Annales Baccalauréat

1. SMS, France, juin 2005

EXERCICE (8 points)

Suite à la canicule d'août 2003, le Ministre de la Santé, des Affaires Sociales et des Personnes Handicapées a demandé à l'INSERM de déterminer de façon précise l'ampleur et les causes principales de l'augmentation de la mortalité sur cette période.

Le tableau suivant, extrait du rapport de l'INSERM, précise la répartition des décès par âge et par sexe pendant la période du 1er au 20 août 2003 dans toute la France métropolitaine.

	Femmes	Hommes	Total
Moins de 44 ans	538	1 310	1 848
Entre 45 et 74 ans	3 896	7 345	11 241
Plus de 75 ans	18 018	10 514	28 532
Total	22 452	19 169	41 621

1. Sachant que le nombre de décès pour la même période de l'année 2002 était de 12 946 pour les femmes et de 13 877 pour les hommes, déterminer le pourcentage d'augmentation du nombre de décès pour les femmes puis pour les hommes (*arrondir le résultat à l'entier le plus proche*).

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 0,001 près.

2. On choisit au hasard une personne décédée pendant la période du 1er au 20 août 2003. On considère les événements suivants :

• A : « La personne est une femme » ;

• B : « La personne a plus de 75 ans ».

a. Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.

b. Définir par une phrase l'événement $\overline{B}$ puis calculer sa probabilité.

c. Définir par une phrase l'événement $A \cap \overline{B}$ puis calculer sa probabilité.

d. Calculer la probabilité de l'événement $A \cup \overline{B}$.

3. On choisit au hasard une personne décédée pendant la période du 1er au 20 août 2003 et âgée de plus de 75 ans. Calculer la probabilité pour que cette personne soit un homme.

PROBLÈME (12 points)

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 10] par: $f(t) = -0{,}43t + 1 + 2{,}15\ln(t+1)$.

1. Montrer que la dérivée f' de la fonction f est définie par l'égalité suivante : $f'(t) = \dfrac{-0{,}43t + 1{,}72}{t+1}$.

2. a. Calculer les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(4)$.

b. Etudier le signe de $f'(t)$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 10].

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on arrondira à 10^{-2} près) :

t	0	1	2	3	4	6	8	10
$f(t)$		2,06				2,6		1,86

4. Construire la courbe C représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses ; 5 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

Partie B : Contrôle du taux de lactate dans le sang

Lors d'un exercice physique d'une durée de 10 min, on a mesuré la concentration (en mmol.L^{-1}) de lactate sanguin d'un patient. On suppose que cette concentration au temps t (exprimé en minutes) est $f(t)$ où f est la fonction étudiée à la partie A.

1. a. A quel moment la concentration de lactate est-elle maximum ? Justifier.

b. Quelle est alors cette concentration ?

Les questions suivantes seront traitées graphiquement et l'on fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique.

2. Quel est le taux de lactate au bout de 5 min ?

3. Au bout d'une minute, le taux de lactate est très voisin de 2. Au bout de combien de temps le taux de lactate atteint-il à nouveau cette valeur ?

4. Dans quel intervalle de temps le taux de lactate est-il supérieur à 2,5 ?

2. SMS, Antilles-Guyane, juin 2005

EXERCICE (8 points)

L'apport nutritionnel conseillé en calcium est 900 mg par jour.

Une enquête sur l'apport en calcium quotidien en mg (noté AC) auprès d'une population de 25000 personnes, comprenant 13000 femmes et 12000 hommes, a permis d'établir les résultats suivants :

- 984 hommes et 2132 femmes ont un apport en calcium strictement inférieur à 600 mg.
- 34,1% des hommes et 43,8% des femmes ont un apport en calcium supérieur ou égal à 600 mg et strictement inférieur à 900 mg.

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

	Hommes	Femmes	Total
$0 \le AC < 600$			
$600 \le AC < 900$			
$900 \le AC$			
Total			25000

Dans la suite de l'exercice les résultats seront arrondis à près.

