Annales Baccalauréat

1. SMS, France, juin 2004

EXERCICE (8 points)

Au cours d'une enquête auprès de 250 personnes sans domicile fixe fréquentant les centres d'hébergement ou les distributions de repas chauds en janvier 2001, on a relevé que :

- 82 % de ces personnes déclarent avoir une carte de sécurité sociale à leur nom et non périmée ou être inscrites sur la carte d'une autre personne ;
- 6 % ont une carte périmée ou en cours de demande ;
- 11 personnes sont inscrites sur la carte de sécurité sociale d'une autre personne.

D'autre part, parmi ces personnes, certaines bénéficient de la couverture maladie universelle (CMU).

PARTIE A

1. Parmi les 250 personnes ayant participé à l'enquête, 194 ont une carte de sécurité sociale à leur nom et non périmée. Justifier ce nombre par un calcul.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant, en donnant le nombre de personnes de chaque catégorie :

	Bénéficie de la CMU	Ne bénéficie pas de la CMU	Total
A une carte de sécurité sociale à son nom et non périmée	52		
Est inscrit sur la carte d'une autre personne		5	11
A une carte périmée	3		
A une carte de sécurité sociale en cours de demande	4		8
N'a pas de carte de sécurité sociale et n'en n'a pas fait la demande		17	
Total			250

Source : site www.insee.fr

3. Parmi les personnes bénéficiant de la CMU, quel est le pourcentage de celles qui sont inscrites sur la carte d'une autre personne ? *(Le résultat sera donné à 0,1 près)*

PARTIE B

Pour réaliser cette enquête, chaque personne interrogée a complété une fiche de renseignements. Les 250 fiches ont été rassemblées. De l'ensemble de ces fiches, on en tire une au hasard ; chacune a la même probabilité d'être tirée.

On considère les événements suivants :

A : « La fiche est celle d'une personne bénéficiant de la C.M.U » ;

B : « La fiche est celle d'une personne inscrite sur la carte d'une autre personne ».

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme décimale exacte.

1. Écrire les événements suivants à l'aide d'une phrase : $A \cap B$; $A \cup B$.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A ; B ; $A \cap B$.
3. En déduire la probabilité de l'événement $A \cup B$.

PROBLÈME (12 points)

PARTIE A

Cette partie concerne l'étude et la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$ par : $f(x) = \ln(4x+1) - x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = \dfrac{-4x+3}{4x+1}$.

2. a. Résoudre l'équation $f'(x)=0$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$. *(Les valeurs utiles de f(x) seront données sous forme exacte.)*

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant *(arrondir les résultats à* 10^{-2} *près)* :

x	0	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5
$f(x)$		1,60			1,45	1,20	

4. Sur la feuille de papier millimétré fournie, tracer la courbe représentative de la fonction f en prenant pour unité graphique 5 cm pour 1 unité sur les deux axes.

PARTIE B

Dans cette partie, on utilise les résultats précédents pour étudier la glycémie (taux de glucose sanguin) d'une personne observée après ingestion de sirop de glucose.

On suppose que cette glycémie (en g.L^{-1}) en fonction du temps x (en heures) est donnée par

$$f(x) = \ln(4x+1) - x + 1 \text{ où } x \text{ varie dans l'intervalle } \left[0\,;\frac{5}{2}\right].$$

1. Déterminer l'instant (en minutes) auquel la glycémie de cette personne est maximale.

2. Toute modification de la glycémie qui s'écarte de 25% de la valeur moyenne de 1 g.L^{-1} provoque des perturbations plus ou moins graves chez l'homme.

Déterminer l'intervalle dans lequel doit rester la glycémie pour éviter toute perturbation.

3. Une glycémie supérieure à 1,25 $g.L^{-1}$ est appelée hyperglycémie ; une glycémie inférieure à 0,75 $g.L^{-1}$ est appelée hypoglycémie.

a. Déterminer graphiquement le ou les intervalles de temps (en heures) pendant lesquels la personne observée est en hyperglycémie *(faire apparaître les traits de construction utiles)*.

b. Même question pour l'hypoglycémie.

2. SMS, Antilles-Guyane, juin 2004

EXERCICE (8 points)

La Direction Générale de l'Action Sociale du Ministère de la Santé et des Affaires Sociales publie chaque année une synthèse de l'activité des CAT (Centres d'Aide par le Travail) : ces centres sont des établissements médico-sociaux qui accueillent des travailleurs handicapés.

