Annales Baccalauréat

1. STL France juin 2003 Biochimie

EXERCICE (8 points)

Les 800 élèves d'un lycée possèdent une montre, soit du type M_1 soit du typeM_2.

- Il y a 70% de montres de type M_1.
- La moitié des montres de type M_1 a un bracelet en cuir.
- 16,25% des montres de type M_1 ont un bracelet métallique.
- Parmi les montres de type M_2, il y a trois fois plus de montres à bracelet en tissu que de montres à braceletmétallique.
- Il n'existe pas de montres de type M2 avec un bracelet en cuir.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Cuir	Métal	Tissu	Total
M_1				
M_2				
Total				800

2. Parmi l'ensemble de toutes les montres quel est le pourcentage des montres de type M_2 à bracelet en tissu ?

Parmi les montres de type M_2, quel est le pourcentage de celles qui ont un bracelet métallique ?

Dans les questions suivantes, les probabilités seront données à 10^{-3} près.

3. On choisit un élève au hasard parmi les 800 élèves du lycée.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « la montre de l'élève a un bracelet métallique » ;

D « la montre de l'élève est de type M_2 ».

4. Définir par une phrase les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer leur probabilité.

5. On choisit au hasard un élève ayant une montre de type M_1. Quelle est la probabilité de l'évènement C « la montre de l'élève a un bracelet en tissu » ?

PROBLÈME (12 points)

Partie A : Étude d'une fonction

Soit la fonction définie sur l'intervalle [10 ; +∞ [par : $f(t) = \dfrac{\ln t - 2}{2t}$.

1. Montrer que $f(t)$ peut s'écrire sous la forme $f(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln t}{t} - \dfrac{1}{t}$. En déduire la limite de $f(t)$ quand t tend vers +∞ .

2. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t) = \dfrac{3 - \ln t}{2t^2}$.

3. Étudier le signe de $f'(t)$ sur [10 ; +∞ [et dresser le tableau de variations de f.

On fera figurer dans ce tableau les valeurs exactes de $f(10)$ et de $f(e^3)$.

Partie B : Application

On se propose d'étudier la capacité pulmonaire de l'être humain en fonction de son âge t, t représentant l'âge en année et $g(t)$ la capacité pulmonaire en litre.

On admet que sur l'intervalle [10 ; 60] on a $g(t) = 220f(t)$.

1. Donner l'expression de $g(t)$ sur [10 ; 60].

2. En utilisant la partie A, préciser la capacité pulmonaire maximale et l'âge où elle est atteinte. Donner une valeur approchée de l'âge à un an près et une valeur exacte puis approchée à 10^{-1} près de cette capacité.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

t	10	15	20	25	30	40	50	60
$g(t)$								

4. Construire (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques 2 cm pour 10 ans sur l'axe des abscisses, 2 cm pour 1 litre sur l'axe des ordonnées).

Pour les questions 5 et 6, faire apparaître sur le graphique les tracés utiles.

5. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant lequel la capacité pulmonaire est supérieure ou égale à 5 litres.

6. Determiner graphiquement à quel âge la capacité pulmonaire a diminué de 20% par rapport à la capacité pulmonaire maximale.

2. STL France juin 2003 Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient 4

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On appelle i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + 3z + 9 = 0$.

2. On considére désormais les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 donnés par : $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -z1$.

a. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.

b. On considére les points M_1, M_2 et M_3 images respectives des nombres complexes z_1, z_2 et z_3. Montrer que O est le milieu de $[M_1M_3]$.

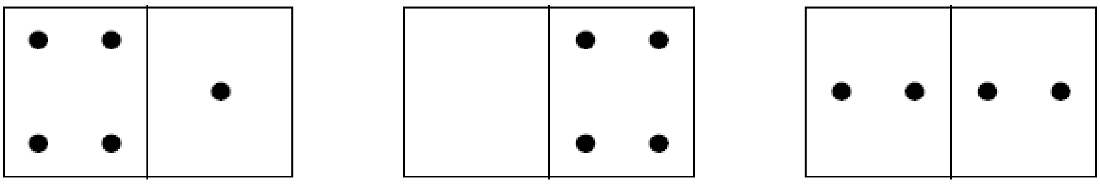
Construire en utilisant la question 2. a. les points M_1, M_2 et M_3.

c. Démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocéle.

d. Soit M_4 le point du plan d'affixe z_4. Déterminer z_4 pour que le quadrilatére $M_1M_2M_3M_4$ soit un losange, puis construire M_4.

EXERCICE 2 (4 points)

Un jeu de dominos est constitué de 28 dominos distincts. On rappelle qu'un domino est partagé en deux parties, chacune portant un nombre de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même nombre. Exemples de dominos :



1. Écrire la liste des 28 dominos distincts.

2. Un joueur tire un domino au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un double ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des nombres situés sur les deux parties soit divisible par 3 ? (On rappelle que 0 est divisible par tout entier non nul.)

c. Soit X la variable aléatoire qui à chaque domino tiré associe la différence entre le plus grand et le plus petit nombre. Par exemple, si le domino tiré porte le nombre 1 et le nombre 4, X prend la valeur $4-1 = 3$.

Déterminer les valeurs prises par X, puis la loi de probabilité de X.

En déduire l'espérance mathématique de X.

PROBLÉME (11 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$.

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminer $g'(x)$. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

2. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considére maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$.

On appelle C sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. a. Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^{2x}}$.

b. En utilisant la partie A, déterminer le tableau des variations de f.

c. En déduire que, pour tout x de $[0 ; +\infty[$ on a : $f(x) > 0$.

4. a. Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

b. Étudier la position relative de C et D.

5. Tracer C et D.

6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-2x}$.

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Déterminer la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie à 0,1 prés.

3. STL France juin 2003 Physique de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 (5 points)

On tire au hasard une boule d'une urne contenant deux boules rouges notées R_1 et R_2, une boule verte notée V et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On ne remet pas la boule tirée et on effectue un second tirage d'une boule.

On appelle résultat un couple dont le premier élément est la boule obtenue au premier tirage et le second, celle obtenue au second tirage, par exemple (R_1, B_2). Tous les résultats sont équiprobables.

1. Déterminer à l'aide d'un tableau ou d'un arbre l'ensemble des résultats possibles.

2. On compléte la situation précédente par une régle du jeu :

- pour chaque boule rouge tirée, on gagne 1 euro ;
- pour chaque boule verte tirée, on gagne 2 euro ;
- pour chaque boule bleue tirée, on perd 2 euro.

On note X la variable aléatoire qui à tout résultat associe le gain obtenu. (Une perte est considérée comme un gain négatif).

a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b. Définir la loi de probabilité de X en remplissant un tableau.

c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X. Que représente E(X) ¿ Le jeu est-il équitable ¿

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repére orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$ où z est une variable complexe.

1. a. Calculer $P(2)$.

b. Trouver les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.

c. Résoudre alors l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. On considére les nombres complexes $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

a. Calculer le module et un argument de chacun de ces trois nombres complexes.

b. Écrire le quotient $\dfrac{z_3}{z_2}$ sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel appartenant á l'intervalle $]-\pi\,;+\pi[$.

Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_3}{z_2}$.

3. On considére les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a. Montrer que M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Placer ces points.

b. Montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme M_2 en M_3. Donner une mesure, en radian, de l'angle de cette rotation.

c. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocéle.

PROBLÉME (11 points)

Partie A : Étude d'une fonction

On considére la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = 1 + \left(\dfrac{x-3}{8}\right)e^{x}$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté á un repére orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. En déduire une équation d'une droite D asymptote á la courbe C.

c. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la droite D et de la courbe C.

d. Déterminer la position relative de la droite D et de la courbe C.

