Maintenance appareils et équipements ménagers et de collectivités

1. France, juin 2006

Exercice 1 (10 points)

Pour mesurer la température d'un four, on utilise un couple thermoélectrique. Le fabriquant précise que la caractéristique de ce couple est de la forme suivante : $E(t) = at^2 + bt + \mathrm{E_o}$

$E(t)$ étant la f.e.m. ou tension à vide exprimée en millivolts aux bornes du couple à la température t exprimée en degrés celsius. On se propose de déterminer les coefficients a, b, $\mathrm{E_o}$.

Pour cela, on relève la tension E à différentes températures. On obtient les résultats suivants :

t en °C	0	200	400
$E(t)$ en mV	0,44	1,34	3,84

1. Justifier que $\mathrm{E_o} = 0{,}44$ mV.

2. On se propose de déterminer la valeur des coefficients a et b dans l'expression : $E(\mathrm{t}) = at^2 + bt + 0{,}44$.

2.1. Vérifier que pour $t = 200$°C, l'expression s'écrit : $40\,000a + 200b = 0{,}9$.

2.2. Vérifier que pour $t = 400$°C, l'expression s'écrit : $160\,000a + 400b = 3{,}4$.

2.3. En déduire que a et b sont solutions du système : $\begin{cases} 200a + b = 0{,}0045 \\ 400a + b = 0{,}0085 \end{cases}$.

2.4. Résoudre ce système.

2.5. Ecrire l'expression de $E(t)$ en remplaçant a et b par leur valeur.

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = 2.10^{-5}x^2 + 5.10^{-4}x + 0{,}44$ sur l'intervalle [0 ; 400].

3.1. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 400].

3.2. Résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$.

3.3. Compléter le tableau de variation de la fonction f sur l'annexe.

3.4. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f sur l'annexe. Arrondir les valeurs à 10^{-2}.

3.5. Tracer dans le repère de l'annexe la courbe représentative C de f.

3.6. Calculer le nombre dérivé $f'(300)$.

3.7. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe C au point d'abscisse $x = 300$.

3.8. En utilisant le repère de l'annexe, construire la droite Δ.

Exercice 2 (3 points)

Un artisan assure des dépannages à domicile et utilise un véhicule utilitaire pour ses déplacements. La première année, il a parcouru une distance $d_1 = 10\ 000$ km.

1. Chaque année la distance parcourue augmente de 4% par rapport à l'année précédente.

1.1. Calculer en kilomètre la distance d_2 parcourue la deuxième année. Calculer en kilomètre la distance d_3 parcourue la troisième année.

1.2. Vérifier que les distances parcourues d_1, d_2, d_3 sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}04$.

1.3. Calculer en kilomètre la distance d_{10} parcourue la dixième année. Arrondir le résultat à l'unité.

2. L'artisan considère que son véhicule utilitaire devra être remplacé lorsqu'il aura parcouru 120 000 kilomètres. Utiliser la suite précédente pour déterminer au bout de combien d'années, depuis sa mise en service, le véhicule devra être remplacé.

Annexe à rendre avec la copie

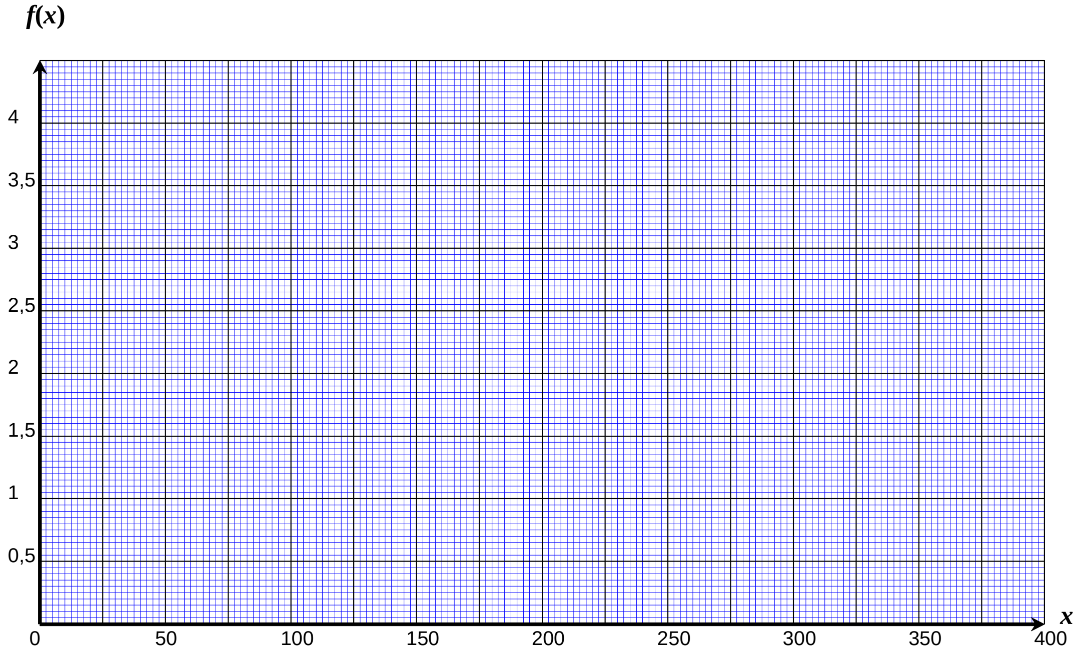
Tableau de variation

x	0	400
Signe de $f'(x)$		
Variation de f		

Tableau de valeurs

x	0	50	100	150	200	250	300	350	400
$f(x)$	0,44	0,52		0,97		1,82		3,07	

Courbe représentative C



Réponses

Exercice 1

1. 1. Pour $t = 0$, $E = E_o = 0{,}44$mV

1.1. 1. 1. En remplaçant t par 200°C et après simplification : 40 000a + 200b = 0,9

1.2. En remplaçant t par 400°C et après simplification : 160 000a + 400b = 3,4

1.3. Le système proposé est obtenu en divisant la 1ère équation par 200 et la 2ième par 400.

1.4. $a = 2.10^{-5}$ et $b = 5.10^{-4}$

1.5. $E(t) = 2.10^{-5}\,t^2 + 5.10^{-4}\,t + 0{,}44$

1.1. $f'(x) = 4.10^{-5}\,x + 5.10^{-4}$

1.2. $x > -12{,}5$

1.3. $f'(x) > 0$ dans l'intervalle [0 ; 400] et f croissante.

1.4. $f(100) = 0{,}69$; $f(200) = 1{,}34$; $f(300) = 2{,}39$; $f(400) = 3{,}84$

1.5. Courbe parabolique.

1.6. $f'(300) = 0{,}0125$

1.7. $y = 0{,}0125\,x - 1{,}36$

1.8. Droite passant par les points (200 ; 1,14) et (300 ; 2,39)

Exercice 2

1.1. $d_2 = 10\,400$ km ; $d_3 = 10\,816$ km

1.2. $\frac{d2}{d1} = \frac{d3}{d2} = 1{,}04$

1.3. $d_{10} = 10\,000 \,.\, 1{,}04^9 = 14\,233$ km

2. En utilisant les logarithmes : $n = 9{,}995 \approx 10$ ans.

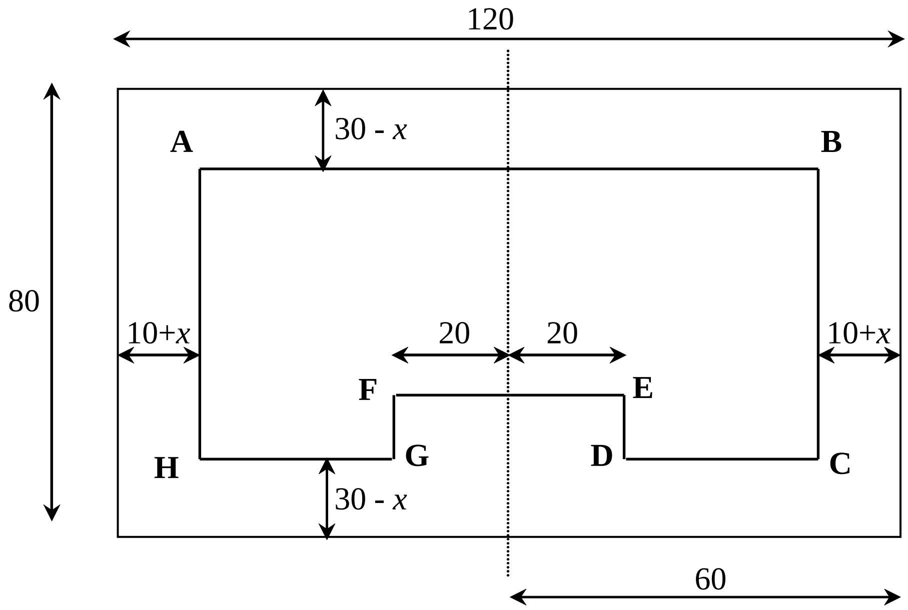
2. France, juin 2005

EXERCICE 1 (11 points)

Une entreprise de dépannage en appareils électroménagers vient d'acquérir un nouveau véhicule et décide alors de poser sur les portières un autocollant publicitaire. On cherche à déterminer les dimensions à donner à cet autocollant pour assurer sa lisibilité sans nuire à l'esthétique du véhicule.

La place disponible est un rectangle de longueur 120 cm et de largeur 80 cm.