Le tableau suivant présente la répartition des travailleurs handicapés en fonction de leur déficience dans les différentes régions de France (métropole uniquement) pour l'année 1998 :

	Retard mental			Autres déficiences du psychisme	Autres déficiences	TOTAL
	Léger	Moyen	Profond			
ALSACE	504	1 018	408	369	282	2 581
AQUITAINE	1 396	1 688	403	615	937	5 039
AUVERGNE	485	956	355	228	439	2 463
BASSE NORMANDIE	760	1 386	382	335	263	3 126
BOURGOGNE	657	1 277	221	223	250	2 628
BRETAGNE	1 411	1 950	504	499	675	5 039
CENTRE	873	1 528	437	482	444	3 764
CHAMPAGNE ARDENNE	603	968	235	286	235	2 327
FRANCHE COMTE	479	756	223	153	191	1 802
HAUTE NORMANDIE	193	946	198	159	163	1 659
ILE DE FRANCE	2 048	3 605	449	1 808	2 539	10 449
LANGUEDOC ROUSSILLON	747	1 530	599	526	619	4 021
LIMOUSIN	521	603	130	115	275	1 644
LORRAINE	589	1 901	873	400	533	4 296
MIDI PYRENEES	1 222	1 385	367	656	905	4 535
NORD PAS-de-CALAIS	2 573	2 641	911	820	653	7 598
PAYS DE LA LOIRE	896	2 479	589	522	630	5 116
PICARDIE	395	1 683	337	504	484	3 403
POITOU CHARENTES	637	1 189	211	313	398	2 748
PROVENCE ALPES COTE d'AZUR	1 005	1 884	670	1 000	923	5 482
RHONE ALPES	1 213	2 339	1 280	1 140	1 383	7 355
TOTAL	19 207	33 712	9 782	11 153	13 221	87 075

(Source : publication Info-Dgas 73 du Ministère de la Santé disponible sur htp ://www.sante.gouv.fr).

1. *Dans cette question, arrondir les résultats à 1 % près.*

a. Calculer le pourcentage de travailleurs handicapés ayant un retard mental léger parmi tous les travailleurs handicapés de France.

b. Calculer le pourcentage de travailleurs handicapés ayant un retard mental léger parmi tous les travailleurs handicapés du Nord Pas-de-Calais.

Dans toute la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

2. On choisit au hasard un travailleur handicapé en France ; on considère les événements suivants :

A : « Le travailleur handicapé a un retard mental profond » ;

B : « Le travailleur handicapé est dans un CAT d'Ile de France ».

a. Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.

b. Définir par une phrase les événements $\overline{B}$ et $A \cap \overline{B}$.

c. Calculer la probabilité des événements $\overline{B}$ et $A \cap \overline{B}$.

3. On choisit au hasard un travailleur handicapé ayant un retard mental léger. Calculer la probabilité qu'il travaille dans le Nord Pas-de-Calais.

PROBLÈME (12 points)

La partie A est indépendante des parties B et C.

PARTIE A

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = 0,18\ y$ où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la variable réelle t.

2. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie $y(0) = 5/3$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur [10 ; 38] par $f(t) = \frac{5}{3}e^{0,18t}$.

1. a. Calculer $f'(t)$.

b. Etudier le signe de $f'(t)$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur [10 ; 38]. On y indiquera les valeurs exactes de $f(10)$ et $f(38)$.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à la dizaine près.

t	10	20	25	30	32	35	38
$f(t)$			150			910	

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques :

* en abscisse : 1 cm pour 5 unités ;

* en ordonnée : 1 cm pour 100 unités.

PARTIE C

Au début de la croissance d'une espèce donnée de coton, on estime que la masse exprimée en grammes, de la plante est donnée en fonction du temps t, exprimé en jours, par la formule :

$$f(t) = \frac{5}{3}e^{0,18t} \text{ où } t \text{ varie de 10 à 38 .}$$

1. En utilisant le graphique de la partie B, déterminer le jour où la masse est de 250 g. On laissera apparentes les constructions utiles.

2. Pour retrouver ce résultat par le calcul, il faut résoudre une équation.

a. Écrire cette équation.

b. Résoudre cette équation.

3. SMS, La Réunion, juin 2004

EXERCICE (9 points)

L'objectif de l'exercice est d'exploiter les données statistiques fournies par le diagramme circulaire et l'histogramme de l'annexe, auxquels on se référera pour répondre aux questions posées.

1. Depuis le 1er janvier 2002, date de la mise en place de l'Allocation Personnalisée d'Autonomie dans le département de l'Aude, la commission d'attribution a statué sur 10 400 dossiers de demande. Fin août 2003, 5 900 personnes bénéficiaient de l'APA.

En utilisant le diagramme circulaire de l'annexe, calculer le nombre de personnes bénéficiant de l'APA à leur domicile puis le nombre de personnes bénéficiant de l'APA en établissement.

