Energétique

1. France, juin 2006

EXERCICE 1 : (10 points)

Un système de régulation de température dans un atelier est constitué de plusieurs climatiseurs industriels.

Un programmateur commande ce système de régulation.

Deux paramètres doivent être entrés dans les données du programmateur : la température initiale K et le coefficient d'atténuation a.

Lors de la mise en route, la régulation peut être modélisée par une équation différentielle de la forme :

$$y' + ay = 0.$$

Partie A : (1,5 point)

L'expression de la solution générale de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est $y(t) = Ke^{at}$ où K désigne la température initiale de l'atelier (en °C), a est le coefficient d'atténuation et t le temps exprimé en minutes.

1. A de partir de $y(t) = Ke^{at}$ exprimer $y'(t)$.

2. Déterminer les valeurs de K et a qui correspondent aux conditions initiales : $y(0) = 45$ et $y'(0) = -2{,}25$.

Partie B : (5,5 points)

Dans la suite du problème, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 15] par $f(x) = 45e^{-0{,}05x}$.

1. La dérivée de la fonction f est notée f'. Vérifier que $f'(x) = -2{,}25e^{-0{,}05x}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 15].

3. Compléter le tableau de variation de la fonction f situé en annexe 1.

4. Compléter le tableau de valeurs en annexe 1. Les résultats seront arrondis au dixième.

5. Tracer la courbe représentative C de la fonction f dans le repère orthogonal situé en annexe l.

Partie C : (2 points)

Les traits de constructions devront apparaître sur le schéma.

1. En utilisant la courbe C, déterminer la température de l'atelier au bout de 5 minutes.

2. a. À partir de cette même courbe, déterminer le temps au bout duquel la température est égale à 25 °C. On donnera le résultat en minutes.

b. Résoudre l'équation suivante: $45e^{-0{,}05x} = 25$ et comparer la solution avec le résultat obtenu à la question précédente.

Partie D : (l point)

La valeur moyenne de la température est donnée par la relation $\theta_{moy} = \frac{1}{15}\int_0^{15} 45e^{-0,05x}\,dx$.

Calculer la valeur de θ_{moy} arrondie au dixième.

EXERCICE 2 : (5 points)

Un artisan en génie climatique veut faire des statistiques sur le coût de ses installations auprès de ses clients sur une année. Les données sont rassemblées dans le tableau suivant :

Coût en euros	**Nombre d'installations**
[0 ; 1 000[	25
[1000 ; 2 000[	45
[2 000 ; 3 000[	95
[3 000 ; 4 000[	88
[4 000 ; 5 000[	65
[5 000 ; 6 000[	32

1. Tracer l'histogramme de cette série statistique dans le repère en annexe 2.
2. Calculer le coût moyen $\bar{x}$ d'une installation (arrondir le résultat à l'unité).
3. Calculer l'écart type σ de cette série statistique (arrondir le résultat à l'unité).
4. Déterminer le pourcentage des installations dont le coût est compris dans l'intervalle $\left[\bar{x}-\sigma ; \bar{x}+\sigma\right]$.

ANNEXE 1

A remettre avec la copie

EXERCICE 1

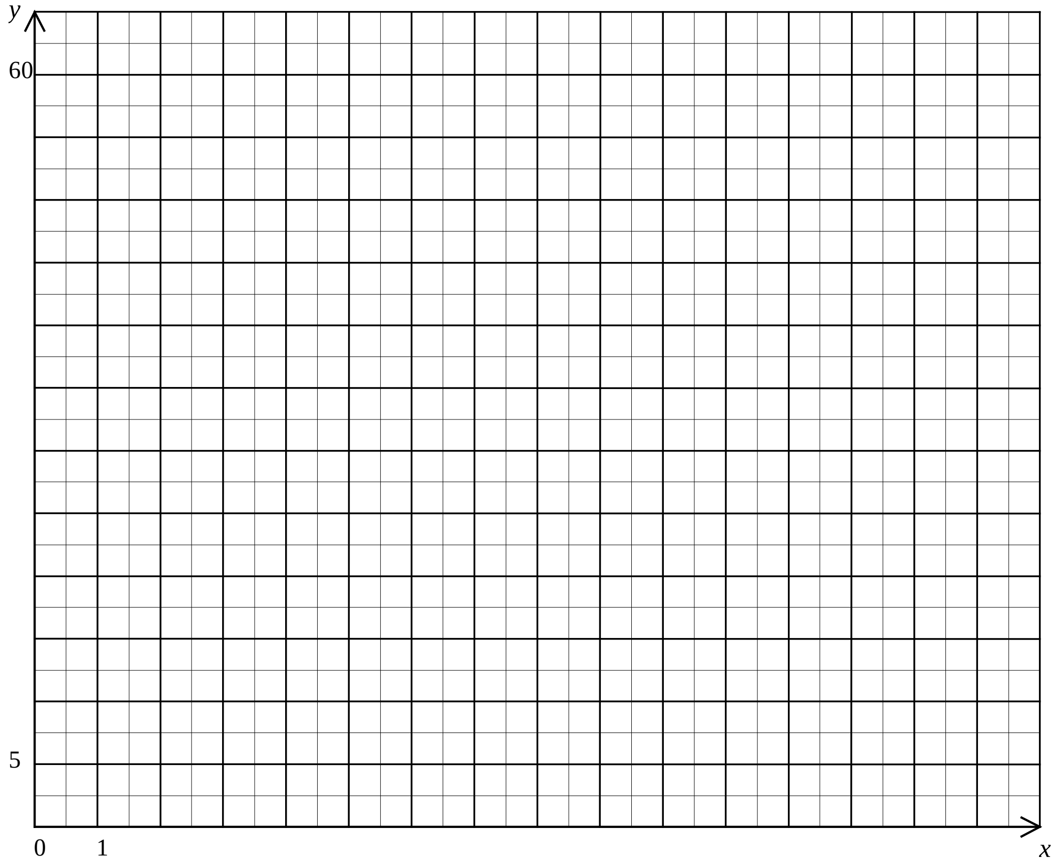
Tableau de variation (partie B)