2. On choisit au hasard une personne parmi les 25000 personnes interrogées dans l'enquête précédente.

On considère les événements suivants :

- A : « La personne a un apport en calcium strictement inférieur à 600 mg par jour » ;
- B : « La personne est une femme ».

a. Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.

b. Définir par une phrase chacun des événements $A \cap B$ et $\overline{A}$.

c. Calculer la probabilité de chacun des événements $A \cap B$ et $\overline{A}$.

3. On choisit au hasard une personne dont l'apport en calcium est supérieur ou égal à 600 mg. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

4. On choisit une femme au hasard. Quelle est la probabilité que son apport en calcium soit supérieur ou égal à 600 mg ?

PROBLÈME (12 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;8]$ par $f(t) = -10e^{-0,5t} - 2t + 17$.

1. Calculer $f'(t)$.

2. a. Résoudre l'inéquation $5e^{-0,5t} - 2 > 0$ sur $[0\ ;8]$ (on montrera que cette inéquation est équivalente à $t < 2\ln(2,5)$.)

b. On note a le nombre $2\ln(2,5)$. Donner une valeur approchée de a à 0,01 près.

c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $[0\ ;8]$. On donnera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(8)$, ainsi qu'une valeur approchée de $f(a)$ à 0,01 près.

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on arrondira les valeurs à 0,01 près) :

t	0	1	1,83	3	4	5	7	8
$f(t)$		8,93			7,65		2,70	

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal tel que :

- 1 cm représente 0,5 unité sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm représente une unité sur l'axe des ordonnées.

Partie B

On injecte une substance dans le sang d'un individu. On considère que $f(t)$, où f est la fonction définie à la partie A, représente une bonne approximation du taux de la substance (exprimé en mg.L^{-1}) présente dans le sang en fonction du temps t (exprimé en heures).

On donnera des valeurs approchées à 0,1 près, puis on convertira les temps en heures et en minutes.

1. A quel moment le taux est-il maximum ? Que vaut alors ce maximum ?

Dans les questions suivantes, on fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique de la Partie A.

2. Déterminer graphiquement le moment où le taux vaut la moitié de la valeur maximale.

3. Déterminer graphiquement la durée pendant laquelle le taux est supérieur à 8 mg.L^{-1}.

3. SMS, La Réunion, juin 2005

EXERCICE (8 points)

Une enquête de la DREES réalisée en 2002 auprès de 922 médecins généralistes libéraux a permis de recueillir des informations sur 50 000 consultations et visites. Il apparaît que :

- 55% des consultations concernent des femmes.
- 6 fois sur 10, le patient a plus de 45 ans.
- Dans 28% des cas, les patients ont plus de 70 ans et parmi ces derniers, il y a 4/7-ièmes de femmes.

• 11% des cas concernent les 0-12 ans et 2 cas sur 10 concernent les 0-24 ans.

• 3000 consultations et visites ont été faites par des filles âgées de 0 à 12 ans.

• 2000 consultations et visites ont été faites par des filles âgées de 13 à 24 ans.

• Il y a autant d'hommes que de femmes dans la tranche d'âge 25-44 ans.

1. Justifier la phrase : « 6% des consultations et visites concernent des filles âgées de 0 à 12 ans. »

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la répartition des consultations et visites, selon le sexe et l'âge.

	Femmes	Hommes	Total des patients
0 -12 ans	3000		
13 - 24 ans			
25 - 44 ans			
45 - 69 ans	9500		
70 ans ou plus			14000
Total			50000

Dans les questions 3 et 4, on donnera les résultats sous forme décimale à 0,01 près.

3. On choisit au hasard un patient parmi les 50000 et on considère les événements suivants :

- A : « Le patient choisi est une femme » ;
- B : « Le patient choisi est âgé de plus de 70 ans » ;
- C : « Le patient choisi est une femme ou a plus de 70 ans ».

a. Calculer la probabilité $P(A)$ de l'événement A puis la probabilité $P(B)$ de l'événement B.

b. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.

c. Calculer la probabilité de l'événement C.