2. Sur l'histogramme de l'annexe les résultats sont des nombres entiers. En utilisant cet histogramme, reproduire et compléter le tableau suivant :

Tranches d'âges	[60 ; 75[	[75 ; 85[	[85 ; 95[	[95 ; 100[	Total
Bénéficiaires à domicile (en %)	17				100
Bénéficiaires en établissement (en %)	12				100

3. *Dans cette question, arrondir les résultats à l'unité près.*

a. Calculer le nombre de personnes âgées de 75 à 85 ans qui bénéficient de l'APA à leur domicile.

b. Quel est le nombre total de personnes de la tranche d'âge [75 ; 85[qui bénéficient de l'APA ?

c. Après avoir effectué les calculs nécessaires, reproduire et compléter le tableau suivant :

Tranches d'âges	[60 ; 75[	[75 ; 85[	[85 ; 95[	[95 ; 100[	Total
Nombre de bénéficiaires à domicile			1 322		
Nombre de bénéficiaires en établissement				149	
Total					5 900

4. Sur le document accompagnant cette étude statistique, on peut lire : « Si l'APA est accessible à partir de 60 ans, ce sont majoritairement les personnes de plus de 75 ans qui en bénéficient. En effet, plus de 85% des allocataires ont dépassé cet âge ».

Ces deux affirmations sont-t-elles exactes ? (justifier par le calcul).

5. On choisit au hasard une personne bénéficiant de l'APA. On note E et F les événements suivants :

E : « la personne est dans la tranche d'âge [85 ; 95[» ;

F : « la personne bénéficie de l'APA à domicile ».

Dans cette question, arrondir les résultats à 0,01 près.

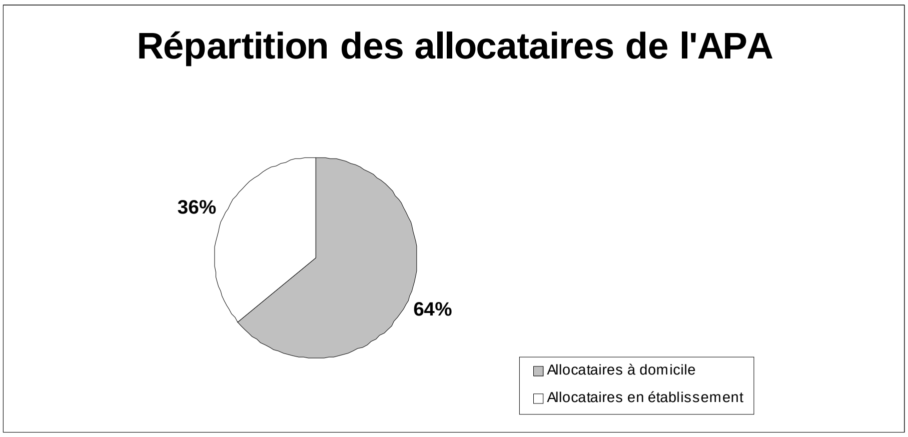
a. Calculer la probabilité de chaque événement E et F.

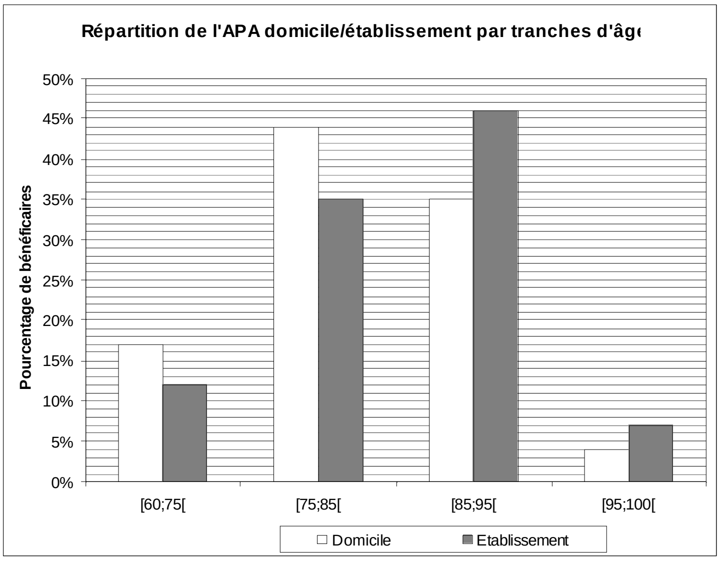
b. Définir par une phrase chacun des événements : $E \cup F$ et $E \cap F$.

c. Calculer la probabilité $P(E \cap F)$ et en déduire la probabilité $P(E \cup F)$.

ANNEXE

L'Allocation Personnalisée d'Autonomie dans le département de l'Aude en 2003





Source : *Supplément de PERSPECTIVES n° 114 édité par le Conseil Général de l'Aude*.

PROBLÈME (11 points)

PARTIE A : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 120]$ par $f(t) = 10^5\, e^{-0,05t}$.

1. a. Vérifier que $f'(t) = -5.10^3\, e^{-0,05t}$.

b. Etudier le signe de $f'(t)$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f dans lequel seront notées les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(120)$.

2. Reproduire et compléter le tableau des valeurs suivants (*les résultats seront donnés à la dizaine près*) :

t	0	15	30	45	60	75	90	120
$f(t)$		47 240	22 310		4 980			250

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal avec pour unités :

 * 1 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses ;

 * 2 cm pour 10^4 unités sur l'axe des ordonnées.