x	0 15
$f'(x)$	
f	

Tableau de valeurs (partie B)

x	0	2	4	6	8	10	12	15
$f(x)$								

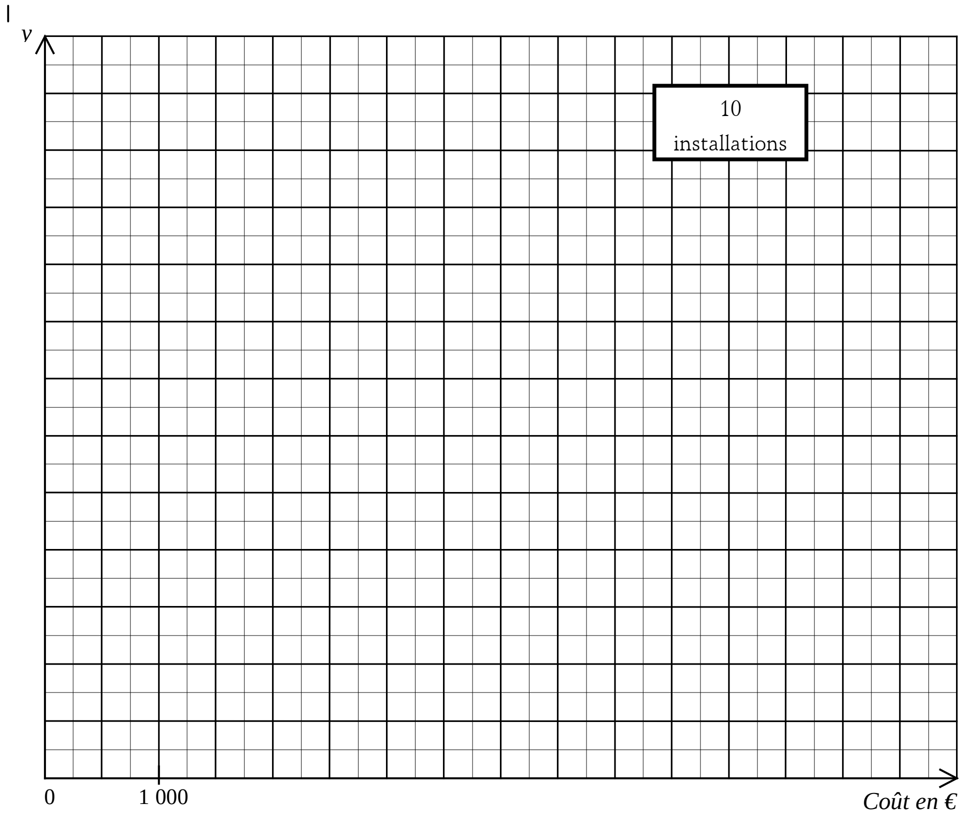
Représentation graphique (partie B et partie C).



ANNEXE 2

A remettre avec la copie

EXERCICE 2



Corrigé succinct

EXERCICE 1 : Partie A

L'expression de la solution générale de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est $y(t) = K\,\mathrm{e}^{a\,t}$ où K désigne la température initiale de l'atelier (en °C) , a est le coefficient d'atténuation et t le temps exprimé en minutes.

1. $y'(t) = K\,a\,\mathrm{e}^{a\,t}$.

2. $y(0) = K = 45$ Déterminer les valeurs de K et a qui correspondent aux conditions initiales : $y'(0) = K\,a = -2{,}25$ donc $a = -0{,}05$

Partie B :

1. Vérifier que $f'(x) = 45 \times (-0{,}05)\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,x} = -2{,}25\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,x}$.

2. La fonction exp est positive dans $\mathbb{R}$ donc f' est négative sur l'intervalle [0 ; 15].

3. voir annexe 1.

4. voir annexe 1.

5. voir annexe l.

Partie C

1. température après 5 minutes : 35 °C.

2. a. Il faudra 11,75 min.

b. $45\,\mathrm{e}^{-0{,}05x} = 25 \ldots x = 11{,}76$.

Partie D

$\theta_{moy} = 31{,}7$ °C

EXERCICE 2

1. Voir annexe 2.

2. $\overline{x} = 3126$ euros.

3. $\sigma = 1356$ euros.

4. $\left[\overline{x} - \sigma\,;\,\overline{x} + \sigma\right] = \left[1770\,;\,4482\right]$. Il y a 225 installations dans l'intervalle de prix [1170 ; 4482] ce qui fait un pourcentage de 64 %

ANNEXE 1

EXERCICE 1 :

Tableau de variation : (partie B)

x	0	15
$f'(x)$		
f	45 $\searrow$	

Tableau de valeurs (partie B).

x	0	2	4	6	8	10	12	15
$f(x)$	45	40,7	36,8	33,3	30,2	27,3	24,7	21,3

2. France, juin 2005

Partie A (5 points)

Dans un refroidisseur de boissons, la température du liquide baisse de 4,5 % de sa valeur toutes les secondes. On note θ_0 la température d'entrée de la boisson.

1. Montrer que la température θ_1 de la boisson au bout de 11 seconde est $\theta_1 = 0,955\theta_0$.

2. Déterminer en fonction de θ_0 la température θ_2 de la boisson au bout de deux secondes et la température θ_3 au bout de 3 secondes.

3. On note θ_n la température de la boisson au bout de *n* secondes. Exprimer θ_n en fonction de *n* et θ_0.

4. Préciser la nature dl suite de terme général θ_n. On donnera la raison *q* de cette suite.

5. Calculer θ_{25} si la température d'entrée de la boisson est $\theta_0 = 22\ °\text{C}$. Le résultat sera arrondi au dixième de degré Celsius.