4. Sachant que le patient choisi est une femme, quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 70 ans ?

PROBLÈME (12 points)

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $f(t) = 3000e^{-\frac{t}{11}}$

1. Calculer $f'(t)$.

2. Etudier le signe de $f'(t)$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 30]. On y reportera les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(30)$.

4. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant les valeurs à la dizaine près :

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$			1 210		490		

5. Sur la feuille de papier millimétré fournie, tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques

• en abscisse, 1 cm pour 2 unités ; • en ordonnée, 1 cm pour 200 unités.

Partie B : Application

En médecine nucléaire, le traitement par l'iode 131 est particulièrement efficace dans certaines maladies de la thyroïde.

On injecte, au temps $t = 0$, un échantillon d'iode 131 dans le corps d'un patient.

On admet que la fonction f, définie et étudiée dans la partie A, donne une bonne approximation de l'activité du radio nucléide iode 131, en fonction du temps t, exprimé en jours.

L'activité est exprimée en Becquerel (Bq).

1. Donner l'activité initiale de l'iode 131.

2. Calculer l'activité de l'iode 131 au bout de 22 jours. On donnera la réponse à 1 Bq près.

3. La période, notée T, d'un nucléide radioactif est le temps au bout duquel son activité a diminué de moitié.

a. En utilisant le graphique de la partie A, donner une valeur approchée, à 0,1 jours près, de la période T de l'iode 131 (on laissera apparents les traits de constructions utiles).

b. Résoudre algébriquement l'équation $f(t) = 1500$ et retrouver le résultat obtenu à la question précédente.

4. SMS, Polynésie, juin 2005

EXERCICE (8 points)

Le tableau suivant donne l'évolution du montant du salaire minimum interprofessionnel de croissance (SMIC) horaire brut en euros (Source INSEE).

Année		2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année	x_i	0	1	2	3	4
SMIC	y_i	6,41	6,67	6,82	7,19	7,61

1. Calculer le pourcentage d'augmentation du SMIC horaire brut entre 2000 et 2004. On arrondira le résultat à 1 %.

2. Construire le nuage de points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal.

L'axe des abscisses sera gradué à partir de 0 et on prendra 2 cm par rang d'année. L'axe des ordonnées sera gradué à partir de 6 et on prendra 1 cm pour 0,10 euro.

3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

4. On admet que la droite (d) d'équation $y = 0{,}29x + 6{,}36$ permet un ajustement affine satisfaisant du nuage sur la période considérée et permet de prévoir l'évolution du SMIC pour les trois années à venir.

a. Tracer la droite (d) dans le même repère que le nuage, et placer le point G.

b. Vérifier par le calcul, que le point G appartient à la droite (d).

5. a. Déterminer, par le calcul, le montant du SMIC horaire brut que l'on peut prévoir en 2005.

b. Faire apparaître sur le graphique les traits de construction qui permettent de retrouver les résultats du 5. a.

6. Vérifier graphiquement qu'à partir de 2006, le SMIC horaire brut dépassera 8 euros (on fera apparaître les constructions utiles).

PROBLÈME (12 points)

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 340] par : $f(x) = 50e^{0,004x} + 10$.

1. a. Soit $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 340].

b. Déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 340]. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(340)$.

2. Reproduire et compléter le tableau de valeurs numériques suivant en arrondissant les valeurs à l'unité.

x	0	40	80	120	170	230	290	340
$f(x)$	91	169						

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On prendra pour unités graphiques : 1 cm en abscisse pour 20 unités, 1 cm en ordonnée pour 10 unités.

Partie B : Application

Dans cette partie nous allons étudier le lien qui existe entre la puissance d'un effort fourni et la fréquence cardiaque d'un individu. On admet que la fréquence cardiaque d'une sportive en fonction de la puissance de l'effort qu'elle fournit est donnée par la fonction f de la **partie A.** x est la puissance de l'effort fourni exprimée enWatts (unité W), $f(x)$ est le nombre de battements du coeur par minute.

Pour les résolutions graphiques ci-dessous on fera apparaître sur le graphique les traits de construction utiles.