2. a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c. Pour quelle valeur de x le minimum de la fonction est-il atteint ¿ Préciser ce minimum.

d. En déduire que, pour tout réel x, on a : $f(x) > 0$.

3. Donner une équation de la tangente T á la courbe C au point d'abscisse 0.

4. Tracer sur le même graphique, la droite D, la tangente T et la courbe C.

Partie B : Calcul d'aire

1. Pour deux réels a et b, on considére la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(\dfrac{ax+b}{8}\right)e^{x}$.

a. Déterminer les réels a et b pour que $g'(x) = \left(\dfrac{x-3}{8}\right)e^{x}$.

b. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Hachurer sur le graphique, le domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -2$.

b. Calculer l'aire de la partie hachurée. Donner la valeur exacte en cm^2 puis la valeur arrondie à 10^{-2} prés.

4. STL La Réunion juin 2003 Biochimie

EXERCICE 1 (8 points)

On donne les hauteurs, en centimétres, d'une plante mesurée tous les trois jours àmidi du 1^er au 16 juillet :

jour x_i	1	4	7	10	13	16
hauteur h_i	6,5	8,4	12	15,4	19,7	24,6

1. On pose $y_i = \ln h_i$.

Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à 10^{-2} prés :

jour x_i	1	4	7	10	13	16
$y_i = \ln h_i$						

2. Représenter graphiquement le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$ avec $y_i = \ln h_i$ en prenant comme unités : 1 cm sur l'axe des abscisses, 5 cm sur l'axe des ordonnées.

3. G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers points.

a. Calculer les coordonnées des points G_1 et G_2.

b. Déterminer une équation de la droite D passant par les points G_1 et G_2.

c. Tracer D sur le graphique. On admet que cette droite constitue un bon ajustement du nuage.

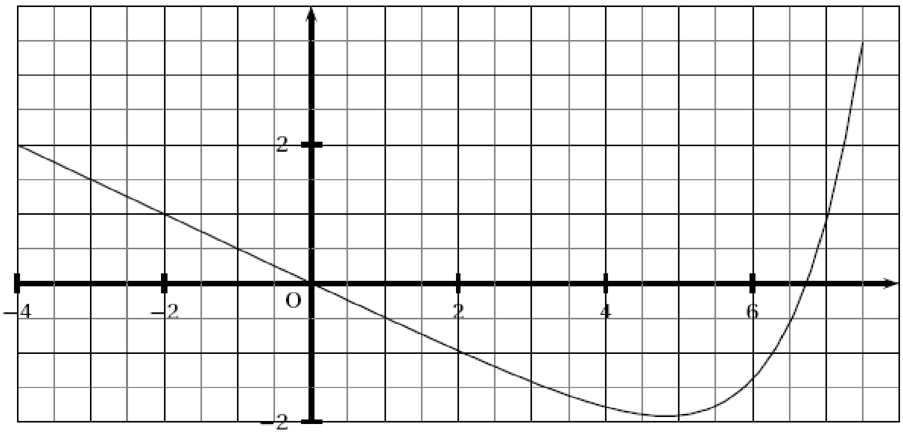
À partir de l'ajustement précédent, exprimer la hauteur h de la plante en fonction du jour x du mois de juillet et montrer que l'on peut écrire $h(x) = Ce^{0,09x}$ avec $C \approx 6,05$.

On suppose que la croissance se poursuit ainsi tout le mois de juillet.

1. A quelle date la plante mesurera-t-elle 40 cm ?
2. Quelle sera la hauteur atteinte le 31 juillet à midi ?

EXERCICE 2 (12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,004e^x - 0,5x$ dont une représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$.

b. En écrivant que, pour x différent de 0, on a $f(x) = x\left(0,004\dfrac{e^x}{x} - 0,5\right)$, déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a. Calculer $f'(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $0,004e^x - 0,5 = 0$ et montrer que la solution obtenue peut s'écrire 3ln(5).

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $0,004e^x - 0,5 > 0$.

3. Donner le tableau de variations de f.

4. On désigne par x_1 et x_2 les solutions de l'équation $f(x) = 0$, où x_1 désigne la plus petite et x_2 la plus grande. Par lecture graphique :

a. donner une valeur approchée à 10^{-1} prés de x_1 et x_2 ;

b. déterminer le signe de $f(x)$.

5. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution x_2 de l'équation $f(x) = 0$.

5. STL France juin 2002 Biochimie, Génie Biologique

EXERCICE 1 (8 points)

Des étudiants en agronomie procèdent au croisement de deux variétés de pois, l'une ayant des graines jaunes et lisses, l'autre des graines vertes et ridées.

En premiére génération, F1, les graines obtenues sont toutes semblables entre elles, elles sont jaunes et lisses.

L'expérience est poursuivie. Les étudiants croisent entre eux les individus de la génération F1, pour obtenir la génération F2.

L'observation de 5431 graines issues de la génération F2 montre que :

- 4 069 graines sont jaunes dont 3 057 lisses ;
- 341 graines sont vertes et ridées.

Dans les questions 2 à 4, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie á 10^{-3} prés.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant (on ne justifiera pas les résultats) :

	graines jaunes	graines vertes	Total
graines lisses			
graines ridées			
Total			5 341

2. On tire au hasard une graine parmi les 5 431 de cet échantillon, tous les tirages étant équiprobables. Calculer la probabilité des événements suivants : A : « La graine est jaune » ; B : « La graine est lisse ».

3. On considére les événements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ désignent les événements contraires respectifs de A et B.

Définir chacun de ces événements par une phrase, puis calculer leur probabilité.

4. On prend, au hasard, une graine jaune. Quelle est la probabilité de l'événement C « la graine est ridée » ¿

EXERCICE 2 (12 points)

PROTOZOAIRE : être vivant unicellulaire, classé traditionnellement dans le régne animal (dictionnaire *Le Petit Robert*). On étudie l'évolution d'une colonie de protozoaires placés dans un milieu limité.

Le nombre $f(t)$ de protozoaires dépend du temps, exprimé en heures, selon la relation : $f(t) = \dfrac{10^3}{1+4e^{-0,5t}}$ pour t appartenant á l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

C désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repére orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 1 cm pour 1 heure sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 100 protozoaires sur l'axe des ordonnées.

1. a. Étudier la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

b. En déduire que C admet une asymptote dont on préciseraune équation.

2. On note f' la dérivée de f.

a. Démontrer que pour tout nombre réel positif t : $f'(t) = \dfrac{2000e^{-0,5t}}{\left(1+4e^{-0,5t}\right)^2}$.

b. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty[$.

c. Établir le tableau de variations de f.

3. Compléter, aprés l'avoir reproduit, le tableau suivant. Les valeurs de $f(t)$ seront arrondies á l'unité prés.

t	0	1	2	4	6	8	9	10
$f(t)$								

4. Tracer la courbe C et son asymptote.

5. Calculer l'instant t_0 où le nombre de protozoaires sera égal á 500. Donner une valeur approchée de t_0 á une minute prés.

6. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps, cette colonie de protozoaires dépassera 95% de son taux de saturation qui s'éléve à 1 000 individus (o*n fera apparaître sur la figure les construction utiles*).

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repére orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

On appelle i le nombre complexe demodule 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On appelle notation exponentielle du nombre complexe z l'écriture de z sous la forme $z = re^{i\theta}$ où r est le module de z et θ un argument de z.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.