Partie B (8 points)

1. Calculer la valeur de $e^{-0,046}$ arrondie au millième.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[\,0\ ;30\,]$ par : $f(x) = 22e^{-0,046x}$.

a. Montrer que $f'(x) = -1,012e^{-0,046x}$ où *f'* désigne la dérivée de la fonction *f*.

b. Etudier le signe de cette dérivée sur l'intervalle $[\,0\ ;30\,]$.

3. Construire le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[\,0\ ;30\,]$.

4. On note (C) la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère orthogonal situé en annexe. Unité graphique : 1 cm pour 2 unités sur chaque axe. On désigne par (T) la tangente à la courbe (C) au point *A* d'abscisse 0.

a. Donner l'ordonnée du point *A* et calculer le coefficient directeur de la droite (T). Les résultats seront arrondis à l'unité.

b. Placer le point A et construire la tangente (T) dans le repère de l'annexe.

5. a. Compléter le tableau de valeurs situé en annexe. Les résultats seront arrondis à l'unité.

b. Tracer la courbe (C) dans le repère situé en annexe.

Partie C (2 points)

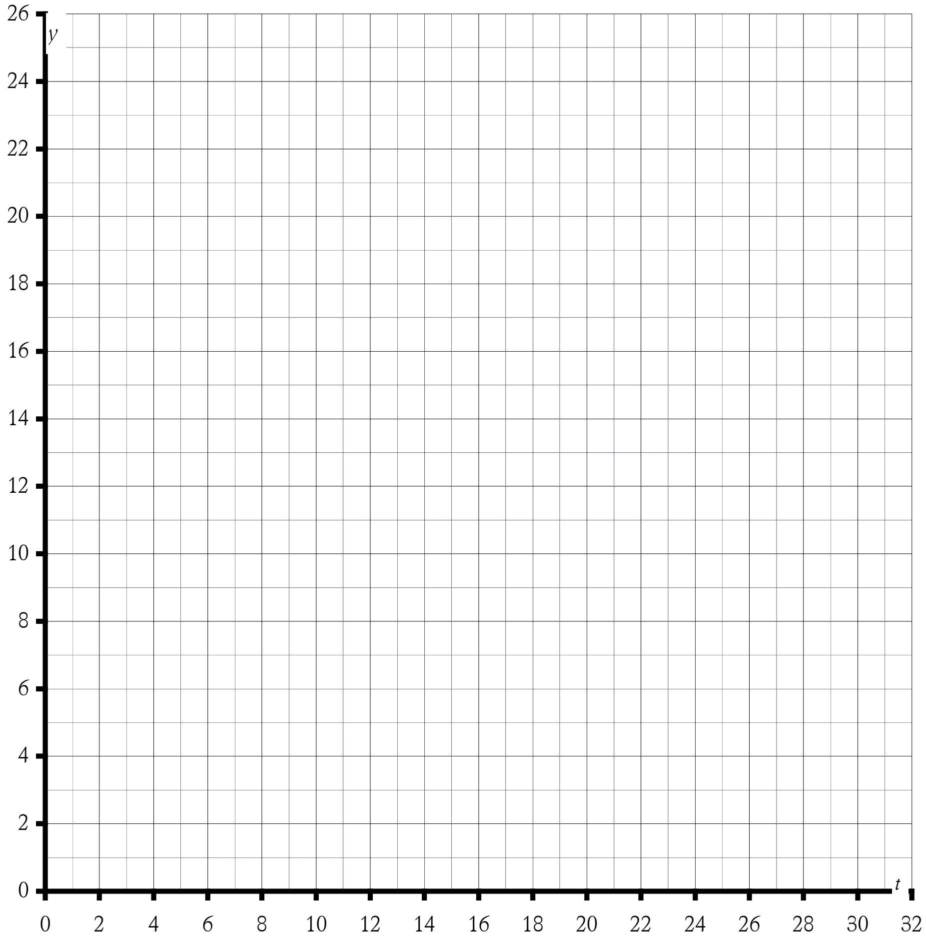
Avec les notations précédentes la température θ de la boisson à l'instant t est donnée par : $\theta = f(t) = 22e^{-0,046t}$ (θ en °C, t en secondes).

1. En laissant apparents les traits de construction, déterminer graphiquement le temps nécessaire pour amener la température de la boisson à 7 °C.

2. La longueur du tube constituant le réfrigérant de boisson étant de 7,2 m, déterminer la vitesse de circulation dans le serpentin pour qu'une boisson entrée à 22 °C ressorte à 7 °C. Le résultat sera arrondi au centième.

Annexe (à remettre avec la copie)

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							



3. France, juin 2004

Les partie A, B et C sont indépendantes.

On alimente une chaudière au fioul par l'intermédiaire d'une nourrice qui se trouve près de la chaudière. La nourrice est remplie à l'aide d'une pompe.

Partie A (2,5 points) Etude géométrique de la cuve de fioul et de la nourrice.

Les cotes sont données en mètre. On prendra $\pi = 3{,}14$.

Schéma de la nourrice

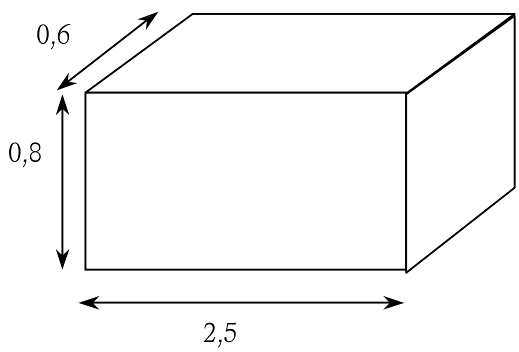
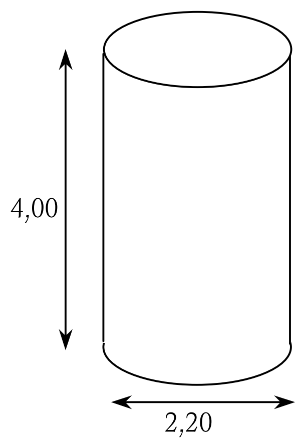


Schéma de la cuve



1. Déterminer le volume V_f de la cuve cylindrique de fioul. Le résultat sera arrondi à 0,1 m^3.

2. Déterminer le volume V_n de la nourrice de forme parallélépipédique contenant le fioul. Le résultat sera arrondi à 0,1 m^3. Exprimer le volume de la nourrice en litres.