La forme et la disposition de l'autocollant ABCDEFGH dans le rectangle sont indiquées dans la figure ci-dessous. Elles dépendent de la distance x.



Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

<u>Partie A :</u> *Calcul de l'aire de l'autocollant.*

1. Calculer l'aire du rectangle FEDG.

2. Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle ABCH.

3. En déduire que l'aire A, en cm^2, de l'autocollant ABCDEFGH est : $A(x) = -4x^2 + 160x + 1600$.

<u>Partie B :</u> *Etude d'une fonction.*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $f(x) = -4x^2 + 160x + 1600$.

1. Compléter le tableau de valeurs de f situé sur l'annexe à rendre avec la copie.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

3. Résoudre $f'(x) = 0$ et $f'(x) > 0$. Compléter alors le tableau de variation de f sur l'annexe.

4. Tracer la courbe représentative de f en utilisant le repère de l'annexe.

<u>Partie C :</u> *Exploitation des parties A et B pour la recherche de valeurs de x*

1. Déterminer graphiquement les valeurs de x en cm pour lesquelles l'aire $f(x)$ de l'autocollant est égale à 3000 cm^2. Laisser apparents les traits nécessaires à la lecture.

2. Quelle est l'aire maximale de l'autocollant ? Pour cette aire, déterminer AB et AH en cm.

3. Un rectangle de longueur L et de largeur l a une forme parfaitement équilibrée si : $\dfrac{L}{l} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (1) (nombre d'or)

4. Pour la suite du problème, on prend 1,6 comme valeur approchée de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.1. Pour $L = 2(50 - x)$ et $l = 2(10 + x)$, montrer que la relation (1) s'écrit : $50 - x = 1{,}6\ (10 + x)$.

4.2. Résoudre cette équation (arrondir à l'unité). En remarquant que AB = L et AH = l, en déduire <u>sans calcul</u>, l'aire d'un autocollant de forme équilibrée.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour déplacer les appareils électroménagers, cette entreprise utilise dans son atelier un transpalette.

On a schématisé sur la figure 1 le transpalette vu de côté.

On associe à ce transpalette un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. Le timon OM a pour longueur 0,9 m. Il se déplace dans le plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ en tournant autour de O. Soit α la mesure de l'angle du timon avec la verticale. Lorsque le timon est en position verticale, le point M est en A.

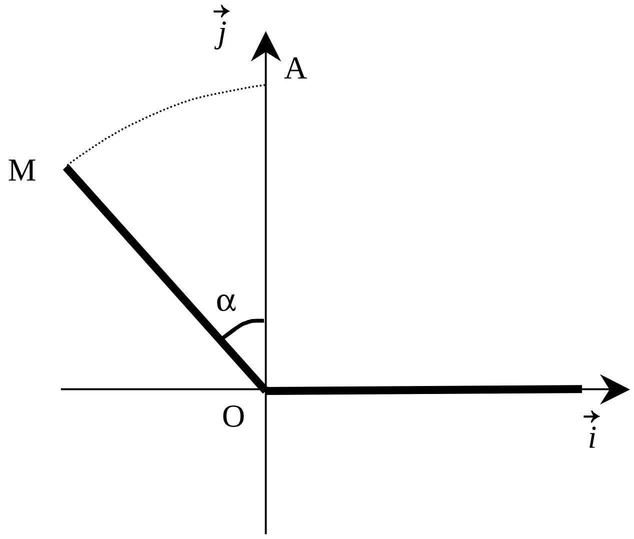


Figure 1

1. Donner les coordonnées du point A.

2. Exprimer les coordonnées du point M en fonction de α. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}$ en fonction de α.

Calculer en degré la valeur de α pour laquelle le produit scalaire vaut 0,405 (cet angle correspond à une levée de charge de 4 cm).

<u>ANNEXE</u> à rendre avec la copie

EXERCICE 1

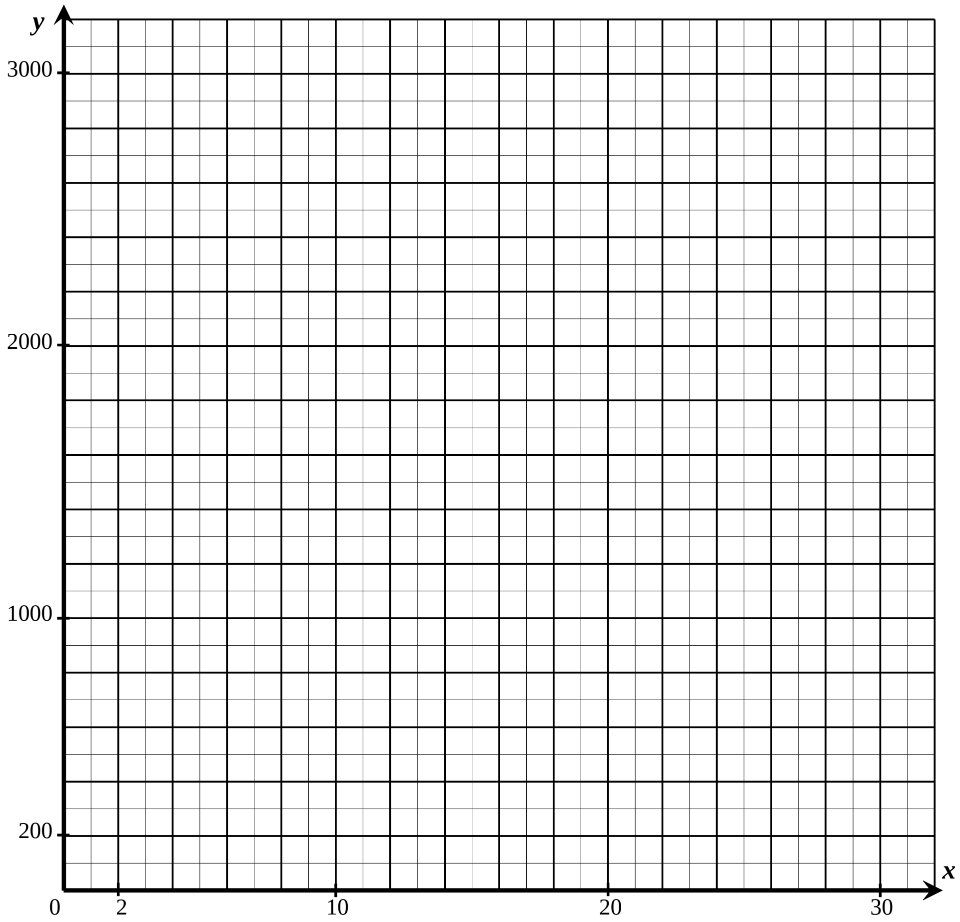
Question B-1 : tableau de valeurs

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

Question B-3 : tableau de variation

x	0 30
signe de $f'(x)$	0
variation de f	

Question B-4 : courbe de f



3. Antilles - Guyane - Polynésie, juin 2005

Les parties A, B et C sont indépendantes.

L'entreprise FAITOUT fabriquant des fers à repasser envisage de commercialiser un nouveau modèle sur le marché (figure 1) pour remplacer un modèle de la gamme précédente, la différence essentielle résidant dans le profil de la semelle de fer.

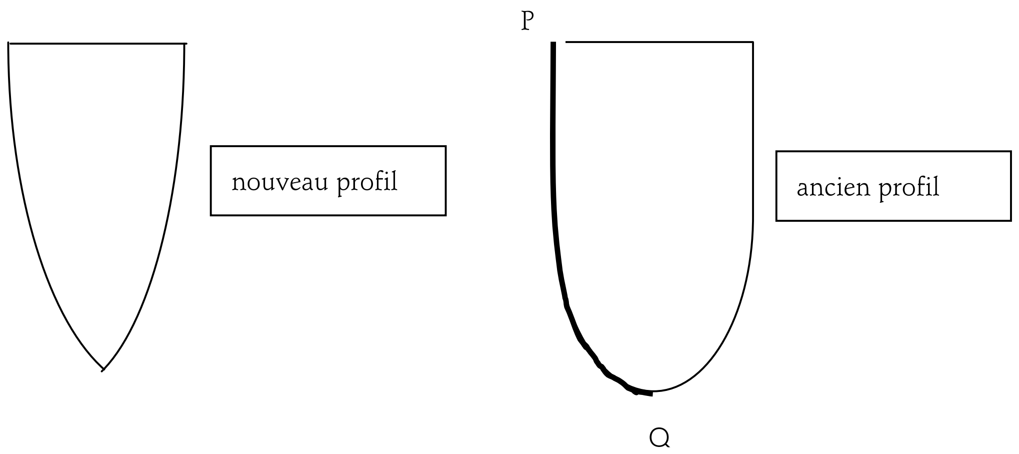


Figure 1

Partie A : Position des trous permettant la sortie de la vapeur sur la semelle de l'ancien modèle (1,5 point)

La courbe C représentée sur l'annexe 1, représente la partie PQ de l'empreinte de la semelle de l'ancien modèle. Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur $[0;25]$.

1. Représenter dans le même repère sur l'annexe 1, la courbe C_1 d'équation $y = f(x) - 2$.

2. Les trous permettant la sortie de la vapeur sont sur la courbe C_1. Placer deux de ces trous représentés par les points A et B d'abscisses respectives 5 et 15.