1. a. Déterminer graphiquement la fréquence cardiaque de celte sportive si elle exerce un effort d'une puissance de 200 W.

b. Vérifier ce résultat par le calcul. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.

2. a. Déterminer graphiquement la puissance que doit fournir la sportive pour que sa fréquence cardiaque dépasse 180 battements par minute.

b. Retrouver ce résultat par le calcul. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.

5. SMS, France, septembre 2005

EXERCICE (8 points)

Une enquête sur le niveau de recrutement des secrétaires médicales ou médico-sociales a été réalisée à l'aide d'un questionnaire auprès de 732 d'entre elles.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous à l'aide des informations suivantes (on arrondira les réponses à l'entier le plus proche) :

- Parmi les secrétaires recrutées, 85% ont le niveau baccalauréat et 7% le niveau BTS.
- Le secteur médical emploie 93,3% des secrétaires recrutées.
- Le secteur médico-social quant à lui, recrute trois fois plus de secrétaires au niveau CAP-BEP qu'au niveau BTS.

Niveau	Secteur médical	Secteur médico-social	TOTAL
Baccalauréat	17		
BTS			
CAP / BEP			
TOTAL			732

2. Calculer le pourcentage de secrétaires recrutées au niveau CAP/BEP (donner la réponse à 1% près).

Dans les questions suivantes, on arrondira les réponses à 0,01 près.

3. On choisit au hasard une secrétaire ayant répondu au questionnaire. On considère les événements suivants :

A : « La secrétaire a le niveau Baccalauréat » ;

B : « La secrétaire a été recrutée dans le secteur médico-social ».

a. Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.

b. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.

c. Définir par une phrase l'événement $A \cup B$, puis calculer sa probabilité.

4. Parmi les secrétaires ayant répondu au questionnaire, il y en a 232 exerçant dans le secteur médical et 5 dans le secteur médico-social qui ont le niveau du Bac SMS.

a. On choisit au hasard une secrétaire ayant répondu au questionnaire. Calculer la probabilité qu'elle ait le niveau du Bac SMS.

b. On choisit au hasard une secrétaire recrutée dans le secteur médical. Calculer la probabilité qu'elle ait le niveau du Bac SMS.

PROBLÈME (12 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ;7] par $f(t) = (300 - 10t)e^{-0,5t}$.

1. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t) = (5t - 160)e^{-0,5t}$.

2. a. Préciser le signe de $5t - 160$ sur l'intervalle [0 ;7].

b. Etudier le signe de $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle [0 ;7].

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Le compléter par les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(7)$.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (*on arrondira les valeurs de f(t) à l'entier le plus proche*) :

t	0	0,5	1	2	3	4	5	7
$f(t)$			176				21	

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une unité en abscisse ; 1 cm pour 20 unités en ordonnée.

Partie B

Afin d'éviter toute contamination, un matériel chirurgical a été chauffé dans une étuve. On constate que sa température de refroidissement (en degrés Celsius) en fonction du temps t (exprimé en minutes) est donnée par la fonction f étudiée dans la partie A.

1. Préciser la température du matériel à la sortie de l'étuve. Dans les questions suivantes on devra indiquer sur le dessin de la Partie A les traits de construction utiles. On exprimera les temps en minutes et en secondes.

2. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la température a baissé de moitié.

3. Déterminer graphiquement durant combien de temps la température reste supérieure ou égale à 100° C.

6. SMS, Antilles-Guyane, septembre 2005

EXERCICE (8 points)

A la rentrée 2003, les écoles primaires d'une ville de l'agglomération parisienne ont effectué un bilan de santé auprès de leurs 1 300 élèves. Une partie de ce bilan de santé avait pour objectif de diagnostiquer les enfants atteints d'asthme et de détecter ceux qui présentaient des symptômes asthmatiques.

- Parmi les 600 filles de ces écoles, 4,5% étaient asthmatiques.
- De plus, 5% des filles et 7% des garçons présentaient des symptômes asthmatiques.
- Enfin, 88% des élèves ne présentaient aucun trouble en rapport avec cette maladie.

