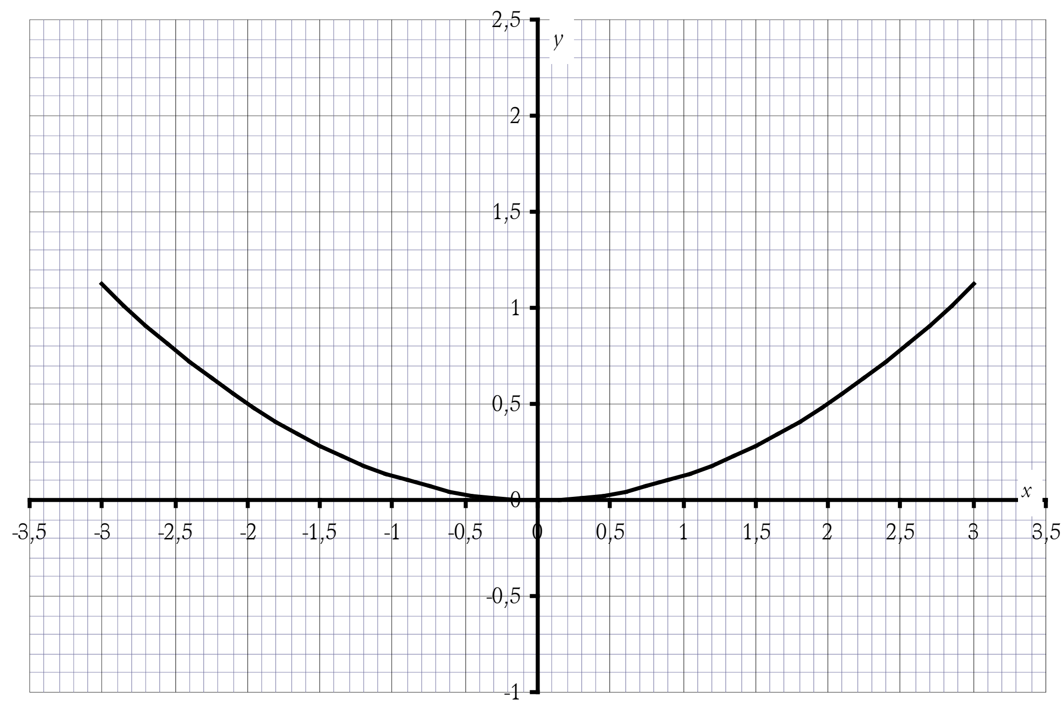
6. a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 10$.

b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 10$. Arrondir la solution au millième.

c. A l'aide d'une phrase faisant intervenir le rapport d'onde stationnaire *ROS* et le coefficient de réflexion ρ , traduire le résultat obtenu à la question 6.a. ou à la question 6.b.