Partie B : Etude de la forme de la semelle du nouveau modèle (9,5 points)

Soit *f* la fonction définie sur $[-8;8]$ par $f(x) = 0,4x^2$.

1. Compléter le tableau de valeurs sur l'annexe 2.
2. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction *f*.
3. Résoudre $f'(x) = 0$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-8\ ;\ 8]$.
4. Compléter le tableau de variations de la fonction *f* sur l'annexe 2.
5. Tracer la courbe C_f représentative de la fonction *f* en utilisant le repère de l'annexe 2.

Echelle : axe des abscisses : 1cm pour une unité ; axe des ordonnées : 1 cm pour deux unités.

1. Montrer que la tangente T à la courbe C_f au point H d'abscisse $x_0 = 2$ a pour équation : $y = 1,6x - 1,6$.
2. Placer H et tracer cette tangente en utilisant le repère de l'annexe (2).

a. Nommer l'axe de symétrie de la courbe C_f dans le repère de l'annexe 2.

b. Construire la droite T' symétrique de la tangente T par rapport à l'axe des ordonnées.

c. Donner l'abscisse du point de contact H' de T' et de C_f.

3. Déterminer graphiquement les coordonnées du point I intersection des droites T et T'.
4. Repasser en couleur la forme de la semelle du nouveau modèle délimité par la courbe C_f sur $[-8;-2]$ et $[2;8]$ et les segments $[H'I]$ et $[IH]$.

Partie C : Etude du réservoir d'eau du fer à repasser (2 points)

Dans le corps de l'appareil "nouveau modèle", est inséré un réservoir d'eau (représenté figure 3). Celui-ci est formé de deux parties : partie 1 et partie 2.

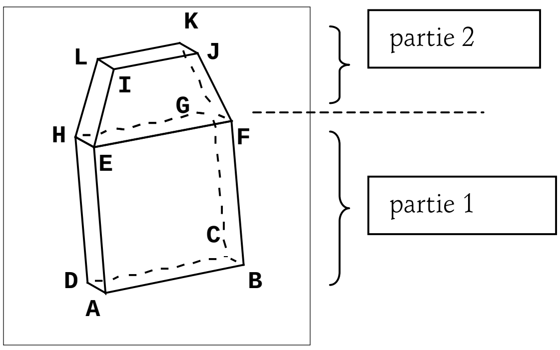


figure 3 : réservoir

1. Calculer le volume V_1 de la partie 1 du réservoir en cm^3.

On donne AB = 12 cm ; AD = 3 cm ; AE = 8,75 cm.

2. Calculer l'aire du trapèze EFJI en cm^2.

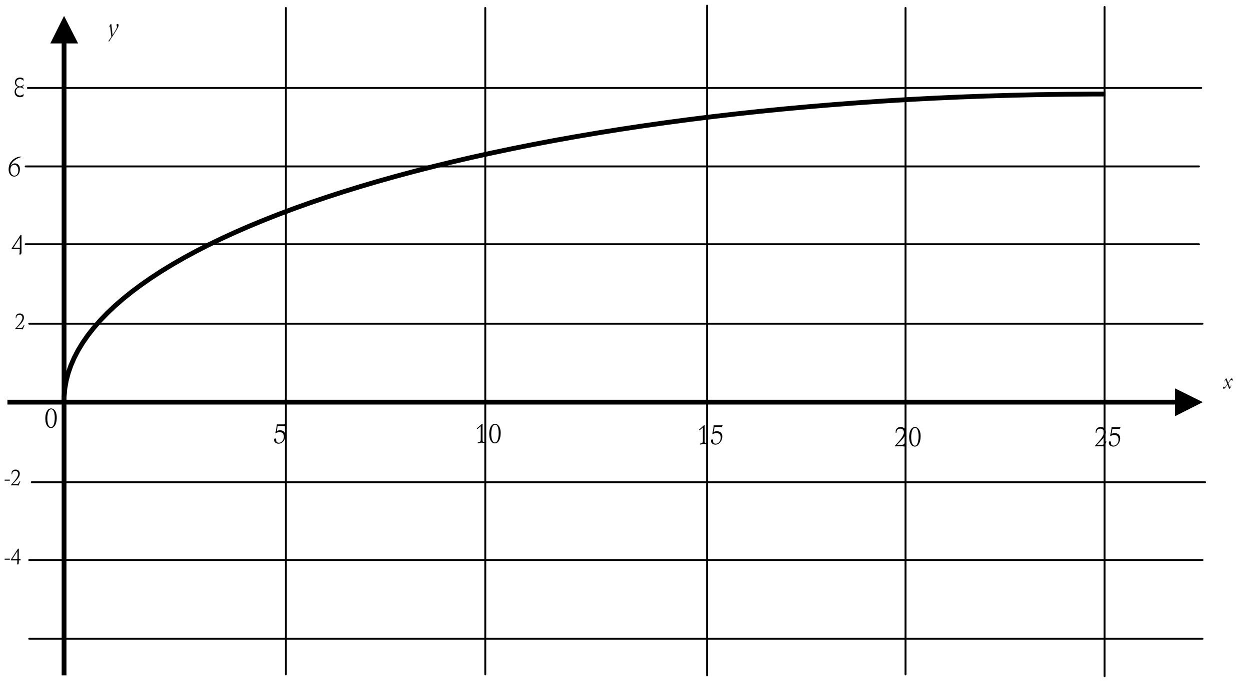
On donne EF = 12 cm ; IJ = 2 cm ; la hauteur du trapèze est égale à 4 cm.

3. En déduire le volume V_2 de la partie 2 en cm^3. On donne EH = IL = JK = FG = 3 cm.

4. Calculer le volume total V du réservoir en cm^3.

ANNEXE 1 A RENDRE AVEC LA COPIE

Partie A



<u>ANNEXE 2</u>

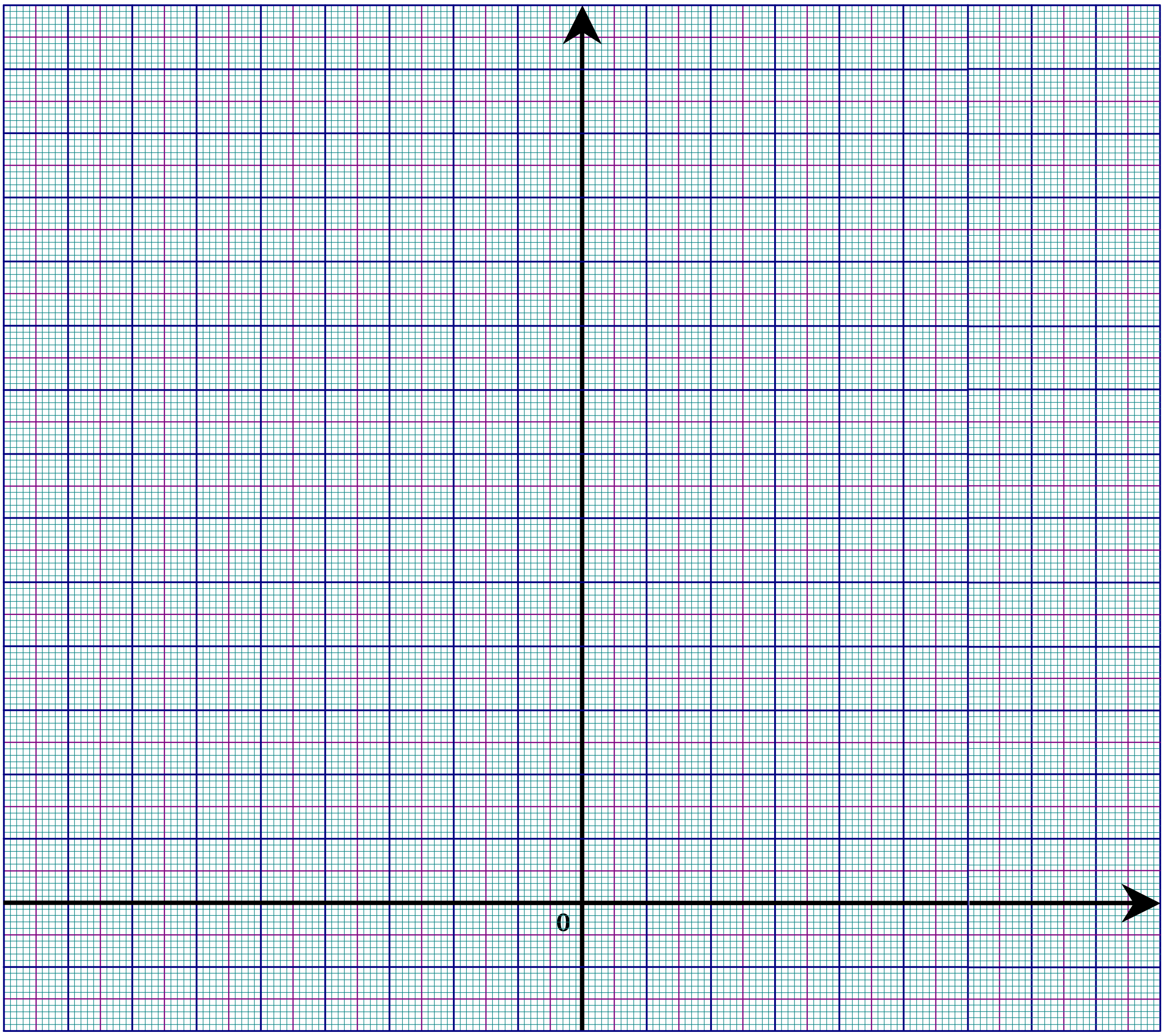
A RENDRE AVEC LA COPIE

Question 1 :

x	– 8	– 6	– 4	– 2	– 1	0	1	2	4	6	8
$f(x) = 0{,}4x^2$	25,6		6,4		0,4			1,6			

Question 4 :

x	– 8	0	8
Signe de $f\,'(x)$			
f			



4. France, septembre 2005

EXERCICE 1 : TEST DE FONCTIONNEMENT D'UN FOUR A MICRO – ONDES. (7,5 points)

Un four à micro-ondes de puissance P est utilisé pour chauffer un volume V d'eau pendant un temps t.