1. Reproduire et remplir le tableau d'effectifs suivant :

	Filles	Garçons	Total
Asthmatiques			
Symptômes asthmatiques			
Aucun trouble			
Total			1 300

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 0,01 près.

2. On choisit au hasard un élève parmi les 1300 élèves des écoles primaires et on considère les événements suivants :

A : « L'élève est un garçon » ;

B : « L'élève est asthmatique » ;

C : « L'élève présente des symptômes asthmatiques ».

a. Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.

b. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer sa probabilité.

c. En déduire la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

d. Définir par une phrase l'évènement $A \cup C$ et calculer sa probabilité

e. On considère l'évènement : « L'élève est une fille qui présente des symptômes asthmatiques ».

Écrire cet évènement à l'aide des événements A, B ou C puis calculer sa probabilité.

3. On choisit au hasard un élève atteint d'asthme. Quelle est la probabilité que cet élève soit un garçon ?

PROBLÈME (12 points)

Partie A : Etude et représentation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur [0 ;120] par : $f(t) = 4,4 + 0,12te^{-\frac{1}{60}t}$.

On appelle C la courbe représentative de f.

1. a. Calculer la dérivée $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = 0,002(60-t)e^{-\frac{1}{60}t}$.

b. Résoudre $f'(t) = 0$.

c. Étudier le signe de $f'(t)$ sur [0 ;120]. En déduire le tableau de variation de f.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

t	0	10	20	40	60	80	100	120
$f(t)$		5,42		6,86			6,67	

3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4. En prenant en abscisses 1 cm pour 10 unités et en ordonnées 2 cm pour une unité, construire la droite T puis la courbe C.

Partie B : Utilisation du graphique

Pour étudier le bilan hépatique du glucose, on réalise chez un chien une expérience de laboratoire. Celui-ci reçoit, pendant 2 heures, une perfusion de 235 mg de glucose par minute. On mesure alors l'évolution de la glycémie dans le sang de l'artère hépatique.

On admet que l'évolution de la glycémie (exprimée en mmol.L^{-1}) en fonction du temps écoulé (exprimé en minutes) à partir du début de la perfusion est représentée par la fonction : $f(t) = 4,4 + 0,12te^{-\frac{1}{60}t}$.

1. Au bout de combien de temps la glycémie est-elle maximale ? Quelle est alors cette glycémie ?

Répondre aux questions suivantes après avoir indiqué sur le graphique les constructions utiles.

2. Quelle est la glycémie au bout de 45 minutes ?

3. a. Soit G_0 la valeur initiale de la glycémie, combien faut-il de temps pour que la glycémie atteigne la valeur G_1 supérieure de 50% à la valeur initiale G_0 ?

b. Combien de temps la glycémie reste-t-elle supérieure à la valeur G_1 définie ci-dessus ?

7. SMS, Nouvelle-Calédonie, novembre 2005

EXERCICE (8 points)

Troubles visuels dépistés par l'examen scolaire en 2001-2002

(Source : Direction de la Recherche des Études de l'Évaluation et des Statistiques - DREES)

Un examen visuel est pratiqué sur 8 350 élèves de CM 2. Il révèle que :

• 4%des élèves examinés ont une vision anormale de loin et se savaient myopes lors de l'examen.

• 668 élèves ont une vision anormale de loin et ne se savaient pas myopes.

On admet qu'aucun enfant ne peut êtremyope et avoir une vision normale de loin.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Myopie connue au préalable	Myopie inconnue au préalable	Total
Nombre d'élèves présentant des problèmes visuels de loin			
Nombre d'élèves ne présentant pas de problèmes visuels de loin	0		
Total			8 350

2. On reporte les observations de chaque examen sur une fiche médicale. On choisit au hasard la fiche médicale d'un élève. Il y a équiprobabilité des choix.

On définit les évènements suivants :

V : « sur la fiche médicale, l'élève présente des problèmes visuels de loin ».

M : « sur la fichemédicale, l'élève se savait myope lors de l'examen ».