Annexe 1

A rendre avec la copie



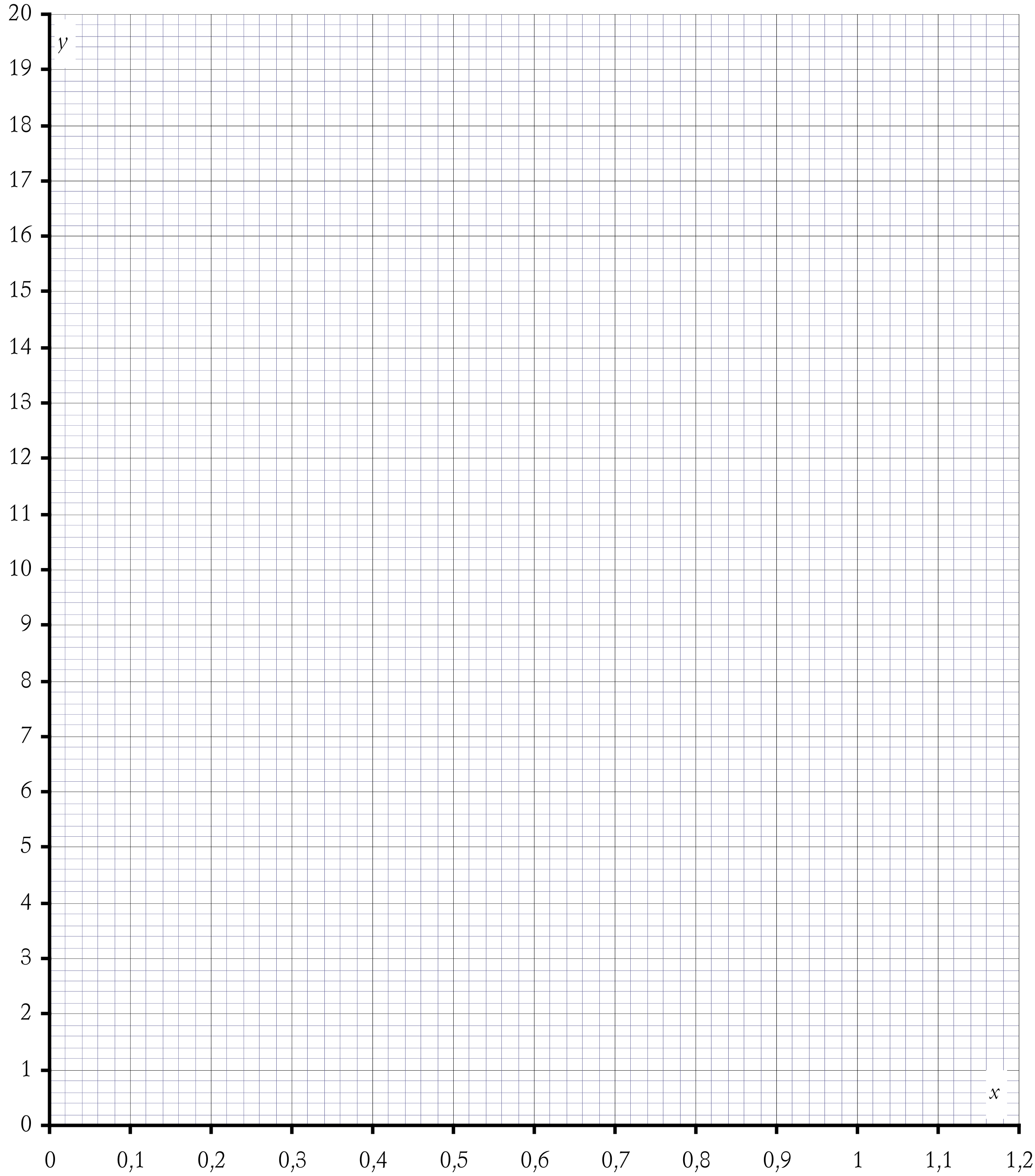
Exercice 3

Tableau de valeurs

x	0	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9
$f(x)$			3		9	

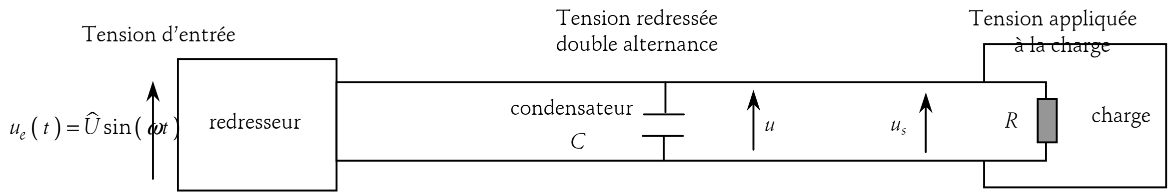
Annexe 2

A rendre avec la copie



Exercice 1 (10 points)

A la sortie d'un redresseur on branche un condensateur en parallèle à la charge.



La tension $u_s(t)$ appliquée à la charge varie avec le temps t : ses variations sont représentées graphiquement en annexe 1.

L'objectif de cet exercice est de préciser la variation de cette tension entre les instants 0 et 7,5 ms correspondant à un moment où le condensateur se décharge.

Dans la suite cette tension est notée plus simplement $u(t)$ et on admet que pour tout t de l'intervalle $[0\,;0{,}0075]$: $Ru'(t)+\frac{1}{C}u(t)=0$ où R est la résistance de la charge, C la capacité du condensateur et u' la dérivée de la fonction u.

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

1. Sachant que R = 10 Ohms et $C = 2.10^{-3}$ Farad, montrer que l'équation différentielle ci-dessu s'écrit

$$u'(t)+50u(t)=0 \quad \text{(E)}.$$

2. a. L'équation différentielle (E) est de la forme $u'(t)-au(t)=0$. Donner la valeur de la constante a.

b. En déduire la solution généralme de l'équartion (E).

3. Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $u(0)=6$.

B. Etude de fonction

Soit la fonction u définie sur l'intervalle $[0\,;0{,}0075]$ par $u(t)=6e^{-50t}$.

1. Déterminer $u'(t)$ où u' est la dérivée de la fonction u.

2. Déterminer, en le justifiant, le signe de $u'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;0{,}0075]$.

3. En déduire le sens de variation de u sur l'intervalle $[0\,;0{,}0075]$.

4. a. Calculer $u(0{,}0075)$.

b. Résoudre l'équation $6e^{-50t}=5$ en utilisant le logarithme népérien. Arrondir la solution à 10^{-4}.

C. Exploitation de la courbe représentée sur l'annexe 1

1. Sur la représentation graphique de l'annexe 1, surligner en couleur la partie de la courbe correspondant à la représentation graphique de la fonction u.

2. Calculer $u'(0)$, le nombre dérivé de la fonction u en 0.

3. Déterminer une équation de la droite (T), tangente à la courbe représentative de la fonction u au point d'abscisse 0.

4. Tracer (T) dans le repère de l'annexe 1.

5. Déterminer graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la droite (T) avec l'axe des abscisses. Comparer avec la valeur de la constante de temps RC.