L'élévation $\Delta\theta$ de la température de l'eau peut être calculée par la relation suivante :

$$\Delta\theta = \frac{P \times t}{4{,}187 \times V}$$

$\Delta\theta$: élévation de la température de l'eau (°C)

P : puissance (W)

t : temps de chauffage (s)

V : volume d'eau (mL)

1. Calculs numériques

1.1. Calculer la valeur de l'élévation de température $\Delta\theta$, lorsque P = 1 700 W ; t = 15 s et V = 100 mL. Le résultat sera arrondi à l'unité.

1.2. Les températures initiale $\theta_{initiale}$ et finale θ_{finale} de l'eau sont liées par la relation $\Delta\theta = \theta_{finale} - \theta_{initiale}$.

Exprimer θ_{finale} en fonction de V lorsque P = 1 700 W ; t = 120 s et $\theta_{initiale}$ = 20 °C.

1.3. Etude de la température finale pour P = 1 700 W ; t = 120 s et θ_{finale} = 20 °C.

On admet que la température finale est donnée, en fonction du volume V par la relation : $\theta_{finale} = \dfrac{48720}{V} + 20$.

1.4. Etude d'une fonction : soit la fonction f définie sur [609 ; 2 000] par la relation $f(x) = \dfrac{48720}{x} + 20$.

a. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

b. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [609 ; 2 000].

c. Dans l'annexe, compléter le tableau de variation de la fonction f.

d. Dans l'annexe, compléter le tableau de valeurs de f. Les résultats seront arrondis à l'unité.

e. En utilisant le repère de l'annexe, représenter graphiquement la fonction f.

2. Exploitation de la courbe

Laisser apparents les traits de construction.

a. Déterminer graphiquement la température finale atteinte par un volume d'eau de 1 500 mL.

b. Sachant que la température d'ébullition de l'eau est 100°C, peut-on obtenir l'ébullition de 900 mL d'eau ?

EXERCICE 2 : PLATEAU TOURNANT D'UN FOUR A MICRO - ONDES (5,5 points)

Le four à micro–ondes étudié, de forme cubique, est muni d'un plateau tournant centré sur la base du four. Pour contrôler la vitesse de rotation, on procède à un test de repérage de la position d'un point du plateau en fonction du temps.

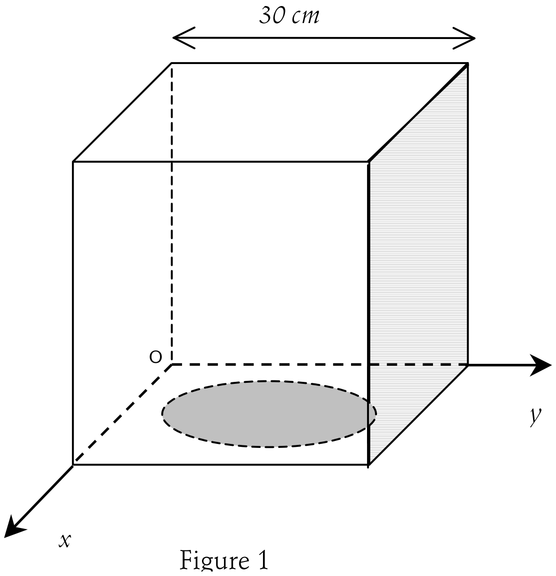


Figure 1

(Les cotes sont en cm.)

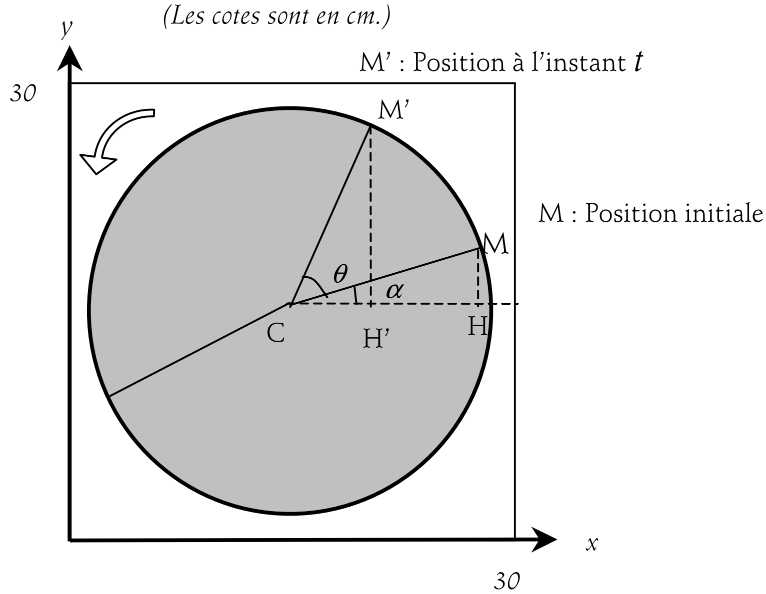


Figure 2

1. Plateau en position initiale : on se place dans le repère orthonormal défini sur la figure 2.

On admet que les coordonnées du centre C du plateau sont (15 ; 15) et que celles d'un point M, situé à la périphérie du disque, sont (28 ; 20).

1.1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM}$.

1.2. Soit θ la mesure en degré de l'angle $\widehat{HCM}$.

a. Calculer tan θ.

b. Déterminer la valeur de θ arrondie au degré.

2. Position du plateau à un instant t : au bout d'un temps t, le plateau a tourné d'un angle β mesuré en degrés. Le point M occupe alors la position M', telle que $\widehat{MCM'} = \beta$.

2.1. On admet que le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées (13 ; 5) et que le vecteur $\overrightarrow{CM'}$ a pour coordonnées (6,8 ; 12,2). Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CM'}$.