Partie B (3 points) Etude de la courbe de perte de charge

L'objet de cette partie est de déterminer les caractéristiques de la courbe de perte de charge dans le réseau fioul entre le réservoir et la nourrice. On note (C_1) cette courbe. La nourrice est située à une hauteur supérieure à celle du réservoir.

On désigne par : p la perte de charge exprimée en pascal, Q le débit volumique exprimé en litre par heure (L/h).

L'équation de la courbe (C_1) est de la forme $p = aQ^2 + b$ où a et b sont des constantes à déterminer.

1. Calculer la valeur de b sachant que la perte de charge p est de 90 000 pascals pour un débit de 0 L/h.

2. Calculer la valeur de a sachant que la perte de charge p est de 130 000 pascals pour un débit de 210 L/h. Le résultat sera arrondi au centième.

3. Donner l'expression des pertes de charge $p = aQ^2 + b$ à l'aide des valeurs numériques trouvées précédemment. La courbe (C_1) est tracée sur l'annexe.

Partie C (9,5 points) Etude de la courbe caractéristique de la pompe alimentant la nourrice

On désigne par : P la pression du fioul dans l'installation exprimée en pascal, Q le débit volumique exprimé en litre par heure (L/h).

Le débit Q varie de 0 L/h à 300 L/h.

$$P = -0{,}07Q^3 + 28Q^2 - 2\,538Q + 190\,310 .$$

On considère la fonction $f(x) = -0{,}07x^3 + 28x^2 - 2\,538x + 190\,310$.

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

2. Etude de la dérivée f'.

a. Résoudre l'équation du second degré $-0{,}21x^2 + 56x - 2\,538 = 0$. Les solutions seront arrondies à 'unité.

b. Les solutions trouvées à la question précédente sont les valeurs, arrondies à l'unité, qui annulent la dérivée. On admet que $f'(x)$ est du signe de $(58 - x)(x - 209)$.

Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 300]$.

c. Construire le tableau de variation de la fonction f.

3. Compléter le tableau de valeurs sur la feuille annexe.

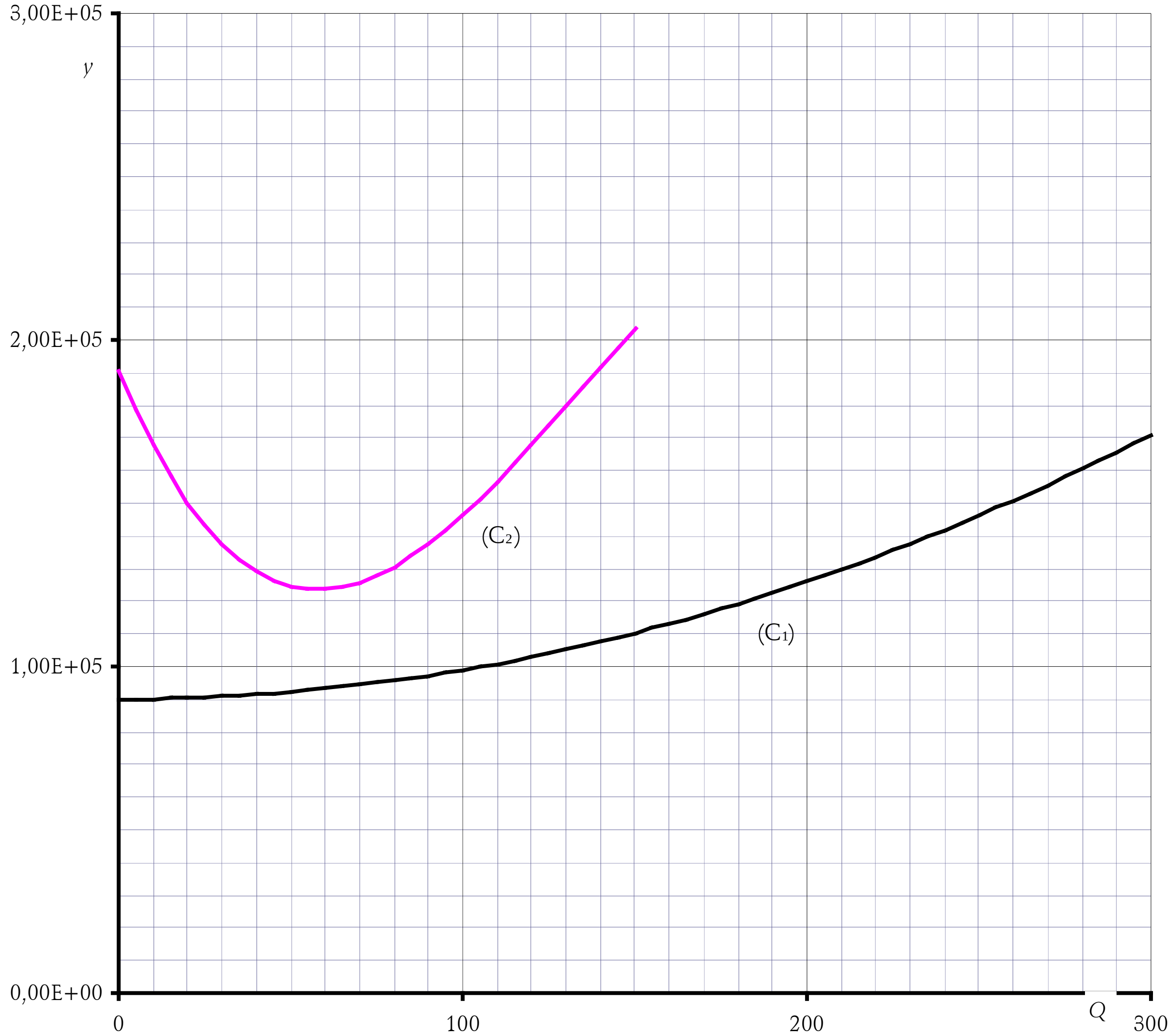
4. Compléter le tracé de la courbe représentative (C_2) de la fonction f sur l'annexe.