2. On pose $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_E = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. Écrire z_A et z_E en notation exponentielle.

b. Construire les points A et E d'affixes respectives z_A et z_E.

3. On définit les quatre nombres complexes suivants : $z_B = z_A^2$, $z_C = z_A^3$, $z_D = z_A^4$, $z_F = z_A^6$.

a. Écrire ces quatre nombres complexes en notation exponentielle.

b. Démontrer que les points A, B, C, D, E et F sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Construire les points B, C, D et F. On justifiera la construction.

EXERCICE 2 (4 points)

Au cours d'une réaction chimique, on appelle $C(t)$ la concentration du réactif (en moles par litre) à l'instant t (en minutes). On admet que la fonction $C \rightarrow C(t)$ définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty\,[$ est solution de l'équation différentielle (E) : $C'(t) = -aC(t)$ où a est une constante donnée liée à la réaction.

1. a. Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution de (E) vérifiant : $C(0) = 0{,}1$ mol.L^{-1}($C(0)$ est la concentration initiale à l'instant $t = 0$).

2. On donne $a = 9{,}9\times10^{-3}\ \text{min}^{-1}$ et on suppose désormais que la fonction C est définie sur I par : $C(t) = 0{,}1e^{-9{,}9\times10^{-3}t}$.

a. Déterminer le temps de demi-réaction noté $t_{1/2}$, c'est á dire la valeur de t pour laquelle la concentration est égale á la moitié de la concentration initiale $C(0)$. On donnera d'abord la valeur exacte de t puis celle arrondie à laminute.

b. La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe. L'axe des abscisses est graduée en minutes. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle la concentration est égale á 10% de la concentration initiale.

PROBLÉME (11 points)

On considére la fonction f définie sur l'intervalle I =] 0 ; +∞ [par : $f(x) = x - 1 - 2\ln x$.

On appelle C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repére orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.

Calculer $f'(x)$, étudier son signe puis construire le tableau de variations de f.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point A d'abscisse 1.

4. Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ puis en donner les valeurs approchées à 10^{-1} prés.

En utilisant les résultats précédents et le tableau de variations de la fonction f :

a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution autre que 1 ;

b. donner un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.

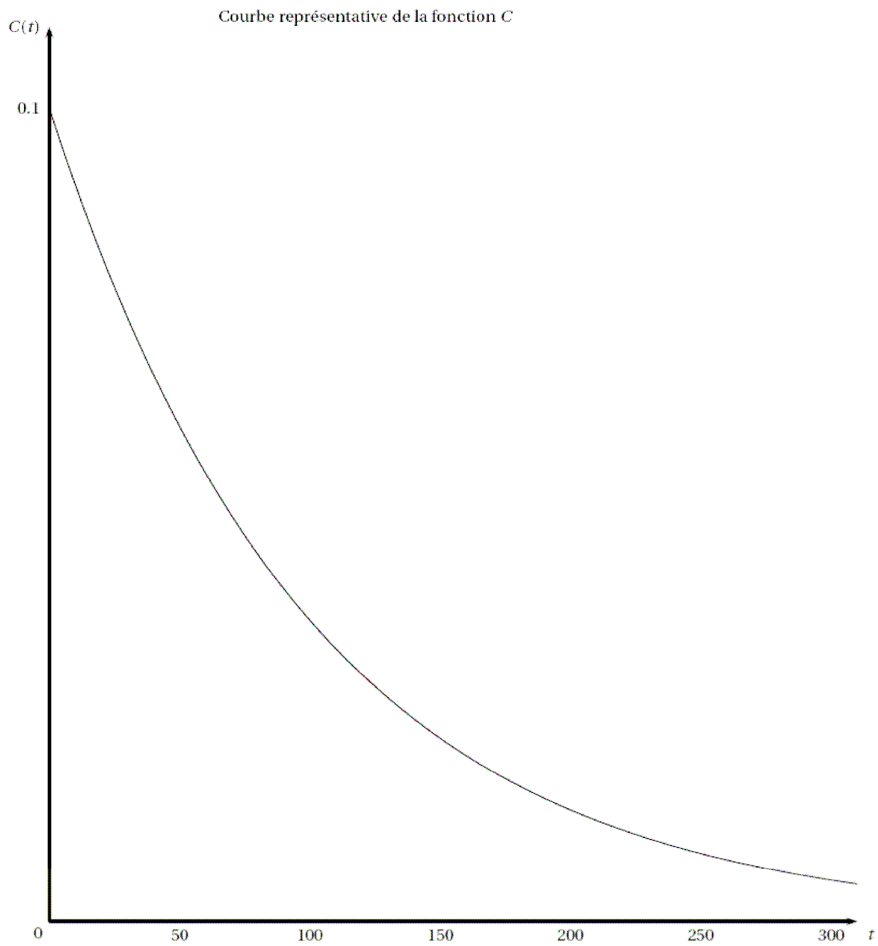
5. Construire dans le repére $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la courbe C et la tangente T.

6. Soit F la fonction définie sur l'intervalle I par $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2x\ln x$.

a. Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

b. On appelle S l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.

Calculer la valeur exacte en cm^2 de S, puis une valeur approchée au mm^2 prés.



7. STL France juin 2002 Physique de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 (5 points)

Un condensateur de capacité C est associé en série avec une bobine d'inductance L. Les tensions aux bornes du condensateur et aux bornes de la bobine à l'instant t exprimé en secondes sont respectivement notées $u_C(t)$ et $u_L(t)$.

On désigne par $i(t)$ l'intensité du courant à l'instant t.

A chaque instant, on a : $i(t)=Cu'_C(t)$ et $u_L(t)=Li'(t)$.

On admet que la tension u est solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$ de l'équation différentielle

$$u_C''(t) + \frac{u_C(t)}{LC} = 0 \quad \text{(E)}$$

On prendra $C = 16 \times 10^{-6}$ F(farads) et L = 1 H(henry).

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Le condensateur est initialement chargé sous une tension de 15 V(volts) et, à cet instant initial, l'intensité du courant est nulle. Ceci se traduit par les deux conditions initiales $u_C(0) = 15$ et $i(0) = 0$.

Montrer alors que la solution u correspondante s'écrit : $u_C(t) = 15\cos(\omega t)$, où ω est un réel positif dont on précisera la valeur.

3. Soit I_m la valeur moyenne de la fonction i entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega}$. Montrer que $I_m = -\dfrac{0{,}12}{\pi}$.

EXERCICE 2 (4 points)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

On notera :

- z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive ;
- z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.

2. Écrire les complexes z_1, z_2, z_1^2 et z_2^2 sous forme trigonométrique.

3. Dans le plan muni d'un repére orthonormal (unité graphique : 2 cm), on considére les points A, B, C et d'affixes respectives z_1, z_2, z_1^2 et z_2^2.

a. Placer, trés précisément, les points A, B, C et D(on se servira des résultats de la question 2.).

b. Démontrer que le triangle AOD est un triangle rectangle.

c. Démontrer que le quadrilatére $ABCD$ est un trapéze isocéle.

PROBLÉME (11 points)

Le but du probléme est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{(x-2)^2}$.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repére orthogonal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$, unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

1. Résoudre dans l'intervalle $]0\ ;\ 2[$ l'équation : $1+2\ln x = 0$.

2. On considére la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$ par : $g(x) = x - 2 - 2x\ln x$.

a. Déterminer la dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$.

b. Démontrer que la fonction g admet en $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ un maximum égal à $\dfrac{2}{\sqrt{e}} - 2$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 2[$.