2.2. En prenant CM = CM' = 14, exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CM'}$ en fonction de β.

2.3. Calculer la valeur de θ, arrondie au degré.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

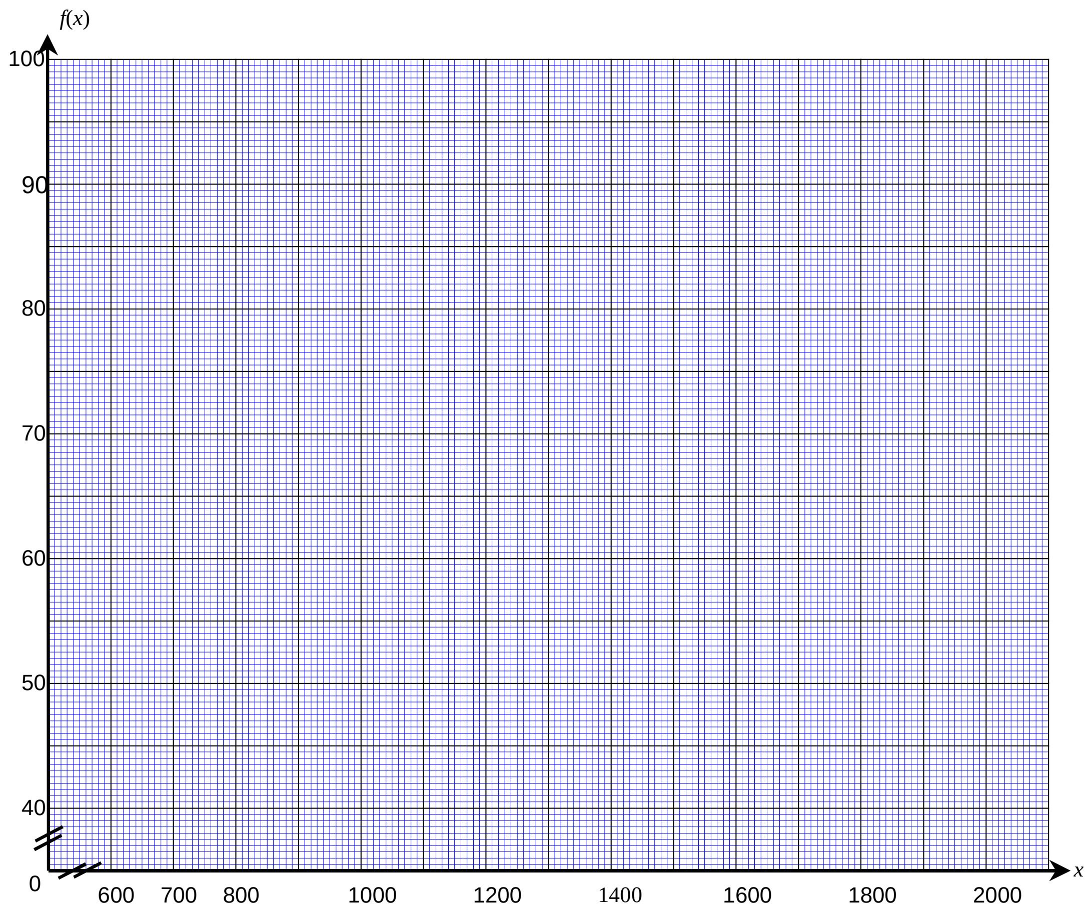
Tableau de variation

x	609 2 000
Signe de $f'(x)$	
Variation de f	

Tableau de valeurs

x	609	650	800	1 000	1 200	1 400	1 600	1 800	2 000
$f(x)$		95					50		

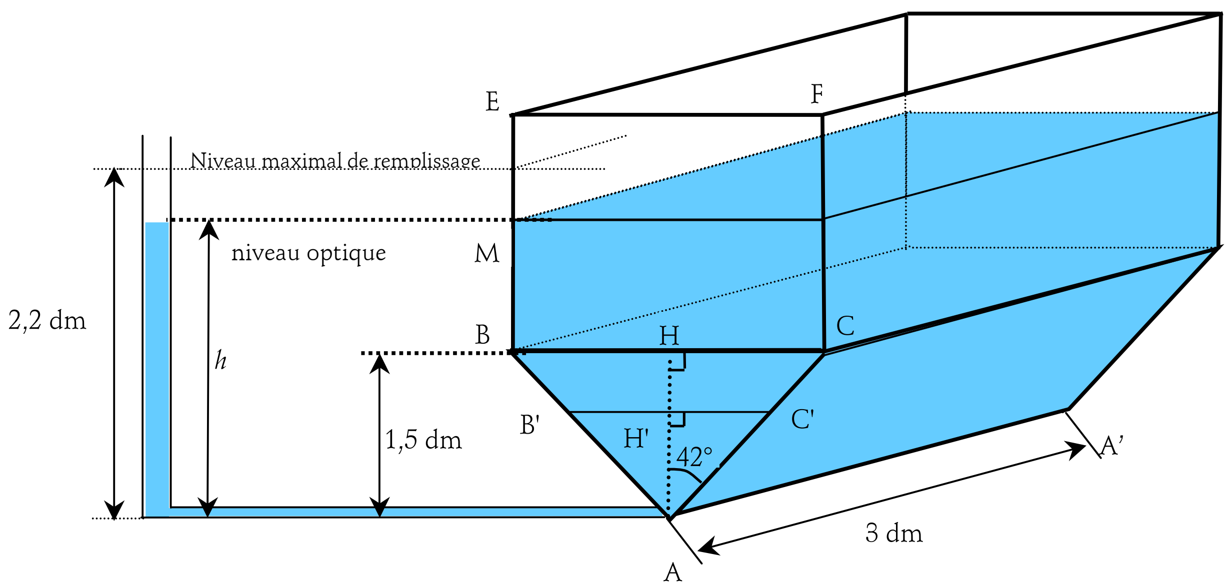
Représentation graphique de f



5. France, juin 2004

On étudie une machine à café, puis le nombre de cafés servis dans un restaurant.

Les 2 exercices peuvent être traités de façon indépendante.



EXERCICE 1 : Etude du volume de la réserve d'eau. (9 points)

Le schéma ci-dessous représente la chaudière d'une machine à café pour un restaurant.

Le but de cet exercice est de tracer la courbe donnant le volume V d'eau en fonction de la hauteur h d'eau indiquée par le niveau optique. Pendant le remplissage, la hauteur h atteint successivement le point B de la section triangulaire isocèle, puis le point M de la section rectangulaire.

I. Volume de l'eau lorsque $h \leq 1,5$ dm (section triangulaire isocèle)

1. Section $AB'C'$ (triangle isocèle)

1.1 Montrer que l'aire de la section triangulaire $AB'C'$ de hauteur AH' est : $S = AH'^{\,2}.\tan 42°$

1.2 Montrer que le volume V (en L ou dm^3) de l'eau, arrondi au dixième, correspondant à cette section est :

$$V = 2,7.AH'^{\,2}.$$

2. Section ABC (triangle isocèle)

Calculer, en arrondissant au dixième, le volume V_1 de l'eau correspondant au remplissage maximal de la partie à section triangulaire.

II. Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1,5]$ par : $f(x) = 2,7\,x^2$.

Soit f' la fonction dérivée de f.

1.1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

1.2. Calculer $f'(1,5)$. Compléter sur l'annexe le tableau de variation de f.

Compléter sur l'annexe le tableau de valeurs de $f(x)$. Arrondir les résultats à 10^{-1}.

Dans le repère défini sur l'annexe, tracer la représentation graphique de la fonction f.

III Volume de l'eau lorsque $h \geq 1,5$ dm (section triangulaire isocèle et rectangulaire)

1. Exprimer la longueur du segment $[BM]$ en fonction de h.

2. Calculer, en dm, la longueur du segment $[BC]$ en arrondissant le résultat au dixième.

3. Montrer à l'aide des résultats précédents que le volume V_2 (arrondi au dixième) de l'eau correspondant à la partie de section rectangulaire du réservoir est : $V_2 = 8,1\,h - 12,2$.

4. On admet que pour $h = 1,5$ le volume d'eau est : $V_1 = 6,1$. Lorsque $h \geq 1,5$, le volume total de l'eau est donc : $V = V_1 + V_2$

4.1. Donner l'expression de V en fonction de h.

4.2. Au volume V, on associe la fonction g définie sur l'intervalle $[1,5 ; 2,2]$ par : $g(x) = 8,1\,x - 6,1$.

Dans le repère de l'annexe, tracer le segment de droite représentant la fonction g sur l'intervalle $[1,5 ; 2,2]$.

5. En comparant le coefficient directeur de la droite précédente et le résultat de la question 1.2 du II, indiquer la position du segment de droite par rapport à la courbe représentative de f.

EXERCICE 2 : Evolution du nombre de cafés vendus en un trimestre. (4 points)

Soit $u_1 = 2\,500$, le nombre de cafés servis par le restaurant au cours du mois de janvier.

Durant le 1er trimestre (janvier – février – mars), les nombres de cafés servis mensuellement forment une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison positive q.

1. Ecrire les termes u_2 et u_3 de cette suite en fonction de q.

2. Le restaurant a servi 8 000 cafés au cours du trimestre.

2. 1. Montrer que q est solution de l'équation : $q^2 + q - 2,2 = 0$.

2. 2. Calculer la valeur de q arrondie au millième.

2. 3. Quel est le pourcentage d'augmentation de la vente mensuelle du nombre de cafés au cours du trimestre ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

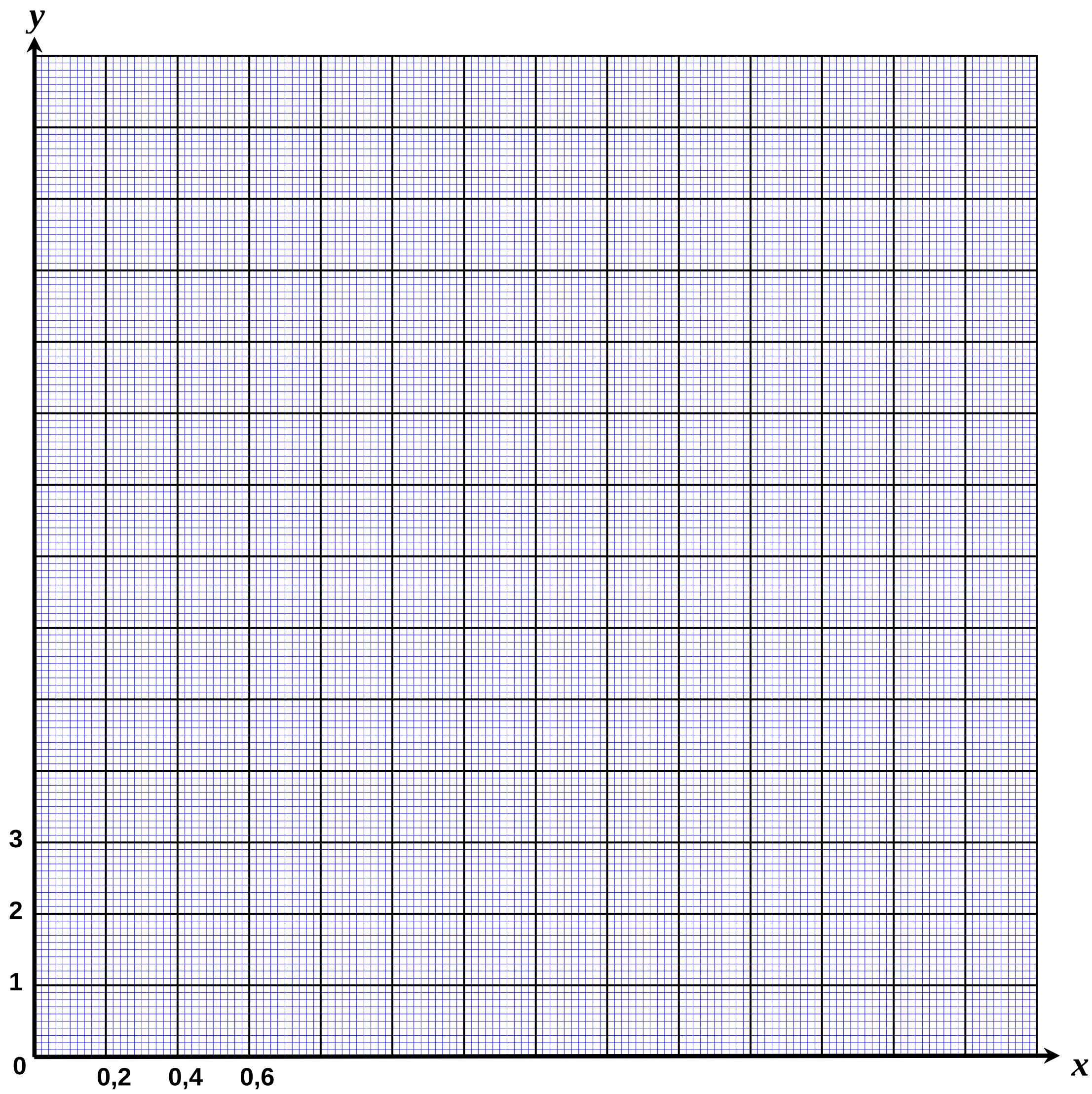
Compléter le tableau de variation de la fonction f