5. Le point de fonctionnement de ce circuit hydraulique est le points d'intersection des courbes (C_1) et (C_2). La pression P transmise par la pompe est alors égale à la valeur de la perte de charge p.

Déterminer graphiquement les coordonnées du point de fonctionnement de ce circuit hydraulique. Les traits nécessaires à la lecture graphique devront figurer sur le schéma.

Annexe à remettre avec la copie

x	0	20	40	58	60	80	100
$f(x)$	$1{,}9.10^5$	$1{,}5.10^5$	$1{,}29.10^5$	$1{,}23.10^5$	$1{,}24.10^5$	$1{,}31.10^5$	$1{,}47.10^5$
x	140	180	209	220	240	270	300
$f(x)$	$1{,}92.10^5$						



4. France, juin 2003

Etude d'un pompage solaire

Des panneaux solaires photovoltaïques permettent d'alimenter en énergie une pompe immergée au fond d'un puits. La pompe sert à remplir un réservoir qui alimente un abreuvoir et une borne fontaine.

Etude n°1 : Inclinaison des capteurs solaires (12 points)

Les capteurs photovoltaïques doivent être tournés plein sud et leur inclinaison par rapport à l'horizontale doit être déterminée de façon à capter un maximum d'énergie.

Partie A (3,5 points)

La quantité d'énergie E en kWh reçue annuellement par un capteur solaire de 1 m^2 installé sur le site du puits est donné par :

$$E = -0,2x^2 + 12,6x + 1\,800$$

où x désigne l'inclinaison en dégrés par rapport à l'horizontale (x appartient à l'intervalle $[\,0\,;90\,]$).

1. Calculer en kWh la quantité d'énergei reçue pour une inclinaison de 90°.
2. On souhaite déterminer l'inclinaison qui permet de recevoir une quantité d'énergie égale à 1 700 kWh.

a. Montrer que cela revient à résoudre l'équation $-0,2x^2+12,6x+100=0$.

b. Résoudre cette équation sur l'intervalle $[0\,;90]$.

c. Quelle est l'inclinaison qui permet de recevoir une quantité d'énergie égale à 1 700 kWh ? Le résultat sera arrondi au degré.

Partie B (6,5 points)

Afin d'éviter des calculs répétés, on se propose d'exploiter une méthode graphique. Pour cela on étudie la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;90]$ par : $f(x)=-0,2x^2+12,6x+1\,800$.

1. Déterminer la dérivée *f '* de la fonction *f*.

2. Calculer la valeur de *x* pour laquelle la fonction *f '* s'annule, et déterminer le signe de $f'(x)$ pour *x* appartenant à l'intervalle $[0\,;90]$.

3. Construire le tableau de variation de *f*.

4. Compléter le tableau de valeurs situé sur l'annexe 1. Les valeurs seront arrondies à la dizaine.

5. Tracer la représentation graphique de la fonction *f* sur l'annexe 1. Unités graphiques : 1 cm pour 10 unités en abscisse, 1 cm pour 50 unités en ordonnée.

Partie C (2 points)

1. Déterminer graphiquement l'inclinaison nécessaire pour obtenir une énergie de 1 775 kWh. Faire apparaître les traits de construction sur le schéma.

2. Quelle est la quantité d'énergie maximale reçue par le capteur ainsi que l'inclinaison des panneaux photovoltaïques correspondante ?

Etude n°2 : Etude de la consommation d'eau (3 points)

Une fois la pompe solaire installée, un suivi mensuel de la consommation d'eau par les habitants du village a été réalisée sur une durée de huit mois.

Ce suivi a donné les résultats fournis sur l'annexe 2 où *x* représente le rang du mois et *y* représente la consommation d'eau en m^3. Le nuage de points de coordonnées (*x* ; *y*) associé à ces résultats est donné dans le repère situé sur cette annexe.

On se propose d'étudier cette consommation sur les mois à venir.

1. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Les coordonnées de G seront notées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ avec respectivement : $\overline{x}$ valeur moyenne des rangs des mois, $\overline{y}$ consommation moyenne en m^3.