Tracer soigneusement sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

PARTIE B : APPLICATION

La destruction de cellules bactériennes par la chaleur peut-être mise en évidence en chauffant à une température donnée, pendant des durées variables, une suspension de telles cellules et en dénombrant les survivants.

On admet que $f(t)$ est une approximation convenable du nombre de survivants à l'instant t (t exprimé en minutes).

1. a. Quel est le nombre de bactéries à l'instant initial ?

b. Quel est le nombre de survivants au bout de 2 heures de chauffage ?

c. Peut-on dire qu'au bout d'une heure le nombre de bactéries a été divisé par 20 ?

2. a. Déterminer graphiquement, en laissant apparentes les constructions utiles, le temps nécessaire pour que le nombre de survivants soit égal à 10^4.

b. Retrouver par le calcul la réponse à la question précédente (2. a) (*le résultat sera arrondi à l'unité près*).

4. SMS, Polynésie, juin 2004

EXERCICE 1 (8 points)

Dans le cas de certaines maladies, les vétérinaires calculent la posologie des médicaments en fonction de l'aire de la surface corporelle de l'animal. Le tableau suivant donne, chez les chiens, l'aire de la surface corporelle en mètres carrés en fonction du poids en kilogrammes.

Poids x_i en kg	4	8	12	16	20	24	28	30	32	36
Aire y_i en m^2	0,25	0,40	0,50	0,64	0,74	0,84	0,93	0,98	1,02	1,10

1. Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points de coordonnées (x_i ; y_i) associé â cette série statistique ; on prendra pour unités graphiques :

1 cm pour 2 kg sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1m^2 sur l'axe des ordonnées.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer le point G sur le graphique.

3. Soit (D) la droite d'équation $y = 0{,}026x + 0{,}194$.

a. Consruire (D) sur le graphique précédent.

b. Vérifier par le calcul que G appartient à (D).

4. On admet que la droite (D) constitue un bon ajustement affine du nuage de points.

a. Calculer l'aire de la surface corporelle d'un chien de 18 kg. Arrondir le résultat à 10^{-2} près.

b. Déterminer par le calcul un encadrement de l'aire de la surface corporelle d'un chien dont le poids est compris entre 25 et 30 kg.

c. Retrouver graphiquement les résultats des deux questions précédentes. Faire apparaître les tracés de construction utiles.

PROBLÈME (12 points)

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $f(t) = 2e^{0,7t}$.

1. a. Calculer $f'(t)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4].

b. Déterminer le signe de f' sur l'intervalle [0 ; 4].

c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f en précisant les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(4)$.

2. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs à 10^{-1} près.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(t)$							16,3	23,2	

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 unités sur l'axe des ordonnées.

Partie B: prolifération de bactéries

On étudie une culture de bactéries en milieu liquide agité. f étant la fonction étudiée dans la partie A., on considère que $f(t)$ donne le nombre de milliers de bactéries à l'instant t (t est exprimé en heures).

On admet que $f'(t)$ est alors la vitesse de prolifération des bactéries à l'instant t ; cette vitesse est exprimée en nombre de milliers de bactéries par heure.

1. Donner le nombre de milliers de bactéries à l'instant $t = 0$.

2. Par lecture graphique, en faisant apparaître les constructions utiles, déterminer :

a. le nombre de milliers de bactéries au bout de 2 heures 15 minutes ;

b. le temps en heures et minutes au bout duquel il y a au moins 16 milliers de bactéries.

3. Calculer et arrondir à 10^{-1} près :

a. le nombre de milliers de bactéries au bout de 15 minutes ;

b. la vitesse de prolifération au bout de 2 heures.

4. Déterminer par le calcul au bout de combien de temps, exprimé en heures et arrondi à 10^{-1} près, le nombre initial de bactéries aura été multiplié par dix.

5. SMS, Nouvelle Calédonie, juin 2004

EXERCICE (8 points)

Avant de partir en vacances, une personne entreprend un régime afin de perdre du poids, en suivant les conseils d'un nutritionniste. Elle se pèse régulièrement à la fin de chaque semaine de régime, le même jour, à la même heure. Elle note l'évolution de son poids dans un tableau :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Poids y_i (en kg)	63	62,6	61,4	61	61,2	60,6	60,4	59,8

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal. On prendra : 1,5 cm pour 1 semaine en abscisse ; 5 cm pour 1 kilog en ordonnée. De plus on graduera l'axe des ordonnées à partir de 59.