Exercice 2 (10 points)

Un signal péroiodique s a pour période $T = 2\pi$. Sa représentation graphique sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, donnée en annexe 2 dans un repère orthogonal d'origine O, comprend :

- les segments de droite [OA], [DE] et [HI], extrémités comprises, situés sur l'axe des abscisses ;
- les segments [BC] et [FG], extrémités non comprises.

1. a. Calculer la pulsation ω du signal s, sachant que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

b. Tracer la représentation graphique de s sur l'intervalle $[-2\pi ; 0]$ dans l'annexe 2.

c. A partir de la représentation graphique de s, justifier que la fonction s est impaire.

d. On admet que l'énergie moyenne transportée par le signal s pendant une période est $E = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 4dt$.

Montrer que $E = 2$.

2. On rappelle que le polynôme de Fourier d'ordre 5 associé au signal s est :

$$P_5(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \ldots + a_5\cos(5\omega t) + b_5\sin(5\omega t).$$

a. Donner la valeur des coefficients a_k, $0 \leq k \leq 5$. Justifier la réponse à l'aide d'un résultat de la question 1.

b. Calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sin t dt$. En donner la valeur exacte sachant que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c. Calculer $J = \displaystyle\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} -2\sin t dt$. Donner la valeur exacte.

d. En déduire la valeur exacte du coefficient b_1 sachant que $b_1 = \dfrac{2}{T}(I + J)$.

3. On admet que le polynôme de Fourier d'ordre 5 du signal s peut s'écrire :

$$P_5(t) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin t - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\sin 3t - \frac{4\sqrt{2}}{5\pi}\sin 5t.$$

a. D'après la formule de Parseval, l'énergie moyenne transportée par le signal P_5 est

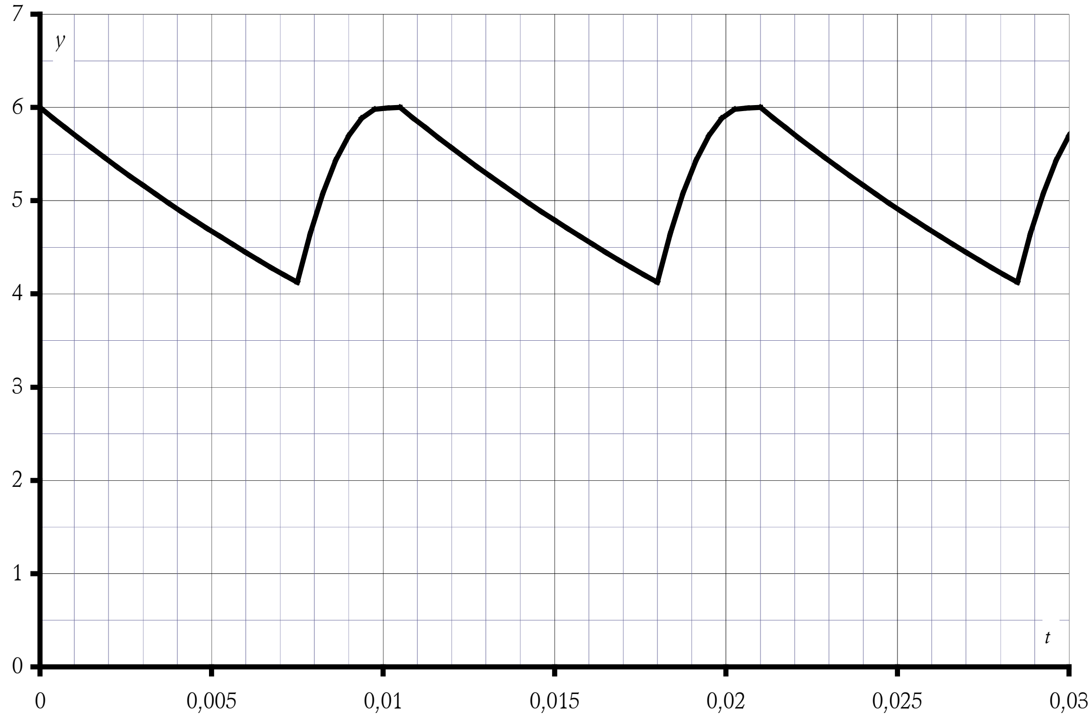
$$E_5 = \frac{1}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2\right).$$

Calculer E_5 ; arrondir à 10^{-3}.

b. Exprimer en pourcentage le rapport $\dfrac{E_5}{E}$ sachant que la valeur de E est donnée à la question 1.d.