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

a. Calculer les probabilités des évènements V et M.

b. $\overline{M}$ désigne l'évènement contraire de l'événement M. Le définir par une phrase et calculer sa probabilité.

c. Définir l'évènement $V \cap \overline{M}$ par une phrase. Calculer la probabilité de cet évènement.

3. On choisit la fiche médicale d'un élève dont la vision de loin est anormale. Quelle est la probabilité que cette fiche indique que l'élève savait qu'il était myope ?

PROBLÈME (12 points)

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [1850 ; 2020] par : $f(t) = 250 + 25e^{0,01t-18,5}$.

1. Soit *f'* la fonction dérivée de *f*. Calculer *f'*(*t*), pour tout *t* élément de l'intervalle [1850 ; 2020].

2. a. Montrer que, pour tout élément *t* de l'intervalle [1850 ; 2020], *f'*(*t*) est positif.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1850 ; 2020].

On précisera les valeurs exactes de f (150) et de f (2020).

3. Recopier, puis compléter le tableau de valeurs suivant : (arrondir les résultats à l'entier le plus proche)

t	1850	1900	1950	1970	1990	2005	2020
$f(t)$	318						

4. Le plan estmuni d'un repère orthogonal. Tracer la courbe C représentative de la fonction f sur l'intervalle [1850 ; 2020].

• L'axe des abscisses sera gradué à partir de 1850 et on prendra 1 cm pour 10 unités.

• L'axe des ordonnées sera gradué à partir de 270 et on prendra 1 cm pour 10 unités.

Partie B : Teneur en dioxyde de carbone contenu dans l'atmosphère

Source : Laboratoire CNRS de Glaciologie, Université Joseph Fourier, Grenoble

Une étude statistique a montré que l'évolution de la teneur en dioxyde de carbone (CO_2) contenu dans l'atmosphère, de 1850 à nos jours, exprimée en parties par millions (ppm), peut être modélisée par la formule suivante : $f(t)=250+25e^{0,01t-18,5}$ où t représente l'année et $f(t)$ la teneur en dioxyde de carbone correspondante.

On supposera que ce modèle reste pertinent jusqu'en 2020.

On fera apparaître sur le graphique de la question A.4., les traits de construction utilisés pour répondre aux questions suivantes.Les résultats seront donnés à l'unité.

1. a. Selon ce modèle et d'après le graphique, quelle teneur en dioxyde de carbone (CO_2) peut-on prévoir en 2010 ¿

b. Retrouver ce résultat par le calcul (on donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité).

2. a. Détermminer graphiquement l'année à partir de laquelle la teneur en dioxyde de carbone (CO_2) a dépassé 350 ppm.

b. Retrouver le résultat de la question précédente par le calcul.

8. STL, Polynésie, juin 2005, Biochimie–Génie biologique

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)

On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en fonction du temps. On estime que le nombre de bactéries en milliards par ml est donné, à chaque instant t (exprimé en heures) par la fonction f définie sur [0 ; 24] par $f(t)=(3t+1)e^{-0,15t}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm pour une heure sur l'axe des abscisses et 2 cm pour un milliard par ml sur l'axe des ordonnées).

1. a. Montrer que la dérivée f' de f est telle que $f'(t)=(2,85-0,45t)e^{-0,15t}$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$. Dresser le tableau de variations de f.

2. a. Reproduire et compléter le tableau suivant (les résultats seront donnés à 10^{-2} près).

t	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$f(t)$														

b. Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 0.

c. Tracer T et C dans le repère donné.

3. À l'aide du graphique, et en faisant apparaître les constructions nécessaires, déterminer à une heure près les valeurs de t pour lesquelles il y a 5 milliards de bactéries par ml.

EXERCICE 2 (10 points)

On étudie la croissance d'une population de crustacés planctoniques dans un environnement limité.

On note x le nombre des individus de cette population à l'instant t exprimé en jours.

Les résultats obtenus sont dans le tableau suivant :

t_i (en jours)	0	2	4	6	8	10	12	14
x_i (effectif)	15	59	199	448	631	697	715	719

1. Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ représenter le nuage des huit points de coordonnées $(t_i\,;x_i)$.