2. Calculer les coordonnées du points moyen G du nuage et le placer sur le graphique précédent.

3. Soit (D) une droite d'équation $y = -0{,}42x + p$. Déterminer le nombre p sachant que (D) passe par G.

4. On admet que cette droite constitue un bon ajustement affine du nuage de points pendant 10 semaines.

a. Construire cette droite sur le graphique.

b. La personne voudrait atteindre le poids de 59 kg. Si son régime dure 9 semaines, selon les conditions ci-dessus, aura-t-elle atteint son objectif ? (Justifier votre réponse à l'aide du graphique).

c. Retrouver le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $-0,42x+63,14 \leq 59$.

PROBLÈME (12 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur [40 ; 80] par $f(x) = 1 + 2\ln(0,04x)$.

1. a. f' représentant la fonction dérivée de f, vérifier que $f'(x) = \frac{2}{x}$.

b. Donner le signe de f' sur l'intervalle [40 ; 80].

c. Dresser le tableau des variations de f sur ce même intervalle. Donner les valeurs exactes de $f(40)$ et $f(80)$ puis des valeurs arrondies à 0,01 près.

2. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant les résultats à 0,01 près.

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques : en abscisse : 2 cm pour 5 unités ; en ordonnée : 10 cm pour 1 unité.

Graduer l'axe des abscisses à partir de 40 et l'axe des ordonnées à partir de 1.

PARTIE B

Une infirmière libérale parcourt chaque jour entre 40 et 80 kilomètres. Elle calcule le montant de ses frais de déplacement.

Soit g la fonction définie par $g(x) = 20f(x)$ où f est la fonction étudiée précédemment. On admet que $g(x)$ représente alors le montant des frais de déplacement exprimé en euros en fonction du nombre de kilomètres parcourus par jour.

1. Déterminer le montant des frais de déplacement pour 40 kilomètres parcourus.

2. a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$. Faire apparaître les points de construction utiles.

b. En déduire à partir de combien de kilomètres ces frais de déplacement s'élèveront au moins à 60 euros.

3. Résoudre par le calcul l'inéquation $1 + 2\ln(0,04x) \geq 3$ et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

6. SMS, France, septembre 2004

EXERCICE (8 points)

Un Centre Communal d'Action Sociale gère un fichier de 450 enfants (filles et garçons) de moins de 10 ans qui participent chaque mercredi après-midi, dans différents sites, à l'une des catégories d'activités suivantes :

- Activités de plein air ;
- Activités culturelles ;
- Activités manuelles.

Les inscriptions se font chaque trimestre et une seule catégorie d'activités est permise.

Pour le premier trimestre de l'année 2003-2004 on observe que :

- 60% des enfants sont inscrits pour les activités de plein air et 30% sont inscrits pour les activités manuelles ;
- Pour les activités de plein air, il y a autant de filles que de garçons inscrits ;
- 56% des enfants inscrits sont des garçons ;
- 20% des enfants inscrits pour les activités culturelles sont des filles.

1. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la répartition des fiches d'inscription pour le premier trimestre de l'année 2003-2004 :

	Activités de plein air	Activités culturelles	Activités manuelles	Total
Garçons				
Filles				
Total				450

(*Dans les questions suivantes les résultats seront donnés sous forme décimale exacte*).

2. On tire au hasard une des 450 fiches d'inscription et on considère les événements suivants :

A : « La fiche tirée est celle d'un enfant ayant choisi les activités manuelles »,

B : « La fiche tirée est celle d'une fille ».

a. Écrire chaque événement suivant à l'aide d'une phrase : $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$.

b. Calculer la probabilité de chaque événement : A, B, $A \cap B$.

c. Déduire des résultats de la question précédente la probabilité de l'événement $A \cup B$.

3. On tire maintenant au hasard une des fiches d'un enfant pratiquant une activité manuelle. Quelle est la probabilité que ce soit celle d'une fille ?

PROBLÈME (12 points)

PARTIE A – ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\,;40]$, par $f(x) = 500\left(1 - e^{-0,2x}\right)$ et on note C la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal du plan.

1. a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son intervalle de définition (*les valeurs utiles de f(x) seront données sous forme exacte*).

2. Recopier et compléter le tableau suivant (*les résultats seront arrondis à l'unité*) :

x	0	1	2	5	10	15	20	30	40
$f(x)$		91			432		491	499	500

3. Tracer la courbe C en prenant pour unités graphiques :

– 0,5 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses ;
– 1 cm pour 50 unités sur l'axe des ordonnées.

4. On veut résoudre l'équation $f(x) = 375$.

a. Résoudre cette équation en utilisant la courbe C (faire apparaître les constructions utiles sur le graphique).

b. Résoudre cette équation par le calcul.

PARTIE B – APPLICATION

Lors de l'étude de la progression d'une épidémie de grippe sur une population de 1500 personnes, on a établi que le nombre d'individus ayant été contaminés depuis le début de l'épidémie est donné, à la date t, exprimée en jours, par $f(t) = 500\left(1 - e^{-0,2t}\right)$ pour t compris entre 0 et 20.