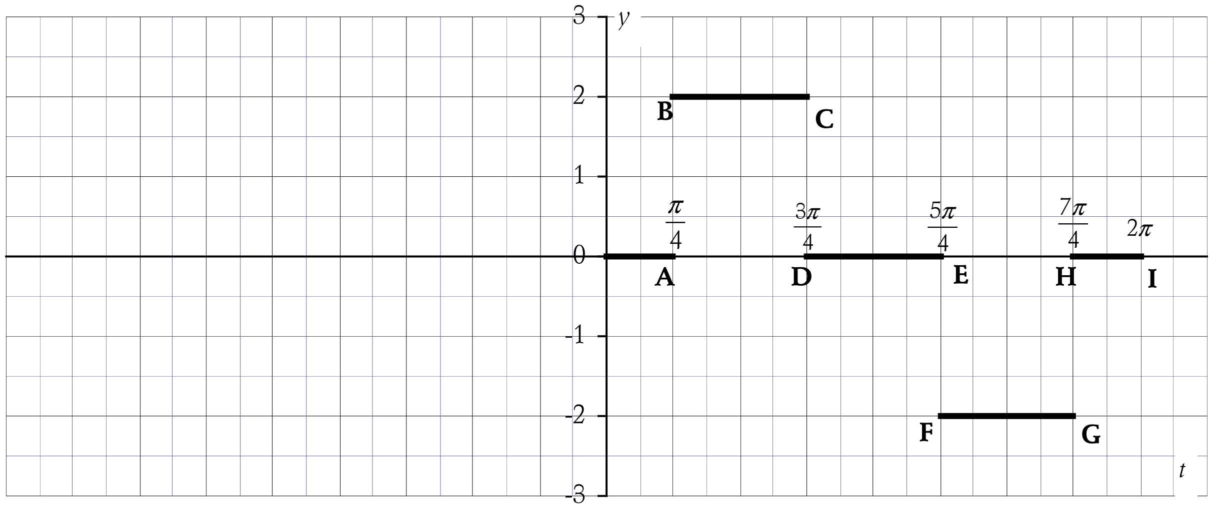
c. L'approximation de s par P_5 paraît-elle bonne ? Indiquer un signal fournissant une meilleure approximation de s.

Annexe 1 à rendre avec la copie



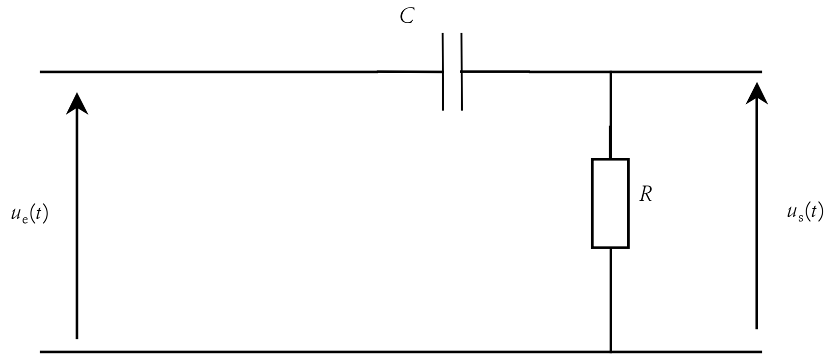
Annexe 2 à rendre avec la copie

Représentation graphique du signal *s*



Exercice n°1 (6 points) : Etude d'un circuit filtre passe-haut

On donne ci-dessous le schéma d'un circuit constitué d'un condensateur de capacité $C = 9,2 \times 10^{-9}$ F et d'un dipôle résistif de résistance $R = 10^3$ ohms.



On admet que les tensions $u_e(t)$ (tension d'entrée) et $u_s(t)$ (tension de sortie) sont des tensions sinusoïdales de même pulsation ω définies en fonction du temps t.

A. Détermination de la fréquence de coupure

La fréquence de coupure notée f_0, en Hertz, (Hz) du filtre est donnée par la relation : $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$ avec R en ohm (Ω) et C en farad (F). Calculer f_0 en kHz. Arrondir à 10^{-1}.

B. Calcul d'un gain en décibel (dB)

La fonction transfert de ce filtre est définie par la grandeur complexe T avec $T = \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{C\omega j}}$ où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On pose $x = RC\omega$. Montrer que T peut d'écrire $T = \dfrac{xj}{1 + xj}$.

2. On note $|T|$ le module de T. Montrer que $|T| = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3. Le gain G exprimé en décibel (dB) est une grandeur définie par : $G = 20\log|T|$ où log est le logarithme décimal. On admet que la fréquence des tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$ est f = 10 kHz.

a. Donner la valeur de la pulsation ω (en rad/s) en exprimant le résultat sou s la forme d'un multiple du nombre π.