Partie B - Étude et représentation graphique de la fonction f

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0\ ;\ 2[$. En déduire l'existence de deux asymptotes á la courbe C.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ 2[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-2)^3}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$.

3. a. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

b. Tracer T et C.

Partie C - Calcul d'aire

1. Soit la fonction F définie sur l'intervalle]0 ; 2[par : $F(x)=\frac{\ln x}{2-x}+\frac{1}{2}\left[\ln(2-x)-\ln x\right]$. Déterminer sa fonction dérivée F'.

2. On appelle S l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\frac{3}{2}$. Calculer la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au centième.

8. STL France septembre 2001 Biochimie, génie biologique

EXERCICE 1 (12 points)

Une réserve d'eau naturelle est aménagée pour la baignade. Un système d'évacuation permet de maintenir dans ce bassin, en toutes circonstances, un volume d'eau constant égal á 50 000 litres. A la suite de pluies torrentielles, des eaux de ruissellement, polluées par des pesticides, se déversent dans ce bassin.

On a déterminé le volume y_i (en litres) de pesticides contenus dans le bassin á l'instant t_i (exprimé en heures). Les résultats figurent dans le tableau suivant :

t_i	0	20	40	60	80	100
y_i	0	173	375	502	688	778

On pose $z_i = -7+\ln(2000 - y_i)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en donnant les valeurs de z_i á 10^{-2} prés.

t_i	0	20	40	60	80	100
z_i	0,39					

2. Dans un repére orthogonal, représenter le nuage de points $M_i(t_i\,;z_i)$ (on prendra 0,1 cm pour unité en abscisses, et 20 cm pour unité en ordonnées).

3. a. Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des trois premiers points du nuage et celles du point moyen G_2 des trois derniers points du nuage.

b. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique et tracer la droite (G_1G_2).

c. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).

4. On considére que la droite (G_1G_2) constitue un ajustement affine convenable du nuage de points $M_i(t_i\,;z_i)$. Á l'aide du résultat obtenu en 3. c., montrer que l'on peut choisir comme expression approchée de y en fonction de t : $y=2000\left(1-e^{-0,005t}\right)$.

5. La baignade devient dangereuse dés que le taux de pesticides contenus dans l'eau atteint 2 %.

a. Pour quel volume de pesticides ce taux est-il atteint ?

b. Résoudre l'inéquation : $2000\left(1-e^{-0,005t}\right)\geq 1000$.

c. En déduire au bout de combien de jours la baignade sera dangereuse (on arrondira le résultat à l'entier le plus proche).

d. Comment peut-on vérifier graphiquement ce résultat ?

EXERCICE 2 (8 points)

Le but de l'exercice est la détermination puis l'étude de quelques propriétés d'une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique (C), ainsi que la tangente à (C) au point d'abscisse 0, figurent ci-dessous.

Partie A : détermination de la fonction f

1. A l'aide du graphique, déterminer *f*(0) et *f* '(0), où *f* 'désigne la dérivée de la fonction *f*.

2. On suppose que l'expression de *f* est donnée pour tout nombre réel *x* par : $f(x) = \alpha + \beta x e^{-x}$, où α et β sont des nombres que l'on se propose de déterminer.

a. En utilisant un résultat du 1. déterminer la valeur de α.

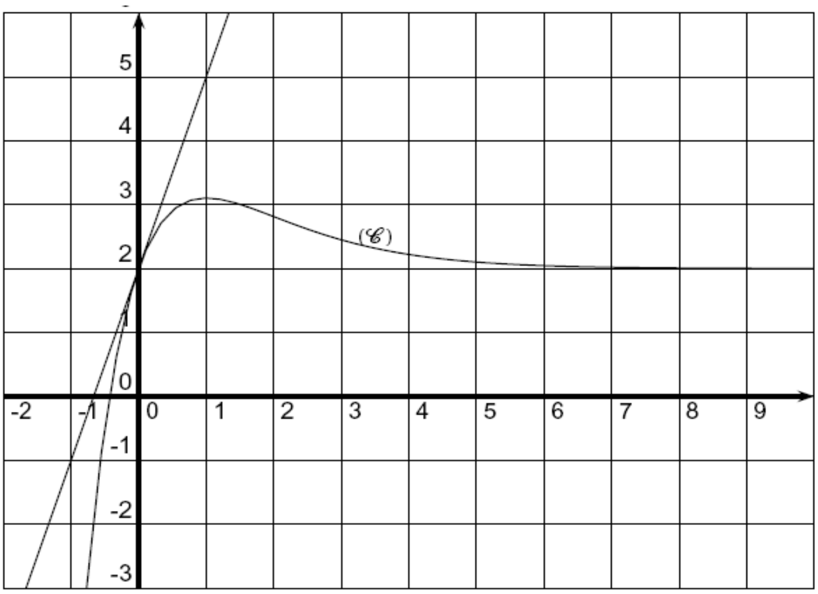
b. Démontrer que, pour tout nombre réel *x*, $f'(x) = \beta e^{-x}(1-x)$.

A l'aide de l'autre résultat du 1. en déduire β.

Partie B : étude de quelques propriétés de la fonction f

On admet dans cette partie que l'expression de *f* est $f(x) = 2 + 3xe^{-x}$.

1. En utilisant l'expression de la dérivée obtenue dans la partie A. 2. b., étudier les variations de la fonction *f*, et préciser les coordonnées exactes du point correspondant au maximum de cette fonction.
2. Étudier les limites de la fonction *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.
4. Pour quelles valeurs du nombre réel *x* a-t-on *f*(*x*) < 2 ?



9. STL France juin 2001 Biochimie génie biologique

EXERCICE 1 (8 points)

Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer ensuite en eau potable.

Lors d'une pollution, elle doit interrompre ses prélèvements le temps que la vague de pollution soit évacuée par le courant. On suppose qu'à partir de l'alerte, donnée à l'instant 0, la concentration en polluant *P*, exprimée en milligrammes par litre (mg/l), dépend du temps *t*, exprimé en heures, suivant la relation :

$P(t) = 100te^{-t}$ pour *t* appartenant à l'intervalle [0 ; 5].

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en donnant des valeurs arrondies à l'entier le plus proche :

t en heures	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$P(t)$ en mg/l											

2. Montrer que la dérivée P' est définie sur l'intervalle [0 ; 5] par $P'(t) = 100e^{-t}(1-t)$.

3. Étudier le signe de la dérivée P' et dresser le tableau de variation de la fonction P pour t appartenant à l'intervalle [0 ; 5].

4. Tracer la courbe représentative C_P de la fonction P dans un repère orthogonal en prenant en abscisse 2 cm pour une heure et en ordonnée 2 cm pour 5 mg/l de pollution.

5. Les normes en vigueur indiquent que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/l.

a. Déterminer graphiquement à partir de quel instant t_0 la station peut reprendre son pompage sans risque pour la santé (on laissera les constructions apparentes).

b. Entre le début de l'alerte et l'arrêt effectif du pompage, il s'est écoulé exactement 6 minutes. Peut-on affirmer que l'eau prélevée a toujours été conforme aux normes en vigueur vis-à-vis de ce polluant ? On justifiera la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 2 (12 points)

Données scientifiques concernant le brochet

La croissance observée en centimètres suivant l'âge est indiquée dans le tableau ci dessous :

âge du brochet en années	1	2	3	4	5
taille en centimètres	23	36	43	55	62

La longévité de l'espèce (âge maximal) est évaluée à neuf années. Très nombreux à la naissance, les brochets se font plus rares à l'âge adulte, les spécimens très âgés devenant exceptionnels. Ainsi sur 1000 brochets qui viennent de naître, seuls 10 parviendront à l'âge de 8 ans.