(*Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis à 1 unité près*)

1. Combien de personnes ont-elles été contaminées après 1 jour d'épidémie ? après 5 jours ?

2. De quel pourcentage a augmenté le nombre de personnes contaminées entre le premier et le cinquième jour de l'épidémie ?

3. Quel pourcentage de la population étudiée a-t-il été contaminé au bout de 10 jours d'épidémie ?

4. Au bout de combien de jours d'épidémie le quart de la population est-il contaminé ?

7. SMS, Antilles Guyane, septembre 2004

EXERCICE (8 points)

Une étude dans un centre médico-social a porté sur un échantillon de 308 cas d'hospitalisation pour ingestion de produits toxiques chez l'enfant de 0 à 5 ans.

Pour cet échantillon, on a les informations suivantes :

- 180 enfants sont des garçons ;
- 37,5 % des filles sont âgées de 3 à 5 ans ;
- parmi les enfants de 3 à 5 ans, un tiers sont des filles ;
- 25% des enfants de l'échantillon sont des filles de 1 à 3 ans ;
- parmi les enfants de 0 à 12 mois, il y a autant de filles que de garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Age	Garçons	Filles	Total
0 à 12 mois			
1 à 3 ans			
3 à 5 ans			
Total			308

2. Les 308 enfants de l'échantillon ont été détectés parmi les 4 912 enfants de 0 à 5 ans qui ont été reçus au centre médico-social pour diverses affections.

Déterminer pour ce centre médico-social le pourcentage de cas d'intoxications par ingestion de produits toxiques chez les enfants de 0 à 5 ans (on donnera ce résultat sous forme décimale arrondie au dixième près).

Dans les questions suivantes les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-2} près.

3. On choisit au hasard un des 308 enfants de l'échantillon étudié. Chaque enfant a la même probabilité d'être choisi.

a. On note A l'événement suivant : « l'enfant choisi est une fille ». Calculer la probabilité de l'événement A.

b. On note B l'évènement suivant : « l'enfant choisi a entre 3 et 5 ans ». Calculer la probabilité de l'événement B.

c. Traduire par une phrase l'évènement $A \cup B$ et calculer sa probabilité.

d. Traduire par une phrase l'évènement $\overline{A} \cap B$ et calculer sa probabilité.

4. On choisit au hasard un enfant de moins de 3 ans parmi les 308 enfants de l'échantillon étudié. Calculer la probabilité que cet enfant de moins de 3 ans soit une fille.

PROBLÈME (12 points)

PARTIE A – ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $f(t) = 8te^{-\frac{1}{2}t} + 2$.

1. Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(2)$, $f(10)$.

2. Calculer $f'(t)$ et vérifier que : $f'(t) = 4(2-t)e^{-\frac{1}{2}t}$.

3. Résoudre l'équation $f'(t) = 0$.

4. Etudier le signe de $f'(t)$ sur [0 ; 10].

5. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

6. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (*arrondir les résultats à 0,1 près*).

t	0	0,5	1	1,5	2	3	4	6	8	10
$f(t)$		5,1		7,7		7,4	6,3		3,2	

7. On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm. Tracer la courbe (C) sur la feuille de papier millimétré fournie.

PARTIE B – APPLICATION

L'ADH est une hormone d'origine hypothalamique intervenant dans la régulation de l'eau dans l'organisme.

Lors d'une hémorragie accidentelle chez l'homme, on a enregistré le taux d'ADH présent dans le sang. On admet que ce taux d'ADH (en μ g/ml) en fonction du temps t (en minutes) écoulé après l'hémorragie est donné par : $f(t) = 8te^{-\frac{1}{2}t} + 2$.

1. Calculer le taux d'ADH présent dans le sang cinq minutes après l'hémorragie.

2. Au bout de combien de minutes le taux est-il maximal ? Quel est ce taux ?

3. Pendant combien de temps (en minutes, secondes) le taux d'ADH est-il supérieur à 6 μ g/ml ? On utilisera la représentation graphique et on fera apparaître les tracés utiles.

8. STL, France, septembre 2004, Biochimie–Génie biologique

EXERCICE 1 (8 points)

Afin de mettre en évidence le réchauffement de l'atmosphère (effet de serre), on amesuré la température moyenne annuelle de la planète.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la température (en degrés Celsius) depuis 1974.

Année : x_i	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
Température : y_i (en °C)	19,12	19,70	19,62	20	20,60	20,88	20,92

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal. On prendra pour origine le point (1970 ; 19) et comme unités graphiques : 1 cm pour 2 ans sur l'axe des abscisses ; 5 cm pour 1 degré sur l'axe des ordonnées. Peut-on envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

2. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et par G_2 le point moyen des quatre derniers.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

b. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).

On considère que cette droite réalise un bon ajustement du nuage.

3. Si la tendance se confirme, déterminer

a. la température que l'on peut prévoir en 2005, à l'aide d'une lecture graphique ;

b. par le calcul, en quelle année la température aura dépassé 22 °C.