2. Placer le point G sur le graphique fourni en annexe 2.

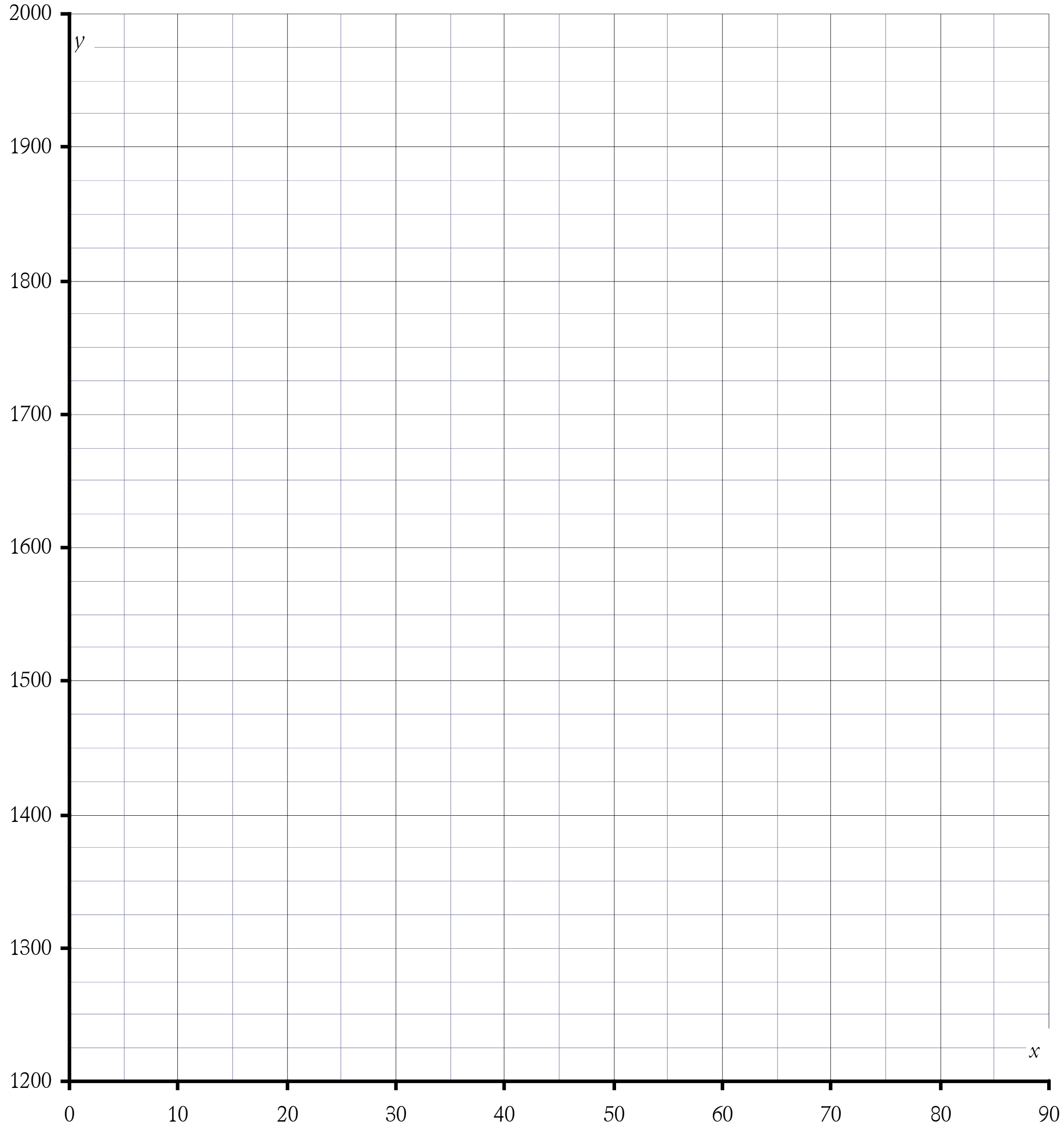
3. on prend pour droite d'ajustement du nuage la droite (GK) où K est le point de coordonnées (1 ; 3,5). Tracer cette droite sur le graphique.

4. On suppose que la tendance observée pour la consommation d'eau sur les huit premiers mois se poursuit. Déterminer alors la consommation d'eau pour le mois de septembre. Laisser les traits de construction apparents.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

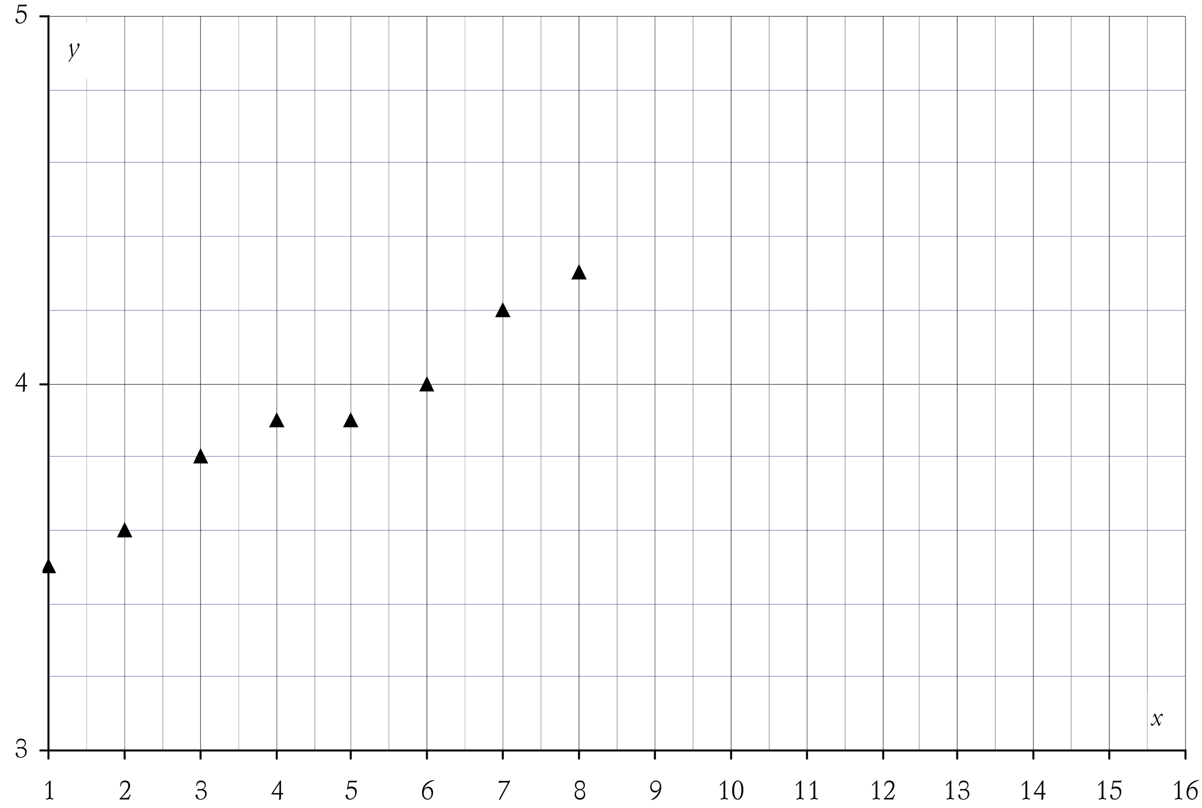
Tableau des valeurs de la fonction f

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
f(*x*)			1970			1930				



Annexe 2 (à rendre avec la copie)