Le graphique de la page suivante représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.

1. Un ajustement linéaire du nuage semble-t-il justifié ?

2. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et par G_2 celui des deux derniers.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

b. Montrer que la droite (G_1G_2) admet pour équation réduite : $y = 9{,}8x + 14{,}4$.

c. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et montrer qu'il appartient bien à la droite (G_1G_2).

Placer le point G sur le graphique.

3. On admet que cette droite constitue une bonne modélisation de la taille du brochet en fonction de son âge.

a. Résoudre algébriquement l'inéquation $9{,}8x + 14{,}4 > 200$.

Est-il vraisemblable qu'un brochet dont la taille dépasse 200 centimètres puisse être observé ?

b. Résoudre graphiquement l'équation $9{,}8x + 14{,}4 = 100$.

En déduire l'âge d'un brochet mesurant 100 centimètres (on donnera la valeur entière la plus proche et on laissera apparents les traits de construction).

4. On souhaite construire un tableau indiquant le nombre de brochets U_n, présents dans un lac, en fonction de leur âge n, en adoptant comme modèle une suite géométrique décroissante de raison $q = 0{,}565$ et de premier terme $U_0 = 1000$.

a. Calculer les nombres U_1 et U_2 (on donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche).

b. Recopier et compléter le tableau suivant où les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche :

âge n en années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	nombre total de brochets
nombre de brochets U_n	565	319	180						6	1 2091

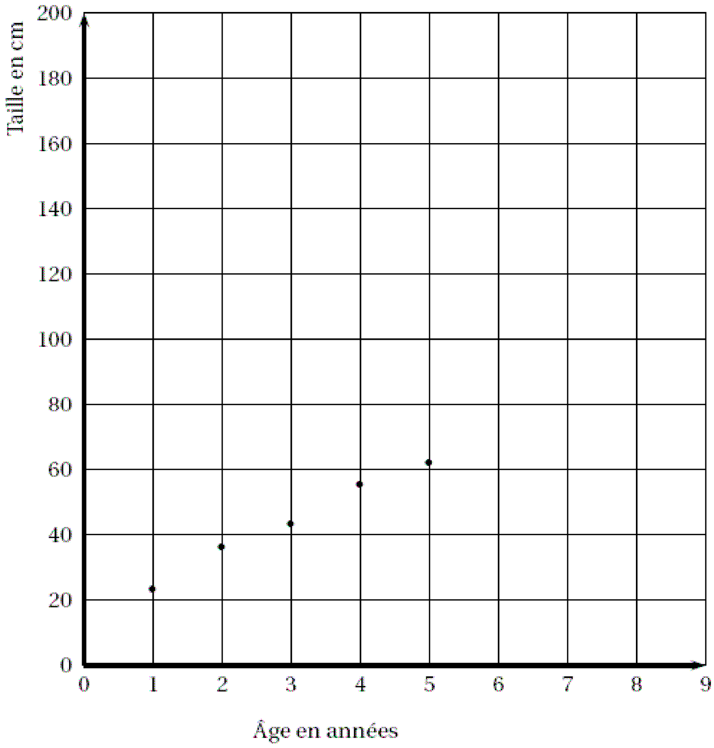
5. On pêche un des 1291 brochets âgés de un an et plus présents dans le lac. On suppose que tous ont la même probabilité d'être capturés.

a. Pour une bonne gestion piscicole, on ne peut conserver, après capture, qu'un poisson âgé de quatre ans et plus. On capture un brochet : quelle probabilité a-t-on de pouvoir le garder ¿ (on donnera un résultat à un dixième près).

b. Montrer que la probabilité de capturer un poisson dont la taille est un mètre, est d'environ 5 sur 1000.

À REMETTRE AVEC LA COPIE

Évolution de la taille d'un brochet en fonction de son âge



10. STL France juin 2001 Chimie de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 (5 points)

Une roue de loterie munie d'un index fixe est divisée en secteurs de mêmes dimensions et de différentes couleurs. Le jeu consiste à miser 20 francs, à faire tourner la roue et à noter la couleur du secteur désigné par l'index à l'arrêt de la roue. On admet que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître. La roue comporte :

- n secteurs rouges qui font perdre lamise (gain du joueur : -20 F) ;
- 6 bleus où l'on reçoit 20 F (gain du joueur nul) ;
- 3 verts où l'on reçoit 80 F;
- 1 jaune où l'on reçoit 120 F.

Soit X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.

1. Dans cette question, la roue comporte 14 secteurs rouges($n = 14$).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

c. Calculer l'écart-type de X au franc près.

2. Dans cette question, la roue comporte n secteurs rouges et son propriétaire désire gagner en moyenne au moins 15% des sommes misées.

a. Montrer que l'espérance mathématique de X doit être inférieure ou égale à -3.

b. Montrer que l'espérance mathématique de X est : $\dfrac{-20n+280}{n+10}$.

c. Déterminer le nombre minimum n de secteurs rouges que doit comporter la roue.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$.

2. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 + \left(5 - i\sqrt{3}\right)z + 4\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

a. Calculer $P(-4)$.

b. En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme $(z + 4)(z + a)$ où a est un nombre complexe à déterminer.

c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

3. Le plan est muni d'un repère orhonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Soit les nombres complexes :

$z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ d'image le point A, $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$ d'image le point B, $z_C = -4$ d'image le point C.

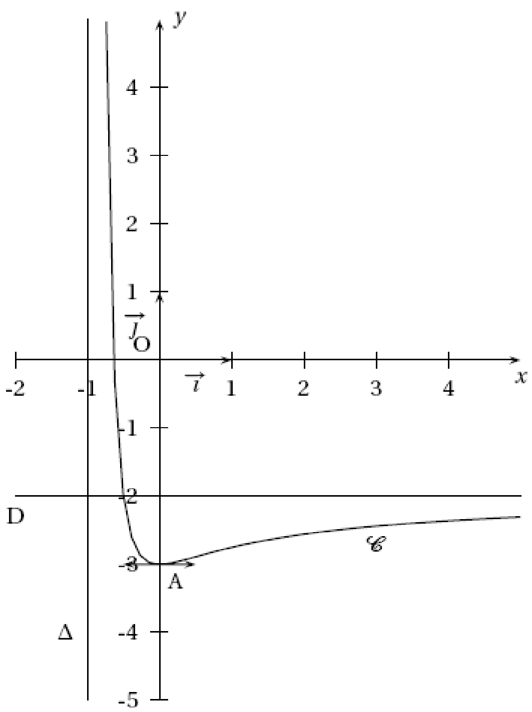
a. Déterminer lemodule et un argument de chacun de ces nombres.

b. Placer les trois points A, B et C.

c. Démontrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

d. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

PROBLÈME (10 points)



Ci-dessus est tracée dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty\,[$ dont la valeur minimale n'est atteinte que pour $x = 0$.

On sait notamment que C admet deux asymptotes D et Δ qui sont représentées sur le graphique, qu'elle passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,-3)$ et qu'elle admet en A une tangente horizontale.

Partie I

1. En utilisant l'énoncé et le graphique, donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. La fonction f est de la forme : $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$, où a, b, et c sont trois constantes réelles.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{-bx-b+2c}{(x+1)^3}$.

3. En utilisant les questions précédentes :

a. démontrer que $a = -2$;

b. déterminer b et c.

On admet que f est définie sur $]-1\,;\,+\infty\,[$ par : $f(x) = -2 - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Partie II

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f.