EXERCICE 2 (12 points)

La désintégration radioactive du Zirconium 95 se fait en deux étapes : formation de Niobium (Nb) puis transformation qui conduit à un isotope stable. On s'intéresse à l'évolution du ^{95}Nb en fonction du temps.

À l'instant t (exprimé en jours), on note $N(t)$ le nombre d'atomes de ^{95}Nb.

On admet que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, l'expression de $N(t)$ est : $N(t) = 200\left(e^{-0,01t} - e^{-0,02t}\right)$.

On note C la courbe représentative de la fonction N dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 10 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $N(0)$.

2. a. Calculer la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

3. a. Montrer que la fonction N' dérivée de N vérifie $N'(t) = 200e^{-0,02t}\left(0,02 - 0,01e^{0,01t}\right)$.

b. Résoudre l'équation $N'(t) = 0$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution t_0 de cette équation.

c. Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $N'(t) \geq 0$. En déduire le tableau de variations de la fonction N. Préciser la valeur exacte de $N(t_0)$.

4. Construire la courbe C sur l'intervalle $[0\ ;\ 150]$.

5. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pour lequel $N(t) \geq 40$. (On laissera apparaître sur la figure les constructions utiles).

9. STL, France, septembre 2004, Chimie de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Soit les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$; $z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a. Calculer le module et un argument de z_A et z_B.

b. Construire les points A, B et C.

c. Calculer $|z_A - z_B|$.

d. Quelle est la nature du triangle OAB ? (justifier la réponse).

3. a. Écrire z_C sous forme algébrique.

b. Montrer que C est le milieu du segment $[OA]$.

4. Quelle est la nature du triangle ABC ? (justifier la réponse).

EXERCICE 2 (4 points)

Une urne contient trois boules : une jaune J, une verte V et une rouge R, indiscernables au toucher.

On tire successivement deux boules dans l'urne, en remettant la première, après avoir noté sa couleur, avant de tirer la deuxième.

On appelle résultat, un couple dont le premier élément est la couleur de la boule obtenue au premier tirage, et le second élément celle obtenue au second tirage. Par exemple, le couple (J ; V) est un résultat différent du couple (V ; J).

1. Déterminer l'ensemble des 9 résultats possibles (on pourra s'aider d'un tableau ou d'un arbre).

2. On convient de la règle de jeu suivante, associée au tirage précédent :

   * pour chaque boule jaune tirée, le joueur perd 3 euros ;

   * pour chaque boule verte tirée, le joueur gagne 1 euro ;

* pour chaque boule rouge tirée, le joueur gagne k euros (où k est un nombre positif).

On désigne par X la variable aléatoire qui à tout tirage associe le gain (positif ou négatif) du joueur. Par exemple, pour le tirage (J ; V) le gain est de -2 euros.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance E(X) de la variable X en fonction de k.

d. Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable ?

PROBLÈME (11 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=-2x^2-1+\ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$. Étudier son signe sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

3. En déduire que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x)<0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=-x+1$ estasymptote à la courbe C.

d. Étudier la position relative de C et Δ sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

b. Vérifier que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$.

c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C.

Partie C

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ (on donnera la valeur exacte).

3. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

b. Déduire de la question 2. de la partie C. la valeur exacte de l'aire S de E en cm^2, puis en donner la valeur arrondie en cm^2, au mm^2 près.

10. STL, France, septembre 2004, Physique de laboratoire et de procédés industriels

Le sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré. Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$.

1. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$.

2. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Résoudre l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

4. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{3\pi}{8}\right]$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Dans P, les points A et B ont pour affixes respectives 8 et $8i$.

1. On appelle D l'image de A par la rotation R_1 de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et C l'image de B par la rotation R_2 de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Quelles sont les fonctions f_1 et f_2 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associées respectivement aux rotations R_1 et R_2.

b. Calculer les affixes des points C et D.

2. a. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer le cercle C dans le plan P et représenter les points A, B, C et D.

b. Quelle est la nature du triangle OCD ?

3. On note a l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$ et b celle du vecteur $\overrightarrow{BC}$. Montrer que $b = a\sqrt{3}$. En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

Problème 10 points

Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - \frac{2}{e^x + 1}$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. a. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.

b. En déduire que la courbe C admet deux asymptotes D et D′ dont on donnera les équations.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3. Soit T la tangente à la courbe C au point $I(0 ; 1)$. Déterminer une équation de la droite T.

4. a. Pour tout réel x, on appelle M le point de la courbe C d'abscisse x et M' celui d'abscisse $-x$. Démontrer que $I(0 ; 1)$ est le milieu du segment $[MM']$.

b. Que représente le point I pour la courbe C ?

5. Tracer les droites D, D′, T et la courbe C.

Partie B

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. α désigne un réel inférieur ou égal à 1. On appelle $A(\alpha)$ l'aire, en cm^2, de la partie du plan, ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $\alpha \le x \le 1$ et $0 \le y \le f(x)$.

a. Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α.

b. Donner la valeur exacte de $A(0)$ puis sa valeur arrondie au cm^2.

c. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$.