On prendra comme unités graphiques 1 cm pour 1 jour en abscisses et 1 cm pour 50 individus en ordonnées. Un ajustement affine de ce nuage parait-il justifié ?

Dans la suite de l'exercice, toutes les valeurs seront arrondies à 10^{-2} près.

2. On pose $y=\ln\left(\dfrac{x}{720-x}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t_i	0	2	4	6	8	10	12	14
y_i	$-3{,}85$							

b. Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des 4 premiers points $M_i(t_i\,;y_i)$ du nuage.

Calculer de même les coordonnées de G_2, point moyen des 4 derniers points du nuage.

c. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2). On suppose que cette droite constitue un ajustement affine convenable du nuage de points $M_i(t_i\,;y_i)$.

3. On admet, dans cette question, que t et y sont reliés par la relation $y=0{,}74t-3{,}91$.

a. Montrer alors que $x=\dfrac{720}{1+e^{-0{,}74t+3{,}91}}$, ce qui détermine x comme fonction de t sur $[0\,;\,+\infty\,[$.

b. Sur le graphique de la question 1. quel phénomène semble apparaître lorsque t devient suffisamment grand ?

c. $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$. Ce résultat théorique est-il cohérent avec la réalité expérimentale ?

9. STL, France, juin 2005, Biochimie–Génie biologique

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

EXERCICE 1 (10 points)

Une épidémie due au virus Ébola sévit dans une région composée de 125 000 habitants.

On estime que 18 750 personnes sont contaminées par ce virus.

Une stratégie de dépistage, à l'aide d'un test biologique est mise en place. On observe les résultats suivants :

* quand la personne est contaminée par le virus Ébola, le test est positif dans 99,6 % des cas.

* quand la personne n'est pas contaminée parce virus, le test est négatif dans 97,6 % des cas.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Nombre de personnes contaminées	Nombre de personnes non contaminées	Total

Test positif			
Test négatif			
Total			125 000

Dans les questions suivantes, les probabilités seront données à 10^{-4} près.

2. On choisit au hasard une personne de cette population, toutes les personnes ayant la même probabilité d'être choisies. On considère les évènements :

A « La personne est contaminée par le virus Ébola »

B « La personne a un test positif ».

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements A et B.

b. Écrire à l'aide d'une phrase l'évènement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.

Écrire à l'aide des évènements A et B l'évènement : « la personne est contaminée par le virus Ébola ou a un test positif» et calculer sa probabilité.

c. Calculer la probabilité p_1 que la personne ait un test positif et ne soit pas contaminée par le virus Ébola.

Calculer la probabilité p_2 que la personne ait un test négatif et soit contaminée par le virus Ébola.

Calculer la probabilité p_3 que le test donne un résultat faux.

3. On choisit maintenant au hasard une personne ayant un test négatif, toutes les personnes ayant la même probabilité d'être choisies. Quelle est la probabilité qu'elle soit contaminée par le virus Ébola ?

EXERCICE 2 (10 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty\ [$ par : $f(x) = \dfrac{3e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$.

C est sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan (unité graphique 5 cm).

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty\ [$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ (on pourra montrer que $f(x) = \dfrac{3 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}$.

3. Donner les valeurs approchées à 10^{-2} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 ; 1,2 et 1,4.

4. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

5. Tracer la courbe C et sa tangente T.

6. Montrer que $f(x) = \dfrac{3e^{3x} - e^{-x}}{e^{3x} + e^{-x}}$.

On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty\ [$ par $F(x) = \ln\left(e^{3x} + e^{-x}\right) + 1$. Expliquer pourquoi F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty\ [$.

10. STL, France, juin 2005, Physique de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée.

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan P est rapporté â un repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4cm.