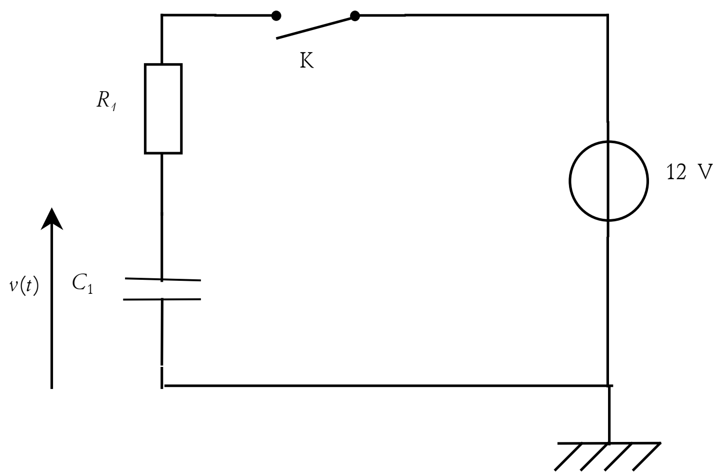
b. Calculer la valeur de x arrondie à 10^{-3}.

c. Calculer la valeur de $|T|$ arrondie à 10^{-1}.

d. En déduire la valeur du gain G arrondie à 10^{-1} dB.

Exercice n°2 (sur 14 points) : Etude d'un régime transitoire

On considère le circuit dont le schéma est représenté ci-dessous :



Ce circuit comprend en série, un condensateur de capacité $C_1 = 10^{-7}$ F, un dipôle résistif de résistance $R_1 = 5\times10^3\ \Omega$, un interrupteur K, un générateur de tension continue égale à 12 V.

Le condensateur est initialement chargé sous une tension égale à –6 V.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur varie en fonction du temps t.

L'étude qui suit permet de déterminer l'expression de $v(t)$, de connaître à partir de quel instant la tension $v(t)$ devient positive et de calculer l'énergie dissipée par le dipôle résistif entre deux instants donnés .

A. Equation différentielle

A chaque instant t, en seconde, avec $t \geq 0$, la tension $v(t)$, en volt, vérifie la relation

$$R_1C_1v'(t)+v(t)=12 \qquad (1)$$

où v' est la dérivée de la fonction v.

1. Montrer que l'équation différentielle (1) s'écrit

$$v'(t)+2000v(t)=24000 \qquad (2).$$

2. On considère l'équation différentielle « sans second membre » (3) : $v'(t)+2000v(t)=0$.

a. Ecrire l'équation différentielle (3) sous la forme $u'(t)-au(t)=0$ du formulaire où a est une constante à déterminer.

b. En déduire la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3).

3. Vérifier que la fonction constante f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t)=12$ est une solution particulière de l'équation différentielle (2).

4. On admet que la solution générale de l'équation différentielle (2) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3) et de la solution particulière de l'équation différentielle (2) définie à la question 3.

a. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (2).

b. Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (2) qui vérifie la condition initiale $v(0)=-6$.

B. Etude et représentation graphique de la fonction v

Soit la fonction v définie sur l'intervalle $\left[0\ ;2\times10^{-3}\right]$ par $v(t)=-18e^{-2000t}+12$.

1. Sachant que $v'(t)=36000e^{-2000t}$, où v' est la dérivée de la fonction v, donner le signe de $v'(t)$ sur l'intervalle $\left[0\ ;2\times10^{-3}\right]$. Justifier la réponse.

2. Compléter, sur l'annexe, le tableau de valeurs de la fonction v.

3. Compléter. sur l'annexe, le tableau de variation de la fonction v sur $\left[0\,;2\times10^{-3}\right]$.

4. On appelle C la courbe représentative de la fonction v, dans le repère de l'annexe. En utilisant les résultats précédents, tracer la courbe C sur l'annexe .

5. Par lecture graphique, donner sous forme d'intervalle, les valeurs de t telles que $v(t) \geq 0$.

C. Energie dissipée par le dipôle résistif entre les instants t=0s et t=1s

On admet que l'énergie dissipée par effet joule par le dipôle résistif entre les instants t = 0 s et t = 1 s est :

$$E = \int_0^1 0{,}0648e^{-4000t}dt \text{ avec } E \text{ en joule (J) et } t \text{ en seconde (s).}$$

1. Soit la fonction g définie sur [0 ; 1] par $g(t) = 0{,}0648e^{-4000t}$. Donner l'expression $G(t)$ d'une primitive G de la fonction g.
2. Calculer, en utilisant le résultat de la question C.1., la valeur de E. Arrondir à 1 μ J.(1 μ J = 10^{-6} J).