x	0 1,5
signe de $f'(x)$	
variation de f	

Compléter le tableau de valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-1}

x	0	0,5	0,8	1	1,2	1,5
$f(x)$	0			2,7		6,1

Représentation graphique des fonctions f et g



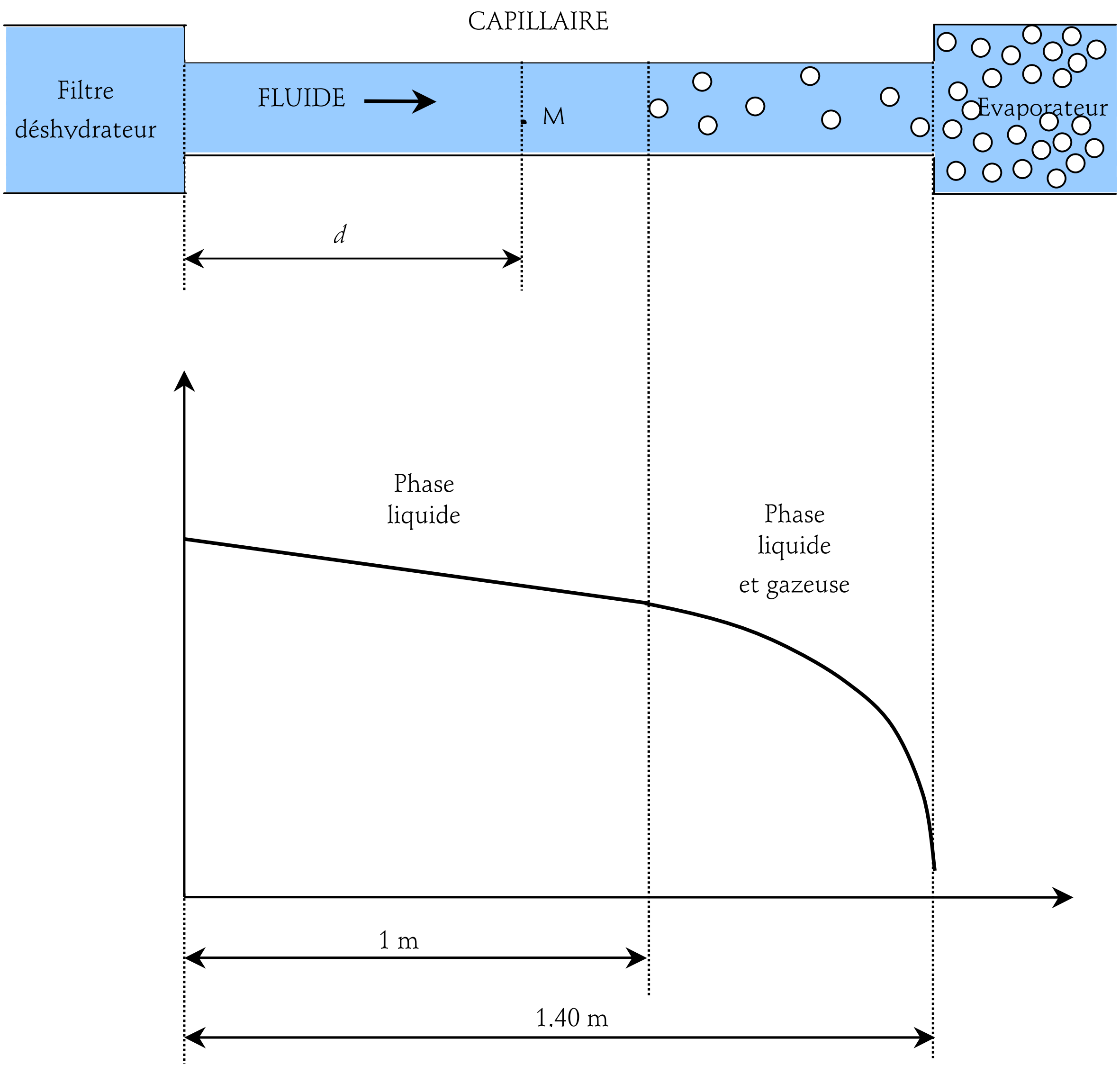
6. France, juin 2003

On se propose d'étudier différents organes d'un réfrigérateur.

Les 2 exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Etude de la pression dans un capillaire de réfrigérateur(8 points)

Le capillaire est un tube fin reliant le filtre déshydrateur à l'évaporateur. Dans ce capillaire circule un fluide frigorigène. On désigne par d la distance exprimée en mètre, entre l'entrée et le point M du capillaire. La pression du fluide, exprimée en bar, varie tout au long du tube en fonction de d.



La pression P en un point M du capillaire est donnée par les formules :

si $0 \leq d \leq 1$, $P = -5d + 11$,

si $1 \leq d \leq 1{,}4$, $P = -24d^2 + 43d - 13$.

1. Etude mathématique

1.1. Soit f la fonction définie, pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 1] par : $f(x) = -5x + 11$.

Dans le repère défini sur l'annexe, tracer la représentation graphique de la fonction f.

1.2. Soit g la fonction définie, pour x appartenant à l'intervalle [1 ; 1,4] par : $g(x) = -24x^2 + 43x - 13$.

1.2.1. On note g' la fonction dérivée de g. Déterminer $g'(x)$.

1.2.2. Résoudre $g'(x) < 0$ pour x appartenant à l'intervalle [1 ; 1,4].

1.2.3. Compléter sur l'annexe, le tableau de variation de la fonction g dans l'intervalle [1 ; 1,4].

1.3. Représentation graphique :

1.3.1. Compléter sur l'annexe, le tableau de valeurs de $g(x)$ arrondies à 10^{-1}.

1.3.2. Dans le repère défini sur l'annexe, tracer la courbe représentative de la fonction g.

1.3.3. Déterminer graphiquement la valeur de $g(x)$ pour laquelle $x = 1{,}36$.

1.4. Résoudre dans l'intervalle [1 ; 1,4] l'équation : $-24x^2 + 43x - 15{,}5 = 0$ (résultat arrondi à 10^{-2}).

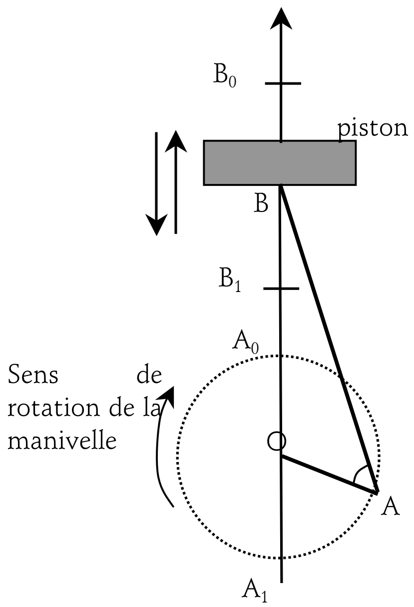
2. Utilisation des résultats

2.1. La longueur initiale du capillaire étant de 1,40 m, déterminer la valeur de la pression à la sortie du capillaire si on le raccourcit de 4 cm.

2.2. On veut déterminer à quelle distance d du condenseur la pression du fluide dans le capillaire est égale à 2,5 bar.

Montrer que d est solution de l'équation résolue dans la question 1.4. et donner sa valeur.

Exercice 2 : Etude du système bielle manivelle du compresseur. (5 points)



Le compresseur d'un réfrigérateur comporte un piston entraîné par un système bielle manivelle.

AB : bielle de longueur 60 mm.

OA : manivelle de longueur 18 mm.

Le point O est fixe.

Le point A décrit un cercle de centre O et de rayon OA.

Le point B se déplace entre B_0 et B_1.

B est en B_0 quand A est en A_0.

B est en B_1 quand A est en A_1.