Mois	Octobre	Novembre	Décembre	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
Rang x du mois	1	2	3	4	5	6	7	8
Consommation y en m^3	3,5	3,6	3,8	3,9	3,9	4	4,2	4,3

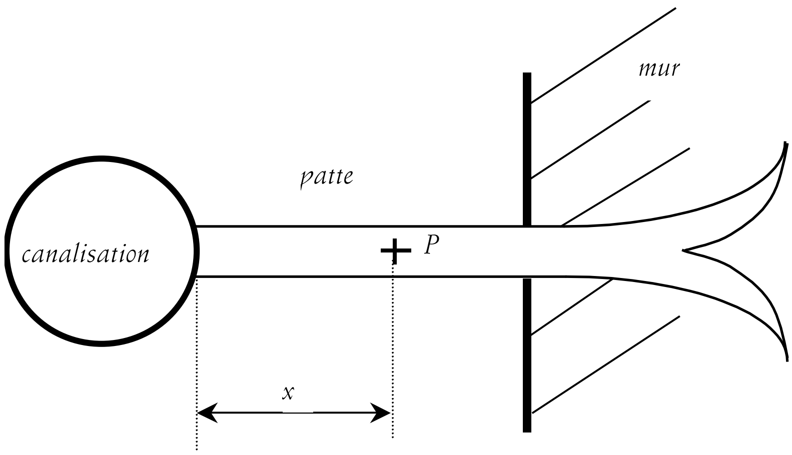


5. France, juin 2002

EXERCICE 1 : les parties A, B, C sont indépendantes.

Partie A : (3,5 points)

Une canalisation, en acier, dont la température est 150°C est fixée à un mur par une patte de scellement.

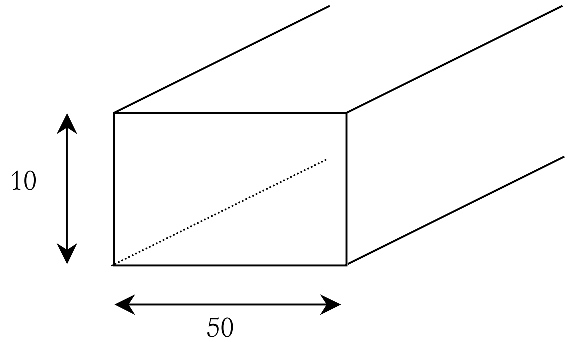


La température θ en un point P de cette patte dépend de la distance x entre ce point et la canalisation. Elle est donnée par la formule : $\theta = 40 + 110e^{-\alpha x}$, avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{hp}{\lambda S}}$, expression dans laquelle :

- h est le coefficient de convection (ici h = 15 W/m^2.°C),
- λ est la conductivité thermique de la barre (ici λ = 46 W/m.°C),
- p est le périmètre de la section de la barre exprimé en mètres,

S est l'aire de la section de la barre exprimée en m^2.

La patte de scellement, que l'on peut assimiler à une barre, a une section rectangulaire (voir le schéma ci-dessous, les cotes sont en mm)



1. Calculer en mètre, le périmètre p de la section de la barre.
2. Calculer en m^2, l'aire S de la section de la barre.
3. En déduire la valeur de α , arrondie au centième.

Partie B : (6 points)

Dans cette partie, on étudie la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 0,5] par : $f(x) = 40 + 110e^{-8,85x}$.

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 0,5].
3. Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 0,5].
4. Compléter le tableau de valeurs situé en annexe 1, puis tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère de cette annexe.

Unités graphiques : axe des abscisses : 1 cm pour 0,05 unité, axe des ordonnées : 1 cm pour 10 unités

Partie C : (3 points)

Avec les notations du début, on a $\theta = f(x)$.

1. Déterminer graphiquement la distance x pour laquelle la température de la barre est de 55 °C. Les traits de construction devront figurer sur le schéma.
2. Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation : $f(x) = 40 + 110e^{-8,85x} = 55$. Le résultat sera arrondi au centième.

EXERCICE 2 : (2,5 points)

Une société fait une étude statistique auprès de ses détaillants sur la durée de vie des chaudières murales qu'elle fabrique. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant pour un échantillon de 1 000 chaudières.

Durée de vie (années)	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24[	[24 ; 28[
Effectifs	10	80	190	430	170	90	30

1. Construire l'histogramme de cette série statistique sur la feuille annexe 2.
2. Dans cette question les valeurs de chaque classe seront rapportées au centre de cette classe. Déterminer la durée moyenne de vie d'une chaudière $\overline{x}$ et l'écart type σ de cette série statistique. (Les résultats seront arrondis au dixième).