2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

3. Étudier la position de C par rapport à la droite D d'équation $y = -2$.

4. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de la région du plan limitée par la courbe C , la droite D et les droites d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 3$.

11. STL France Juin 2001 Physique de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 (5 points)

À l'instant $t = 0$, un corps dont la température est de 100°C est placé dans une salle à 20°C. Ondésigne par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t , l'unité de temps étant l'heure et l'unité de température le degré Celsius.

On suppose que la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence de température entre la température du corps et la température de la salle (loi de Newton) (on négligera l'élévation de température de la salle) et on admettra donc qu'il existe un nombre réel k tel que $\theta'(t) = k\big(\theta(t) - 20\big)$.

1. On pose $y(t) = \theta(t) - 20$.

a. Montrer que la fonction y est solution de l'équation différentielle $y' = ky$ où k est défini ci-dessus.

b. Résoudre cette équation différentielle.

c. En déduire que $\theta(t) = Ce^{kt} + 20$ où C est un nombre réel que l'on calculera.

2. a. Sachant qu'au bout de 20 minutes le corps s'est refroidi de 100°C à 60°C, montrer que

$$\theta(t) = 80e^{(-3\ln 2)t} + 20\,.$$

b. Quelle est la température du corps, arrondie au degré, au bout de 30minutes ¿

c. En combien de temps la température tombera-t-elle à de 100°C à 30°C ¿.

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. a. Vérifier que le nombre complexe $2+\sqrt{3}-i$ est solution de l'équation :

$$Z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)Z+4\left(2+\sqrt{3}\right)=0.$$

b. Donner l'autre solution de cette équation.

2. On considère les nombres complexes : $Z_1=\left(2+\sqrt{3}\right)+i$ et $Z_2=\left(2+\sqrt{3}\right)-i$.

a. Placer dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ le point A d'affixe Z_1 et le point B d'affixe Z_2.

b. Vérifier que $\dfrac{Z_2}{Z_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

c. Déterminer le module et un argument du complexe $\dfrac{Z_2}{Z_1}$.

d. Déduire du résultat précédent l'anglede la rotation de centre O qui transforme A en B.

3. a. Déterminer l'affixe Z_3 du point C milieu du segment $[AB]$.

b. Quelle est la nature du triangle OCA ?

4. a. Calculer $|Z_1|$ et $|Z_3|$.

b. Déduire des résultats précédents que : $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

PROBLÈME (10 points)

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1-\dfrac{\ln x}{x}$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x^3-1+\ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Les limites aux bornes ne sont pas demandées.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe C que l'on précisera.

2. Démontrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$. Sa courbe représentative P dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est donnée ci-après.

a. Déterminer la limite de $[f(x)-h(x)]$ en $+\infty$.

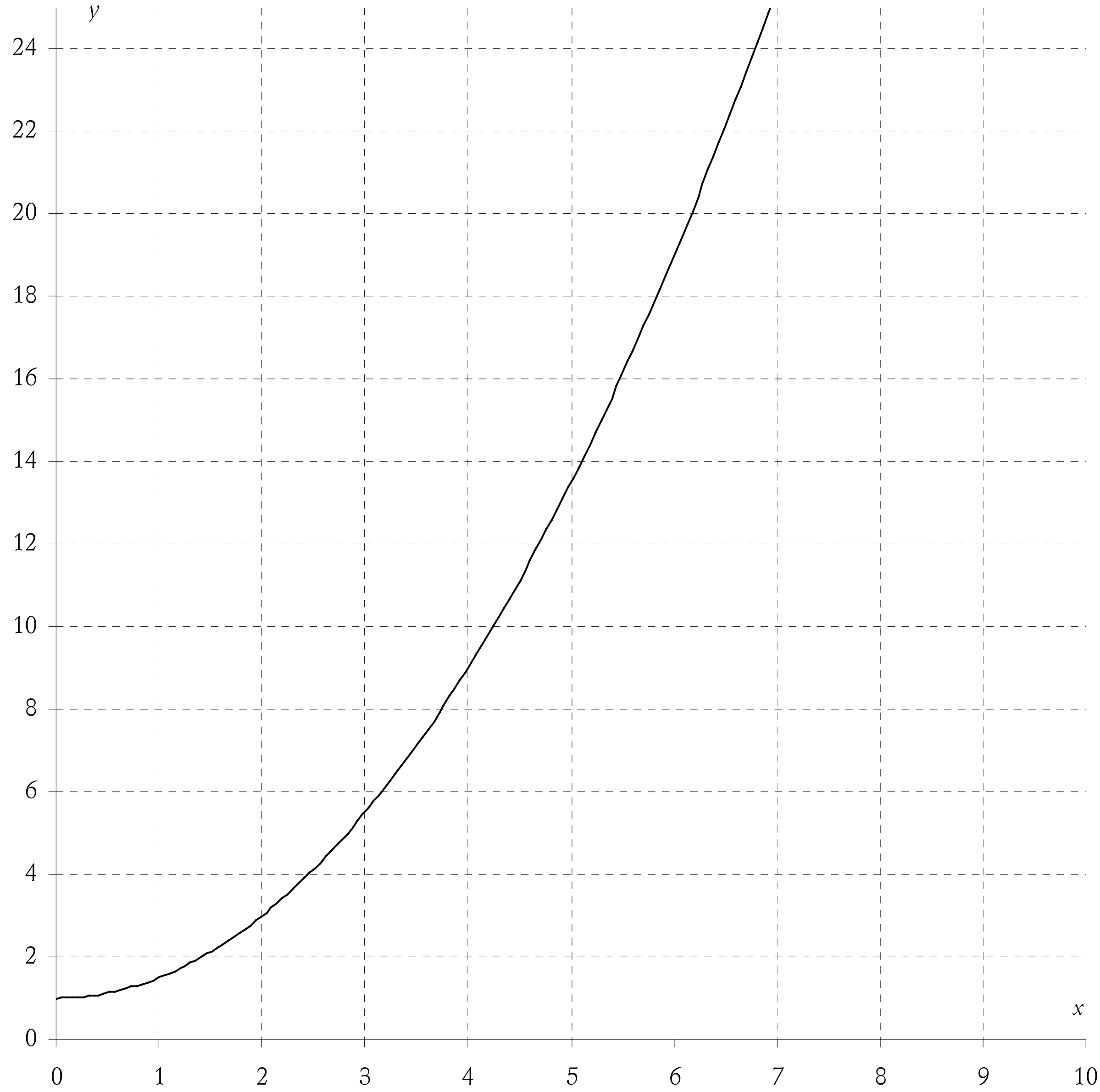
b. Déterminer le signe de $[f(x)-h(x)]$. Que peut-on en déduire pour la position relative des deux courbes C et P ?

4. Tracer la courbe C sur la feuille ci-après (à rendre avec la copie).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction : $x \to \frac{1}{x}\ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. On appelle S l'aire en cm^2, de la partie du plan limitée par les deux courbes C et P et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$. Donner la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au mm^2.



12. STL Antilles–Guyane juin 2000 Biologie–Génie biologique

Durée : 2 heures Coefficient : 2

EXERCICE 1 (8 points)

40 livres de mathématiques pour la section STL sont disposés sur une étagère de la bibliothèque du centre de documentation et d'information d'un lycée.

7 d'entre eux ont une couverture bleue, 12 ont une couverture jaune et 21 ont une couverture rouge. Parmi ces 40 livres, 35 %sont des livres de première, et tous les autres sont des livres de terminale.