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$. Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b. Représenter dans le plan P les points A d'affixe $\sqrt{3} - i$ et B d'affixe $\sqrt{3} + i$.

c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

2. On considère l'application R de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z$.

a. Caractériser géométriquement l'application R.

b. Placer le point A' image du point A par R.

c. Calculer sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A'.

d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit l'équation différentielle : $y'' + 10^4\pi^2 y = 0$ où y est une fonction de la variable t et y'' sa derivée seconde.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Le plan est rapporté à un repére orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle telle que :

 * La courbe représentative de f passe par le point A de coordonnées (0 ; 1) ;
 * la tangente à cette courbe en A a pour coefficient directeur -100π.

3. Vérifier que pour tout réel t : $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Déterminer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{50}\right]$.

5. Calculer la valeur efficace de la fonction f sur cet intervalle, c'est-à-dire le nombre réel positif I défini par : $I^2 = 50\int_0^{\frac{1}{50}}[f(t)]^2\,dt$.

PROBLÈME (10 points)

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = 2 - \frac{x-2}{5}e^x$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

c. En déduire l'équation d'une droite D asymptote â la courbe C.

d. Calculer les coordonnées du point d'intersection A de la droite D et de la courbe C.

e. Déterminer la position relative de la courbe C par rapport â la droite D.

2. a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 sur [2 ; 3].

b. Donner un encadrement de x_0 à 10^{-2} près.

5. Tracer sur un même graphique la droite D, la tangente T et la courbe C.

Partie B : Calcul d'aire

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x-3}{5}e^x$.

a. Calculer $g'(x)$.

b. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

b. Calculer l'aire de la partie hachurée. Donner la valeur exacte en cm^2, puis la valeur arrondie à 10^{-2} près.

11. STL, France, juin 2005, Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée.

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 4.

EXERCICE 1 (5 points)

On désigne par i le nombre complexe demodule 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante, en donnant les solutions sous forme algébrique : $z^2 + 3z + 3 = 0$.

2. On considère les nombres complexes : $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

a. Écrire z_1 sous forme trigonométrique.

b. Construire avec précision dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2. On laissera apparents les traits de construction.

3. On appelle D le point d'affixe $z_3 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et K le point d'affixe $z_4 = 1$.

a. Montrer que les points A, B et D appartiennent à un cercle C de centre K.

b. Montrer que le point K est le milieu du segment $[AD]$.

c. Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ placer les points K et D et tracer le cercle C. Déterminer la nature du triangle ABD.

EXERCICE 2 (4 points)

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher, numérotées respectivement 1, 2 et 3.

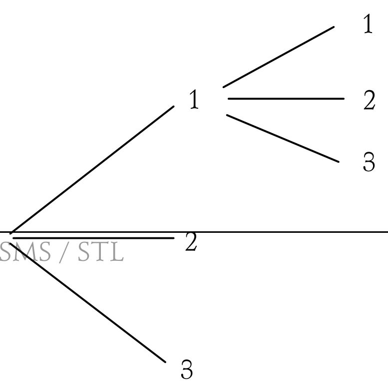
Le jeu proposé est le suivant : on verse d'abord 10 euros, puis on effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise et on obtient ainsi un nombre à trois chiffres en notant dans l'ordre les trois numéros obtenus.

Par exemple, si on tire successivement 2, 3 et 1 on obtient le nombre 231.

Si les trois chiffres sont identiques, on reçoit 25 euros. Si les trois chiffres sont tous différents, on reçoit 15 euros. Si la somme des trois chiffres vaut 7, on reçoit 13 euros.

Dans tous les autres cas, on ne reçoit rien.

1. En s'aidant d'un arbre comme ci-dessous, donner la liste des 27 tirages possibles.



2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaquenombre à trois chiffres obtenu, associe le gain algébrique (c'est-à-dire la différence : somme reçue moins le versement initial).

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

PROBLÈME (11 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln x - 2x^2 - 1$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction g dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (aucune limite n'est demandée).

2. Déduire du 1. que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x - \dfrac{\ln x}{x}$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit D la droite d'équation $y = 1 - 2x$.

a. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En utilisant la partie A déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la droite D et la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie C : Calcul d'une aire

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$.

2. On désigne par A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D, la courbe C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a. Hachurer sur le graphique la partie du plan définie ci-dessus.

b. Calculer la valeur exacte du nombre réel A.