Annexe à rendre avec la copie

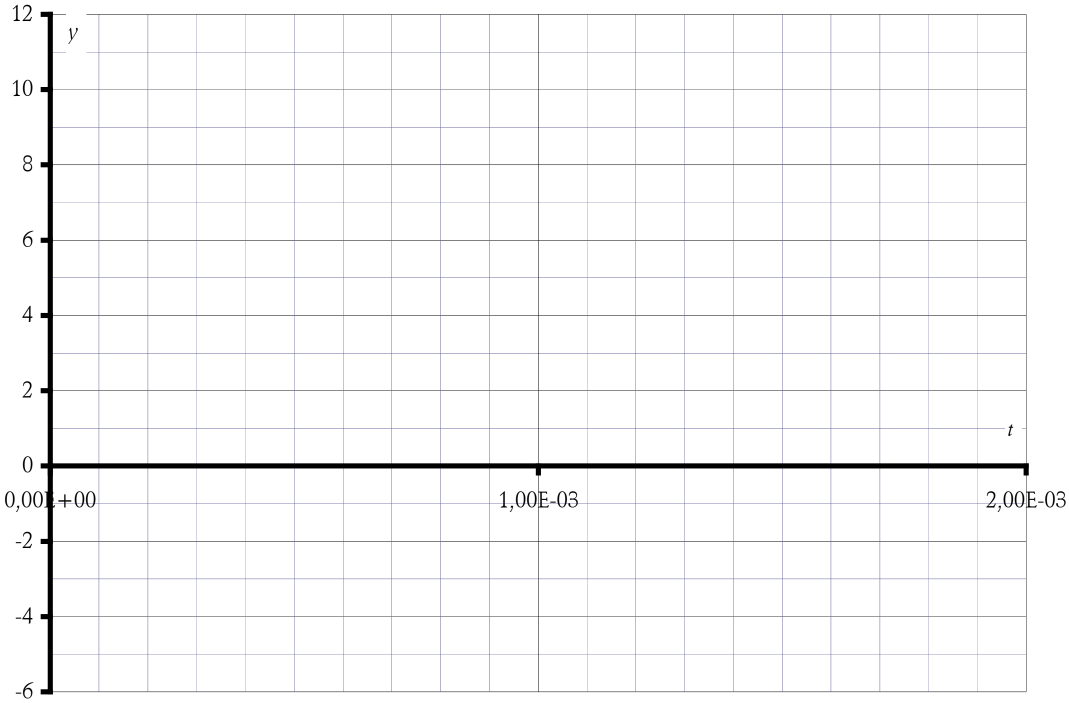
Exercice n°2 : B.2. Tableau de valeurs : les valeurs de $v(t)$ seront arrondies à l'unité

t	0	$0{,}1\times10^{-3}$	$0{,}3\times10^{-3}$	$0{,}9\times10^{-3}$	$1{,}4\times10^{-3}$	2×10^{-3}
$v(t)$	….	….	2	….	….	12

B.3. Tableau de variation

t	0 $\qquad\qquad$ 2×10^{-3}
Signe de $v'(t)$	
Variation de v	

B.4. Représentation graphique de la fonction v.

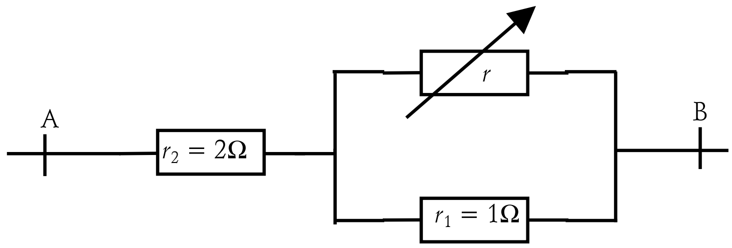

12
y
10
8
6
4
2
t
0
0,00E+00
1,00E-03
2,00E-03
-2
-4
-6

7. France, juin 2000, MRBT

Soit la portion d'un circuit électrique AB schématisée ci-dessous , où r est une résistance variable exprimée en ohms (Ω).

La résistance équivalente R du groupement entre les points A et B est donnée par la relation :

$$R = r_2 + \frac{r \times r_1}{r + r_1}.$$



Problème 1(8 points)

1. Monter que la résistance équivalente R peut s'écrire : $R = \frac{3r+2}{r+1}$.

Soit la fonction f, de la variable x, définie pour $x > -1$ par $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$.

2. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f.