Parmi les 7 livres à couverture bleue, 4 sont du niveau première.

Parmi les 12 livres à couverture jaune, les 3/4 sont du niveau terminale.

1. Reproduire sur la copie et remplir le tableau suivant :

Nombre de livres	à couverture bleue	à couverture jaune	à couverture rouge	Total
de première				
de terminale				
Total				

2. On choisit un livre au hasard sur l'étagère, et on suppose l'équiprobabilité des tirages.

a. Quelle est la probabilité p_1 qu'il s'agisse d'un livre de terminale ?

b. Quelle est la probabilité p_2 qu'il s'agisse d'un livre à couverture jaune ?

c. Quelle est la probabilité p_3 qu'il s'agisse dun livre de terminale à couverture jaune ?

d. Quelle est la probabilité p_4 qu'il s'agisse d'un livre de terminale ou d'un livre à couverture jaune ?

3. Jacques et Sophie veulent chacun un livre à couverture bleue. Jacques choisit un livre, puis Sophie un autre parmi ceux qui restent.

a. Combien de résultats différents peut-on obtenir ? On pourra s'aider d'un arbre (même incomplet) ou d'un tableau.

b. Quelle est la probabilité que Jacques et Sophie emportent tous les deux un livre de première ?

EXERCICE 2 (12 points)

Partie A Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y' = 0{,}12y$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation différentielle.

2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle prenant la valeur 3,5 pour la valeur 0 de la variable.

Partie B Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 3{,}5e^{0{,}12t}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm sur chaque axe).

1. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2. Soit f' la fonction dérivée de f.

a. Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point de (C) d'abscisse 0.

4. Reproduire et compléter le tableau suivant. On donnera les résultats à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$											

5. Construire la tangente (T) et la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 10].

Partie C Application

Dans un milieu biologique donné, on appelle N le nombre de cellules d'une population en développement. N varie en fonction du temps t selon la relation $N = f(t) = 3{,}5e^{0{,}12t}$, où N est exprimé en millions de cellules et t en heures.

1. Calculer l'instant t (arrondi au centième) où le milieu donné contiendra une population de 6 millions de cellules.

2. Retrouver ce résultat graphiquement.On fera apparaître les traits de construction sur le dessin.

13. STL France juin 2000 Biochimie–Génie biologique

Durée : 2 heures Coefficient : 2

Après la prise d'une boisson alcoolisée par une personne, on procède à l'étude de l'évolution de la quantité d'alcool présente dans son tube digestif (exercice 1) puis dans les liquides du corps (exercice 2). Ces deux exercices peuvent être traités indépendamment l'un de l'autre.

EXERCICE 1 (10 points)

À l'instant t, on note $u(t)$ la quantité d'alcool encore présente dans le tube digestif avec t exprimé en minutes et $u(t)$ en moles d'alcool. On a relevé les résultats suivants :

t_i (en min)	0	1,5	4,5	9	15	18
$u_i = u(t_i)$ (en mole)	1,2	0,94	0,56	0,26	0,10	0,06

On pose $v_i = \ln(u_i)$.

1. Recopier et compléter, avec des valeurs arrondies à 10^{-2} près, le tableau suivant :

t_i (en min)	0	1,5	4,5	9	15	18
v_i						

2. Représenter le nuage de points $M_i(t_i\ ;\ v_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cmsur l'axe des abscisses et 4 cmsur l'axe des ordonnées). Que remarque-t-on ?

3. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et par G_2 celui des trois derniers.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

b. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $v = mt + p$.

On admet que cette droite constitue un bon ajustement du nuage de points M_i.

4. À partir de cet ajustement, déterminer la quantité d'alcool encore présente dans le tube digestif de cette personne à l'instant $t = 20$.

5. On admet désormais que la fonction u est dérivable et vérifie l'équation différentielle :

$$u' = -0,17u \text{ avec } u(0) = 1,2.$$

a. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ cette équation différentielle.

b. Calculer $u(20)$ et comparer avec le résultat obtenu expérimentalement à la question 4. précédente.

EXERCICE 2 (10 points)

Après absorption, l'alcool se répartit dans les liquides du corps, en particulier dans le sang, où il est dégradé et évacué.

À l'instant t, on note $q(t)$ la quantité d'alcool encore présente dans les liquides du corps avec t exprimé en minutes et $q(t)$ en moles d'alcool.

On admet que sur l'intervalle [0 ; 400], l'expression de $q(t)$ en fonction de t est :

$$q(t) = 1,2 - 2,9\times10^{-3}t - 1,2e^{-0,17t}.$$

1. Vérifier que $q(0) = 0$.

2. a. Montrer que la fonction q' dérivée de q vérifie $q'(t) = 0,204e^{-0,17t} - 2,9\times10^{-3}$.

b. Montrer que l'équation $q'(t) = 0$ admet une unique solution t_0. Calculer une valeur approchée, au centième près, de t_0 et de $q(t_0)$.

c. Résoudre sur l'intervalle [0 ; 400] l'inéquation $q'(t) \geq 0$. En déduire les variations de la fonction q sur cet intervalle et dresser son tableau de variations.

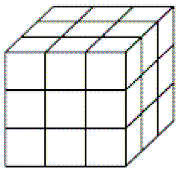
3. Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction q (unités graphiques 1 cm pour 20 minutes sur l'axe des abscisses et 10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

4. Déterminer graphiquement l'instant t, à partir duquel la quantité d'alcool redevient inférieure à 0,44 mole (cette quantité correspond pour cette personne à un taux d'alcoolémie de 0,5 g d'alcool par litre).

14. STL France juin 2000 Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Durée : 3 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 (4 points)



Un cube de bois de 3 cm est peint puis débité parallèlement aux faces, en cubes de 1 cm d'arête. On place les petits cubes dans un sac.

1. a. Combien de petits cubes a-t-on placé dans le sac ?

b. Combien y-en-a-t-il ayant zéro face peinte, une face peinte, deux faces peintes, trois faces peintes ?

2. On tire au hasard, un cube du sac. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de faces peintes obtenues.

Donner la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) puis l'écart-type σ (X).

EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_M = \sqrt{2} + z_A$.

1. Calculer OA, puis placer les points A et M.

2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle approprié, calculer OM et en déduire $|z_M|$.