1. Calculer en mm, la longueur du segment $[OB_0]$.

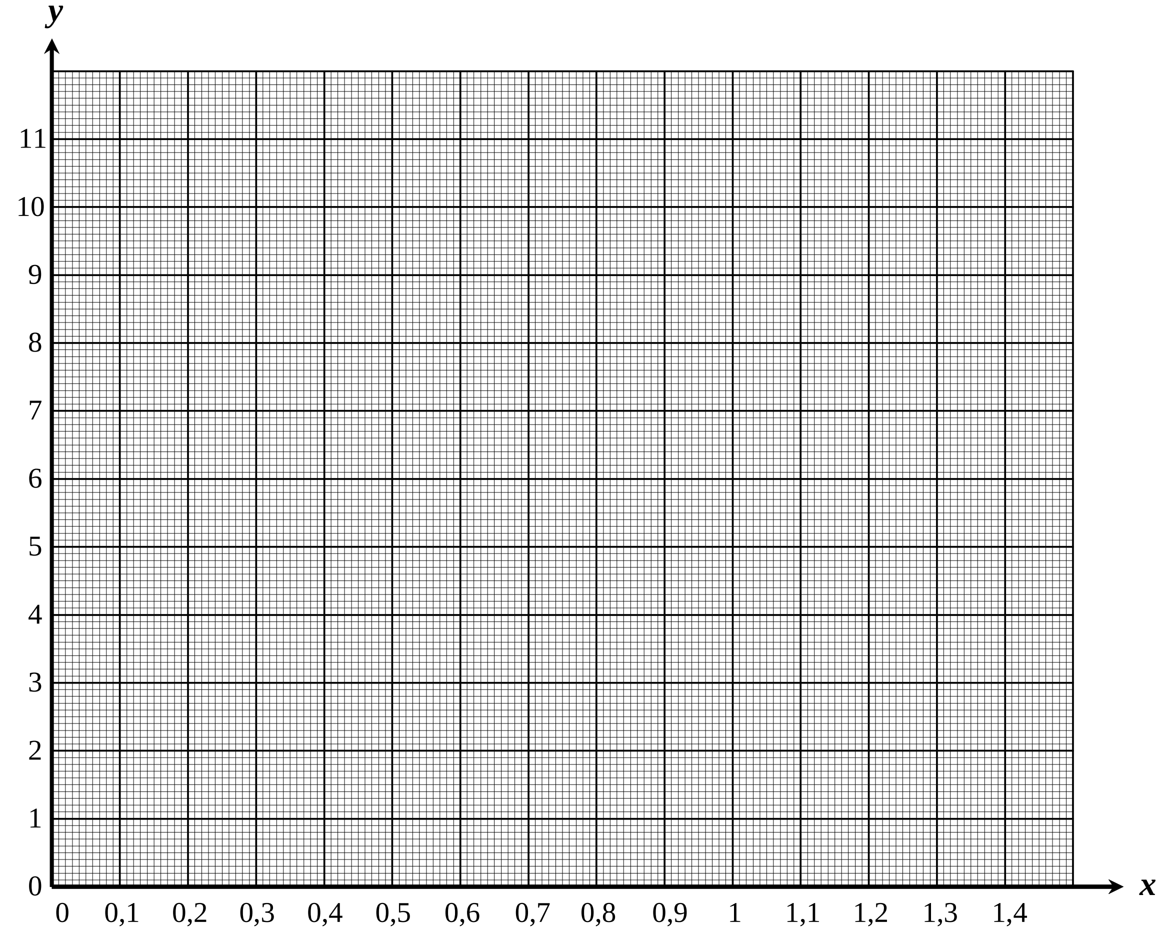
2. A l'instant t_2, le point A est en A_2, le point B est en B_2 et la mesure de l'angle $\widehat{OA_2B_2}$ est 90°.

Calculer la longueur arrondie à 0,1 mm du segment $[OB_2]$.

3. A l'instant t_3, le point A est en A_3, le point B est en B_3 et la mesure de l'angle $\widehat{OA_3B_3}$ est 30°.

En utilisant le formulaire, calculer la longueur arrondie à 0,1 mm du segment $[OB_3]$.

ANNEXE à rendre avec la copie



Question 1.2.3.

x	1 1,4
signe de $g'(x)$	
variation de g	

Question 1.3.1.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,35	1,4
$g(x)$	6					0, 2

7. France, juin 2002

EXERCICE 1 (4 points) : étude d'une porte « froide »

Le cahier des charges du four est le suivant :

* au début du chauffage, les températures intérieure et extérieure du four sont égales à 20 °C ;
* la température de la vitre extérieure de la porte doit être de 30 °C pour une utilisation normale du four à 220 °C ;
* la température de la vitre extérieure de la porte doit être de 50 °C pour une pyrolyse à 500 °C.

Ceci justifie le nom de « porte froide ».

La température intérieure du four y exprimée en °C est une fonction f de la température extérieure de la porte, x exprimé en °C.

1. Etude de la fonction *f*

On considère la fonction f définie par $f(x) = -0,2x^2 + 30x - 500$ sur l'intervalle [20 ; 50].

1.1. Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.

1.2. Compléter le tableau de variation de la fonction f sur l'annexe 1.

1.3. Sur l'annexe 1, compléter le tableau de valeurs de $f(x)$.

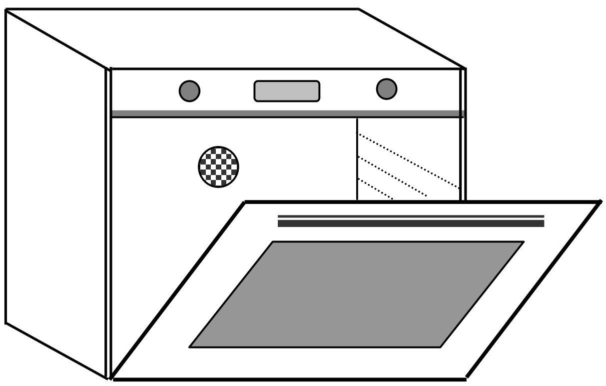
4. Dans le repère de l'annexe 1, tracer la courbe représentant la fonction f.

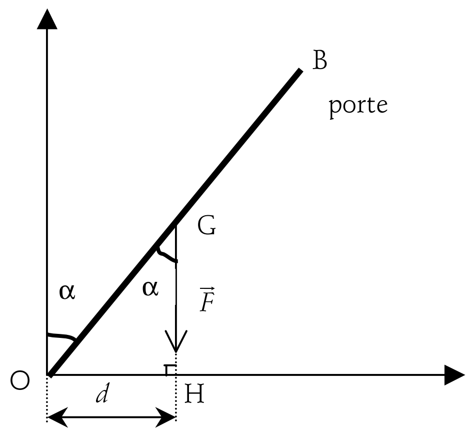
2. Exploitation de la représentation graphique

2.1. Placer sur la courbe les points suivants : D (20 ; 20) ; N (30 ; 220) ; P (50 ; 500).

2.2. En relation avec le cahier des charges mentionné au début de l'exercice, indiquer à quelles conditions d'utilisation correspondent les points D, N et P.

EXERCICE 2 (5 points) : étude du moment du poids de la porte .





Le moment M du poids de la porte est une fonction de l'angle α d'ouverture de la porte.

1. Détermination de *M*.

1.1. Le segment [OB] a pour longueur l et pour milieu G. Le segment [OH] a pour longueur d. En utilisant le triangle OGH, déterminer l'expression de d en fonction de l et de α .

1.2. L'intensité du poids de la porte est P = 30 N. La hauteur l de la porte vaut 0,46 m. La valeur du moment M est donnée par la relation : $M = P.d$. Déterminer l'expression de M en fonction de α .

2. Etude d'une fonction

Soit la fonction définie par $g(x) = 6,9\sin x$ pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 90] ; x étant exprimé en degré.

2.1. Sur l'annexe 2, compléter le tableau de valeurs arrondies à 10^{-2}.

2.2. Dans le repère de l'annexe 2, représenter graphiquement la fonction g.

2.3 Déterminer la valeur maximale de $g(x)$.

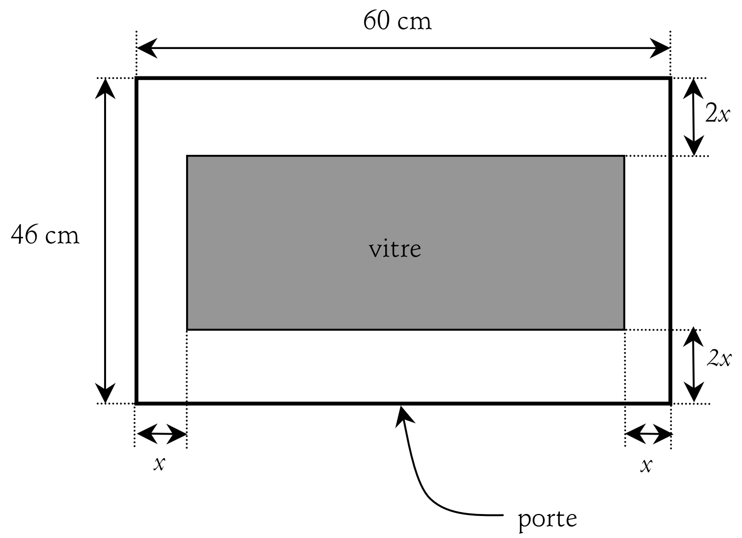
2.4 Déterminer graphiquement la valeur de $x_1$pour laquelle $g(x)$ est égal aux $\frac{2}{3}$ de sa valeur maximale (on laissera apparaître les pointillés nécessaires à la construction).

2.5 Retrouver par le calcul cette valeur de x arrondie à l'unité.

3. En utilisant les résultats précédents déterminer la mesure en degrés de l'angle α_0 pour laquelle le moment M est égal aux $\frac{2}{3}$ de sa valeur maximale.

EXERCICE 3 (4 points) : étude de la position du vitrage de la porte

On utilisera le cm comme unité de longueur et le cm^2 comme unité d'aire.