x	–0,9	–0,8	–0,6	–0,5	–0,2	0,25	1	3	4	7
$f(x)$										

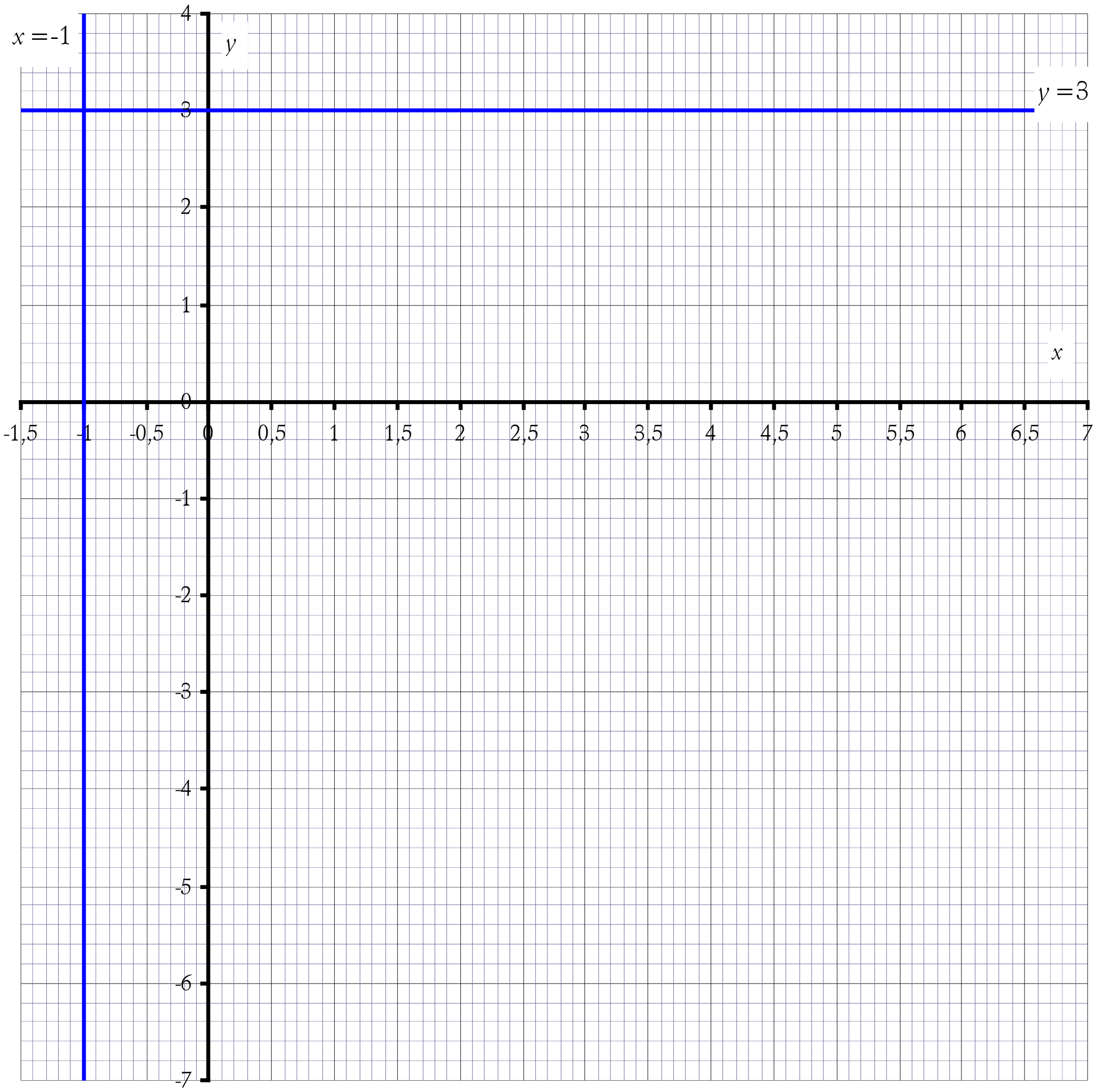
3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

4. Déterminer le signe de la dérivée et compléter le tableau de variation de la fonction f

x	-1	
$f'(x)$	‖	
$f(x)$	‖	

Soit C la représentation graphique de la fonction f.

Les asymptotes à la courbe C, d'équations : $x = -1$ et $y = 3$, sont tracées dans le plan muni du repère (O , Ox Oy).



5. Tracer la courbe C dans ce plan .

Retour à la situation initiale du problème :

6. Surligner la partie de la courbe C qui pourrait représenter la variation de la résistance *R* de la portion du circuit AB.

7. En déduire de quelle valeur la résistance *R* aurait tendance à s'approcher si on donnait à *r* des valeurs très grandes.

Expliquer pourquoi cette valeur était prévisible d'un point de vue électrique.

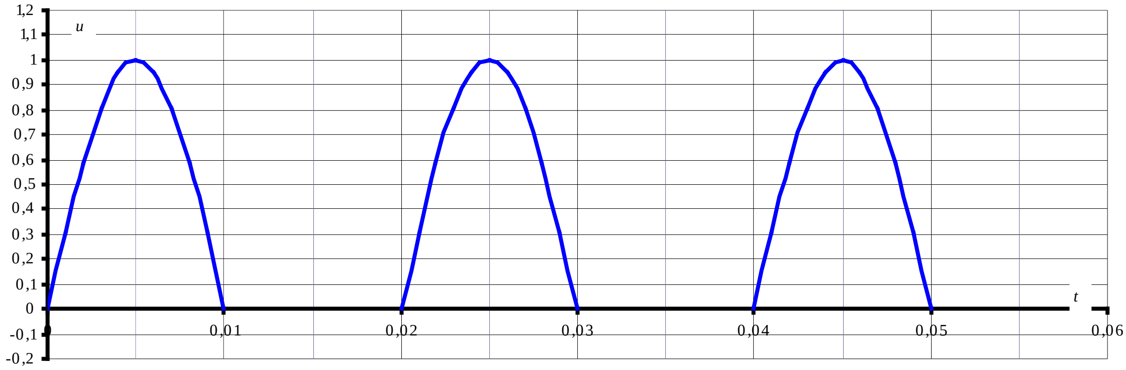
Problème 2 (8 points)

Un signal u de tension alternatif sinusoïdal redressé mono alternance est représenté ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Ce signal est défini par morceaux , en fonction du temps *t* par :

$u(t) = \sin(100\pi t)$ sur l'intervalle [0 ; 0,01]

$u(t) = 0$ sur l'intervalle [0,01 ; 0,02]



La représentation graphique montre que la période du signal est T = 0,02.