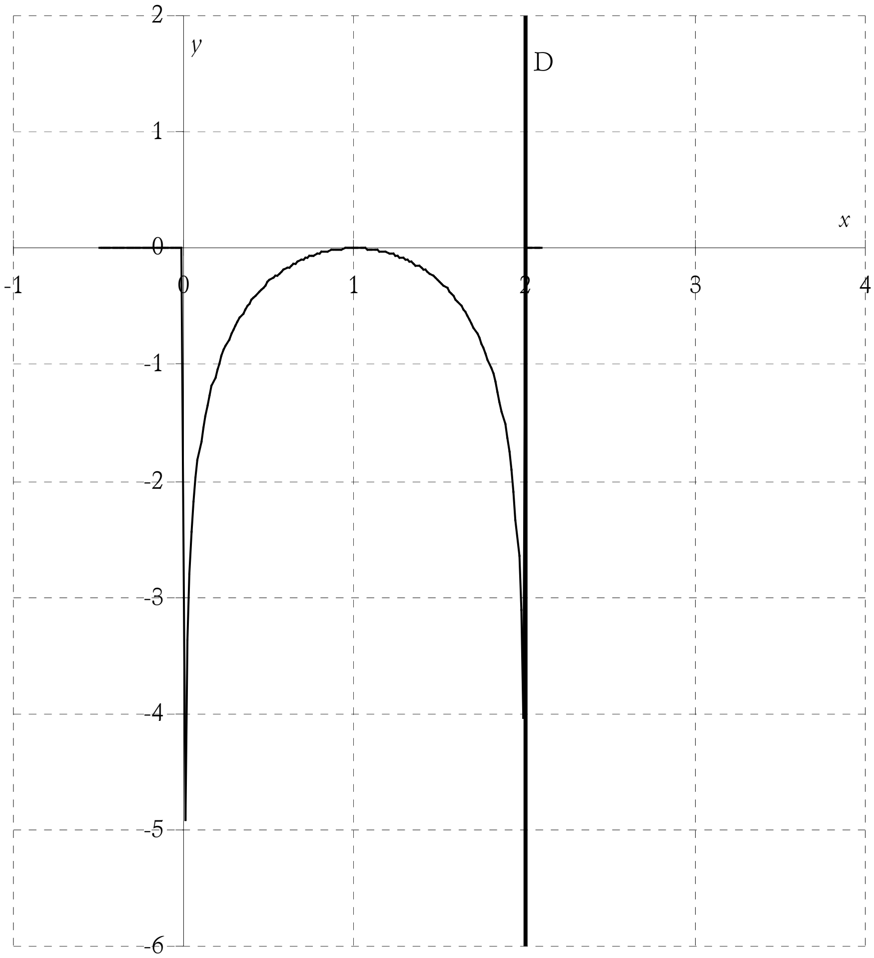
3. Soit Z le nombre complexe tel que $Z = z_M^2$.

a. Calculer z_A^2 puis montrer que $z_M^2 = \left(2\sqrt{2}+2\right)(1+i)$.

b. En déduire un argument de z_M^2 puis un argument de z_M.

PROBLÈME (12 points)

On considère la fonction f définie sur l' intervalle]0 ; 2[, dont la courbe représentative C, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, est la suivante :



La droite D a pour équation $x = 2$.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer f sachant que $f(x)$ est de la forme $\ln(ax^2 + bx)$ où a et b sont des nombres réels non nuls.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx}$.

2. Sachant que la courbe C passe par le point A de coordonnées (1 ; 0) où elle admet une tangente horizontale, déterminer a et b.

PartieB Étude de la fonction f

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2x$ et f la fonction définie sur]0 ; 2 [par $f(x) = \ln g(x)$.

1. a. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0, puis la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

c. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 2, puis la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2.

d. En déduire les équations des asymptotes à la courbe C.

2. Calculer $g'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x+2}{g(x)}$.

3. Étudier le signe de $f(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

Partie C Calcul d'aire

1. Soit F la fonction définie sur]0 ; 2[par $F(x) = x\ln x + (x-2)\ln(2-x) - 2x$.

Montrer que F est une primitive de f sur $]\ 0\ ;\ 2[$.

2. Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x = 1$. En déduire $\lim\limits_{\alpha \to 0} A(\alpha)$, puis son arrondi d'ordre 2.

15. STL France juin 2000 Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 10 cm).

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe $z_n = e^{i\frac{2\pi}{2}} i^n$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. (Par convention, pour $n = 0$, $i^0 = 1$.)

1. Déterrniner la forme algébrique ainsi que le module et un argument de chacun des nombres complexes z_0, z_1, z_2 et z_3.

Placer dans le plan les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

2. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. En déduire que M_{n+1} est l'image de M_n, par une rotation r de centre O. Préciser une mesure de l'angle de cette rotation.

3. a. Exprimer un argument de z_n en fonction de n.

b. Déterminer les entiers naturels n tels que M_n soit confondu avec M_0.

4. Pour tout entier naturel n, on note Q_n, le point d'affixe $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ (par convention, pour $n = 0$, $\left(\frac{i}{2}\right)^0 = 1$).

a. Montrer que pour tout entier naturel n, les points O, M_n, et Q_n sont alignés.

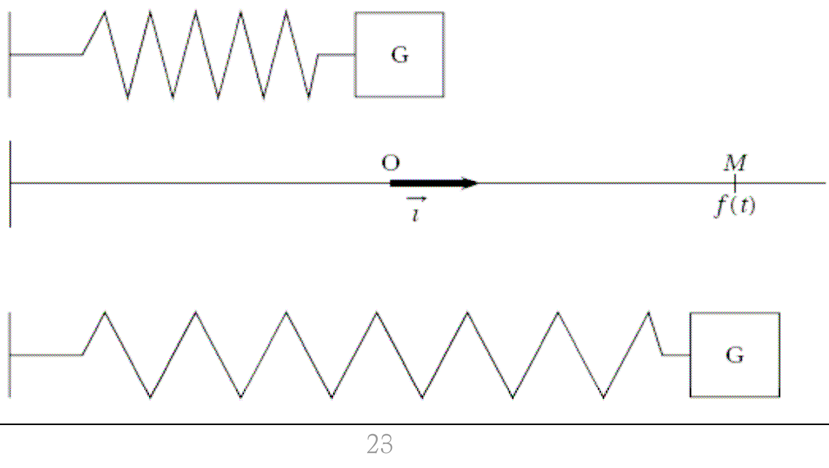
b. Placer les points Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3 dans le plan.

EXERCICE 2 (4 points)

Les unités physiques utilisées sont le mètre (m) et le kilogramme (kg). Un mobile de masse 16 kg, guidé rectilignement sur un banc à coussin d'air, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 1$.

Si l'on écarte le centre d'inertie G du solide de sa position d'équilibre O, alors G effectue des oscillations autour de celle-ci.

À l'instant t, la position de G est repérée par le point M d'abscisse $f(t)$ dans le repère $(O\,;\vec{i})$.



On admettra que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $16y'' + y = 0$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le mobile est au point d'abscisse $f(0) = 0{,}5$ m et a une vitesse égale à $f'(0) = 0{,}125$ m.s^{-1}.

Montrer que la fonction f est définie par $f(t) = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{t}{4} + \sin\frac{t}{4}\right]$.

c. Vérifier que, pour tout réel t : $f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{t-\pi}{4}\right)$.

2. Montrer que pour tout réel t, on a : $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. a. Donner la valeur positive t_0 de t pour laquelle le point M se trouve pour la première fois en O.

b. Combien de fois le point M se trouve-t-il en O dans l'intervalle de temps [0 ; 35] ?

PROBLÈME (11 points)

Partie A

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = -2\ln x + ax^2 + bx$, où a et b sont deux nombres réels.

On appelle C la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Sachant que la courbe C passe par le point $A\left(1\,;-\frac{13}{2}\right)$ et que le coefficient directeur de la tangente en A est égal à -6, déterminer les valeurs des nombres a et b.

2. Pour la suite du problème, on prendra $f(x) = -2\ln x + \frac{5}{2}x^2 - 9x$.

a. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b. Vérifier que l'on peut écrire : $f(x) = x^2\left(-2\frac{\ln x}{x^2} + \frac{5}{2} - \frac{9}{x}\right)$. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. a. Démontrer que, dans l'intervalle [3 ; 4], l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0.

b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 0,01 de x_0.

3. Déterminer une équation de la droite D tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

4. Tracer dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ la droite D et la courbe C.

Partie C

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x - x$. Expliciter la dérivée g' de la fonction g.

2. Déduire de la question précédente une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. On appelle E la partie du plan située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = 5$ (x_0 est défini à la question B. 2.).

a. Hachurer sur la figure la partie E.

b. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, de la partie E. Calculer A en fonction de x_0 puis calculer une valeur approchée de A en prenant 3,88 comme valeur approchée de x_0.