1. Exprimer en fonction du nombre réel positif x l'aire S du vitrage rectangulaire grisé sur le dessin.
2. On veut que l'aire de la surface vitrée soit égale à la moitié de l'aire de la surface totale de la porte.

Montrer que x est solution de l'équation : $8x^2 - 332x + 1380 = 0$.

3. Résolution de l'équation.

3.1 Résoudre l'équation ci-dessus et arrondir les solutions à 10^{-1}.

3.2 En tenant compte du schéma, choisir la solution convenable.

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

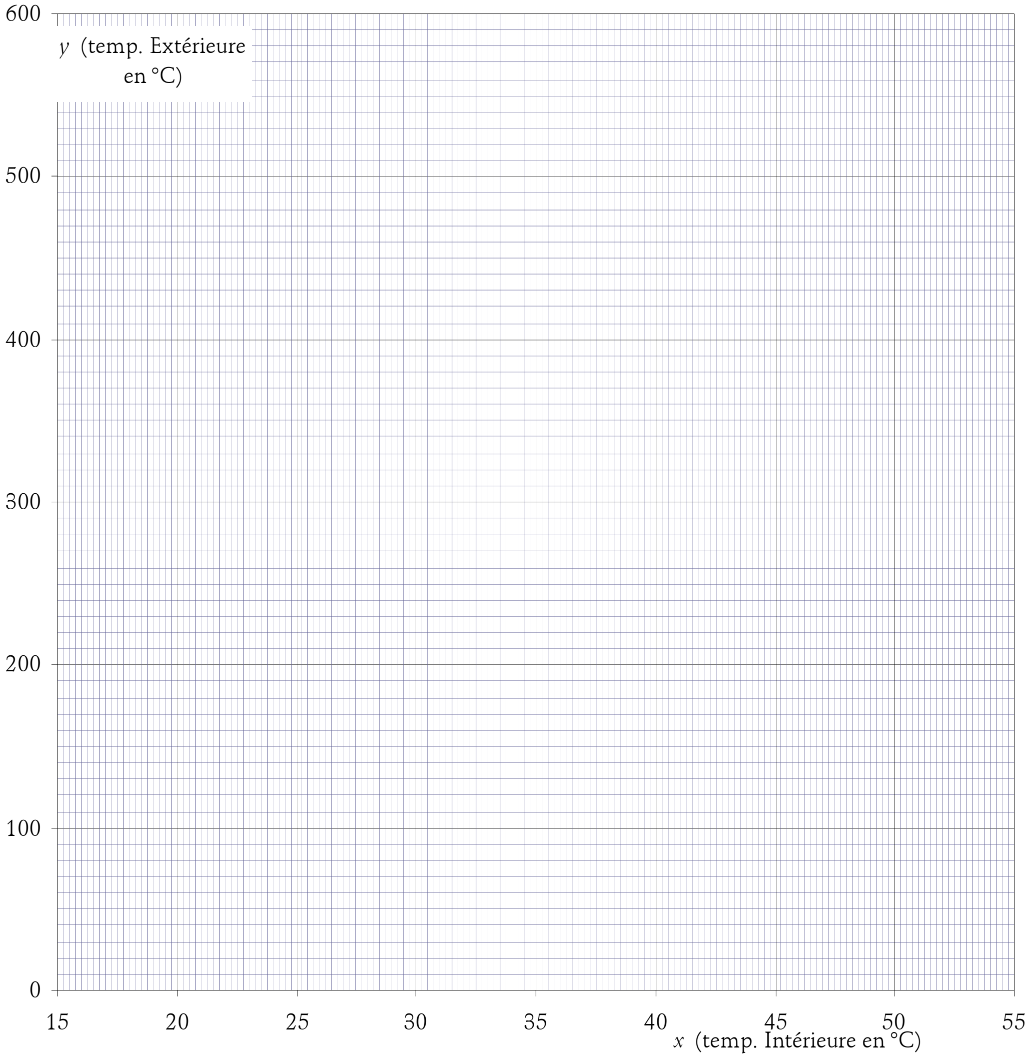
Compléter le tableau de variation de la fonction f :

x	20	50
signe de $f'(x)$		
variation de f		

Compléter le tableau de valeurs de la fonction f :

x	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$			220				

Représentation graphique de la fonction f :

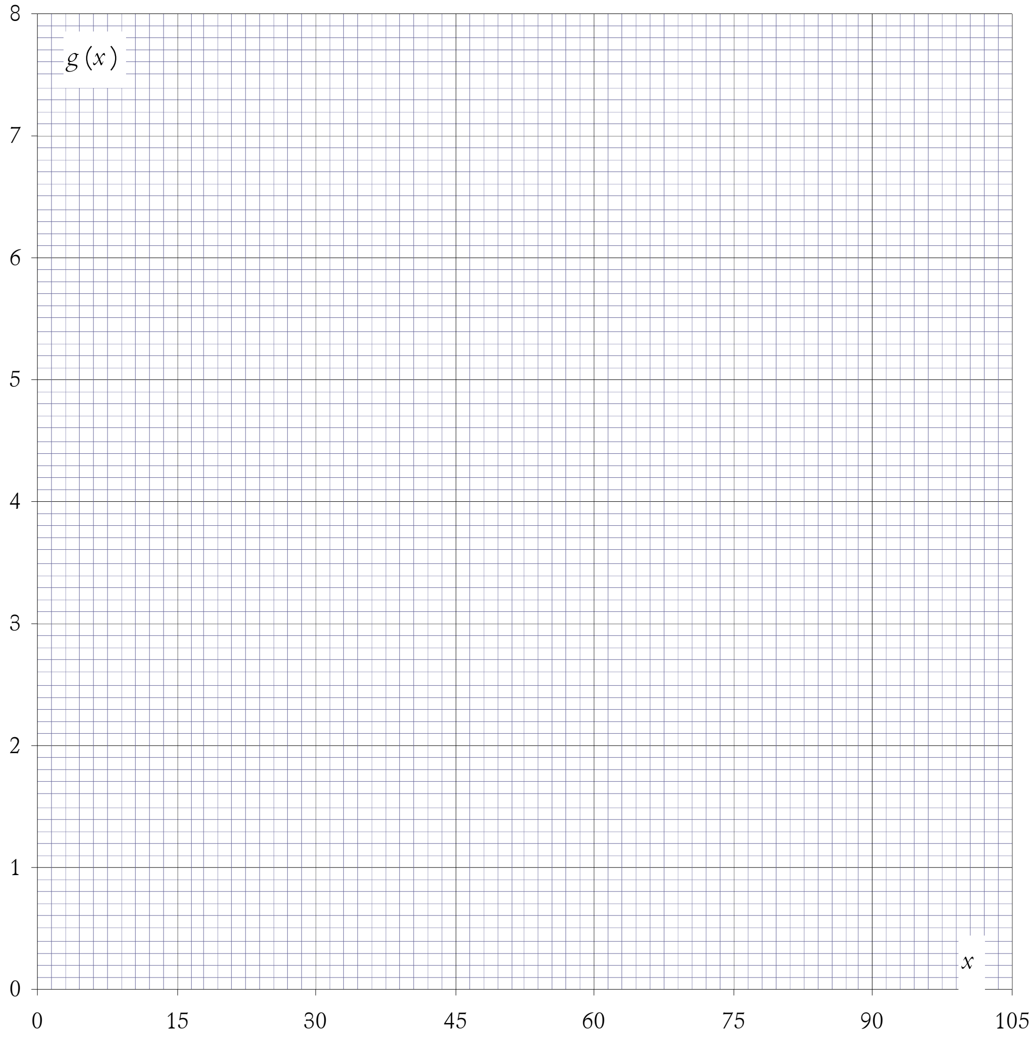


ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Compléter le tableau de valeurs de la fonction g :

x	0	15	30	45	60	75	90
$g(x)$							6,90

Représentation graphique de la fonction g :


g(x)
8
7
6
5
4
3
2
1
0
x
0
15
30
45
60
75
90
105

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\ln(a^n) = n \ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Equation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, une sol. réelle double : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

- Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r.

Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = k\frac{(u_1 + u_k)}{2}$$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n = u_1.q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = u_1 \frac{1-q^k}{1-q}$$

Trigonométrie

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Statistiques Effectif total $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$

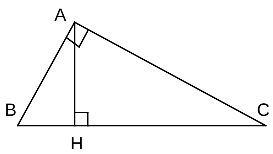
Moyenne $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$

Variance $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\, x_i^2}{N} - \overline{x}^2$

Ecart type $\sigma = \sqrt{V}$

Relations métriques dans le triangle rectangle

$AB^2 + AC^2 = BC^2$



$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$

Résolution de triangle

$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

R = rayon du cercle circonscrit

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$ Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh

Sphère de rayon R :

Aire : $4\pi R^2$ Volume $\frac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume = $\frac{1}{3}Bh$

Calcul vectoriel dans le plan - dans l'espace

$\vec{v}.\vec{v}\,' = xx' + yy'$	$\vec{v}.\vec{v}\,' = xx' + yy' + zz'$
$\lVert \vec{v} \rVert = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\lVert \vec{v} \rVert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}\,' \neq \vec{0}$:

$\vec{v}.\vec{v}\,' = \lVert \vec{v} \rVert \times \lVert \vec{v}\,' \rVert \cos(\vec{v}, \vec{v}\,')$

$\vec{v}.\vec{v}\,' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}\,'$