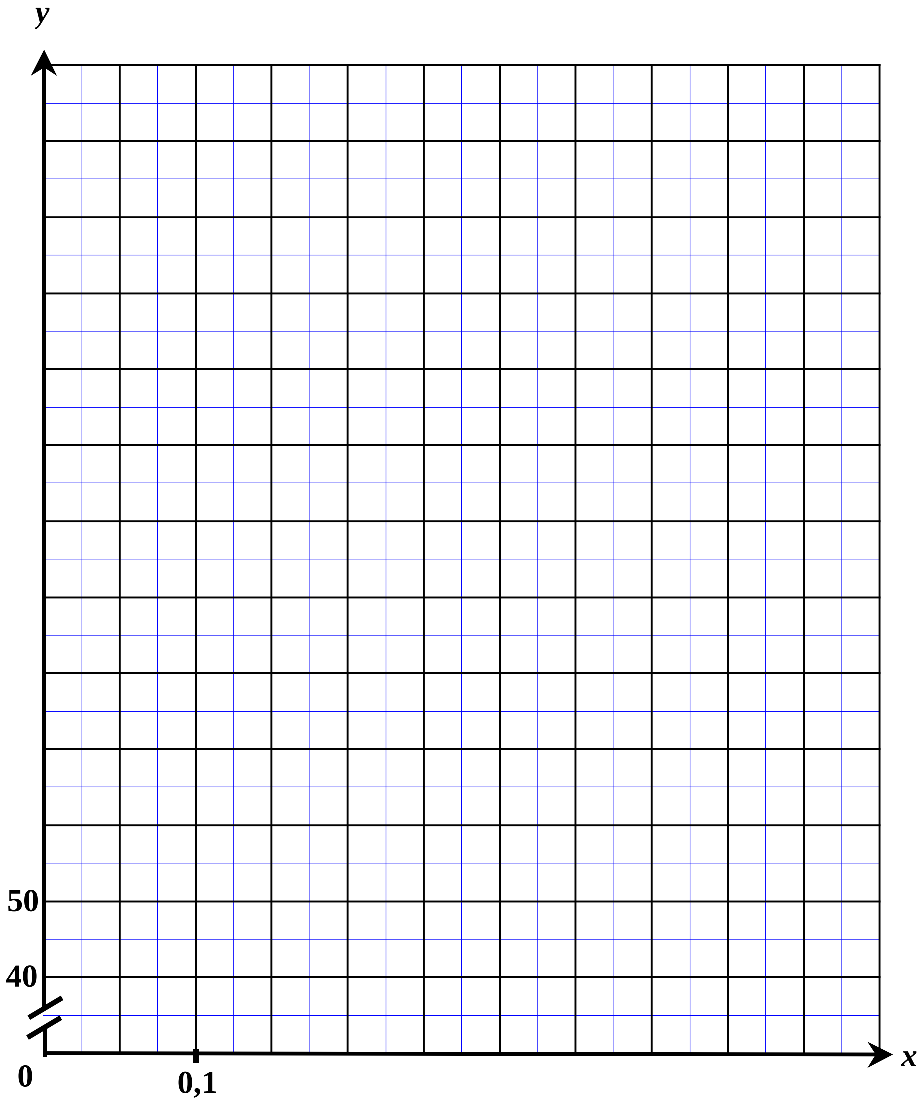
ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

EXERCICE 1 : Partie B-question 4

Tableau de valeurs de la fonction *f* (valeurs arrondies à l'unité)

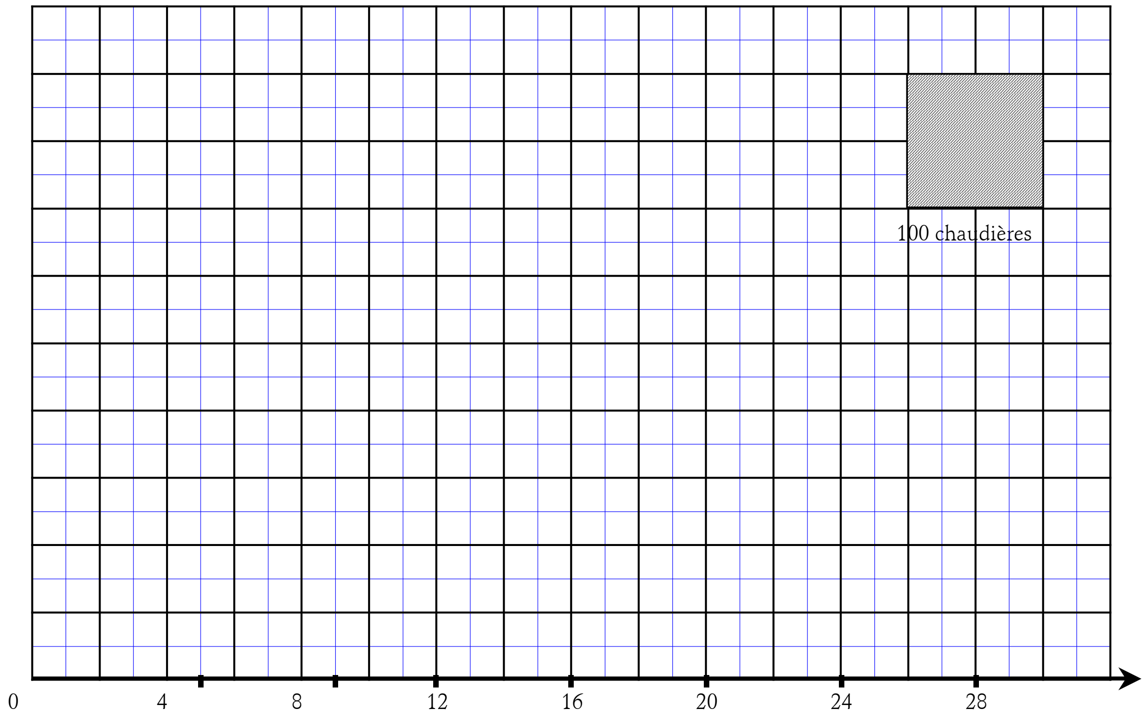
x	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$f(x)$									

Représentation graphique de la fonction *f*



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

EXERCICE 2 : question 2


100 chaudières
0
4
8
12
16
20
24
28