1. Calculer la valeur moyenne exacte du signal sur une période , sachant que $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$. En donner une valeur approchée à 0,01 près.

Le signal u peut être décomposé en série de Fourier à l'ordre n, tel que :

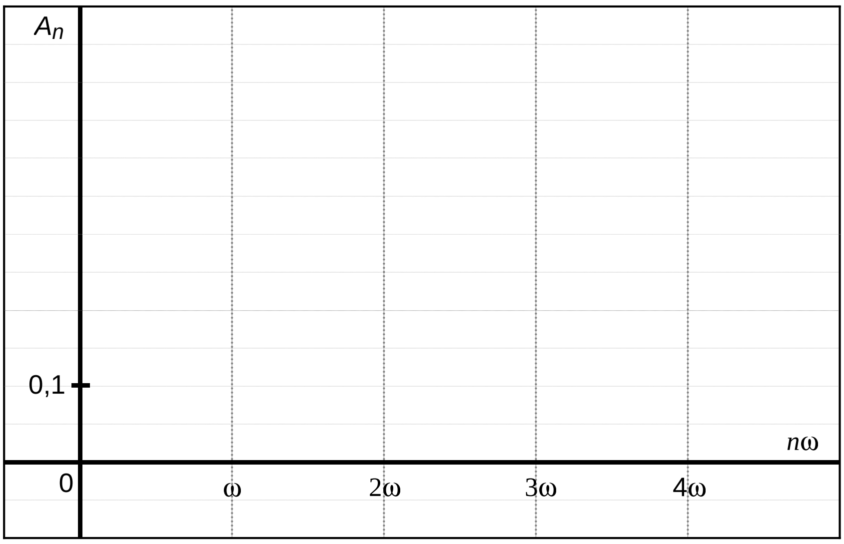
$u(t) = a_0 + a_1\cos(100\pi t) + b_1\sin(100\pi t) + a_2\cos(100\pi t) + b_2\sin(100\pi t) + \ldots + a_n\cos(100\pi t) + b_n\sin(100\pi t)$.

Le signal u peut être approximé par un polynôme trigonométrique f de rang 4, dont l'expression algébrique en fonction du temps est : $f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(100\pi t) - \frac{2}{3\pi}\cos(200\pi t) - \frac{2}{15\pi}\sin(400\pi t)$.

2. Identifier a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4 et b_4.

3. Sachant que l'amplitude des harmoniques A_n sont telles que $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, exprimer les valeurs exactes de A_1, A_2, A_3 et A_4, puis donner leurs valeurs approchées à 0,01 près.

4. Sachant de plus que $A_0 = |a_0|$, valeur absolue de a_0, représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal le spectre d'amplitude de f jusqu'au rang 4 .



5. Calculer l'énergie moyenne E_m transportée sur une période par le signal u sachant que :

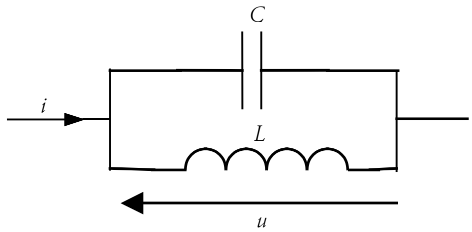
$$E_m = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt.$$

Il est rappelé que $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$.

6. La formule de Parseval permet de calculer l'énergie E_m' réellement transportée en approximant u par f. Le calcul de E_m' a donné le nombre 0,2497 comme résultat. Justifier que l'approximation de u par f est convenable.

Problème III (4 points)

L est l'inductance d'une bobine et C est la capacité d'un condensateur. La figure suivante montre un circuit LC parallèle alimenté par un courant électrique sinusoïdal i de valeur efficace u telle que $u = U\sqrt{2}\sin(100\pi t)$.



Il y a phénomène d'antirésonnance si $LC\omega^2 = 1$.

1. Ecrire la valeur exacte de la pulsation ω du signal de tension u.

Sachant que L = 10 mH, calculer C pour qu'il ait antirésonnance. Arrondir le résultat au μ F.

2. Les impédances complexes Z_L et Z_C de la bobine et du condensateur sont telles que :

$$Z_L = jL\omega \text{ et } Z_C = j\frac{1}{C\omega}.$$

On peut calculer l'impédance complexe Z du circuit grâce aux formules :

$$Z = \frac{Z_L \times Z_C}{Z_L + Z_C} \text{ ou } \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}.$$

Exprimer Z sous la forme algébrique $a + jb$, en fonction de L, C et ω. On rappelle que $\frac{1}{j} = -j$.

Remarque : les deux questions sont indépendantes.