11. STL, France, juin 2004, Biochimie - Génie biologique

Calculatrice autorisée. Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

EXERCICE 1 (8 points)

Des résultats expérimentaux

On peut estimer l'âge de très vieux troncs d'arbres de deux façons :

* d'une part, en étudiant les anneaux de croissance ;

* d'autre part, en mesurant la radioactivité résiduelle du carbone 14.

On a ainsi analysé d'anciens morceaux de séquoias et de pins par les deux méthodes. Voici le tableau des résultats obtenus : t , est l'âge, en milliers d'années, donn par la méthode des anneaux de croissance ; A est la radioactivité résiduelle exprimée en unité de radioactivité.

t_i	0,5	1	2	3	4	5	6,3	7,8
A_i	14,5	13,5	12	10,8	9,9	8,9	8	6,8

1. Recopier et compléter le tableau suivant où $\ln A_i$, est le logarithme népérien de A_i. On arrondira les valeurs trouvées au centième le plus proche.

t_i	0,5	1	2	3	4	5	6,3	7,8
$y_i = \ln A_i$	2,67	1,92						

2. Tracer le nuage de points $M_i(t_i\,;\,y_i)$. On prendra en abscisses : 1 cm pour 500 ans ; en ordonnées : 5 cm pour une unité.

3. a. Déterminer une équation de la droite D passant par le premier et le dernier point de ce nuage.

b. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

c. Le point G appartient-il D ?

d. Placer G et D sur le dessin précédent.

4. On trouve un autre tronc d'arbre que l'on estime (d'après la méthode des anneaux de croissance) vieux de 5 700 ans. Donner alors la radioactivité résiduelle qu'on lui trouverait en utilisant la droite D précédente :

a. graphiquement, en faisant apparaître sur le dessin les traits permettant la lecture du résultat ;

b. par le calcul, en prenant pour équation de D : $y = -0{,}1t + 2{,}72$.

EXERCICE 2 (12 points)

Des résultats théoriques

Partie A

Les êtres vivants contiennent du carbone 14 radioactif (constamment renouvelé) qui se maintient à la valeur de 15,3 unités.

À leur mort, ce carbone 14 n'est plus renouvelé ; il est désintégré à une vitesse proportionnelle, à tout instant, au carbone 14 encore présent dans l'organisme. On montre que le coefficient de proportionnalité est voisin de 0,123.

Ainsi, la radioactivité du carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années), notée $f(t)$, vérifie les deux conditions : $f'(t) = -0,123f(t)$ et $f(0) = 15,3$.

Résoudre l'équation différentielle $y' = -0,123y$ et $y(0) = 15,3$.

Partie B

On étudie sur $[0 ; +\infty[$ la fonction f définie par $f(t) = 15,3e^{-0,123t}$.

1. a. Calculer la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

b. En déduire l'existence d'une asymptote (que l'on précisera) à C, courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

2. a. Pour tout nombre t positif, calculer $f'(t)$, où f' désigne la dérivée de f.

b. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

3. Construire C en prenant 2 cm pour 5 milliers d'années en abscisses, 1 cm pour 1 unité en ordonnées (on placera les points d'abscisses : 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 et 30).

4. Placer sur le dessin précédent la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Partie C

On considère que la fonction f donnée dans la partie B donne la radioactivité du carbone 14 dans un organisme après sa mort, en fonction de t (en milliers d'années).

1. On trouve dans une grotte des débris d'os présentant une radioactivité égale à 10,2 unités. Estimer l'âge de ces débris à l'aide d'une lecture graphique.

2. Lorsque la radioactivité devient inférieure à 1% de sa valeur initiale, le calcul de $f(t)$ est entaché de trop d'incertitude pour permettre de dater raisonnablement à l'aide du carbone 14. Trouver à partir de quel âge un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

12. STL, Polynésie, juin 2004, Biochimie - Génie biologique

Calculatrice autorisée. Durée de l'épreuve : 2 heures. Coefficient : 2.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les deux exercices peuvent être traités indépendamment l'un de l'autre.

EXERCICE 1 (8 points)

Une personne possède une cave de 2 400 bouteilles de vin, rouge et blanc, de trois régions, Bordeaux, Bourgogne et Loire.

La moitié de ces vins sont des Bordeaux, et il y a deux fois plus de bouteilles venant de Bourgogne que de bouteilles venant de Loire.

75% des vins sont rouges et, parmi eux 54% viennent du Bordelais.

Dans les vins de Loire, il y a autant de blancs que de rouges.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Bordeaux	Bourgogne	Loire	Total
Blanc				
Rouge				
Total				

2. On prend, au hasard, une bouteille dans cette cave. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « le vin est blanc »;

B : « le vin vient de Bordeaux »,

puis la probabilité des évènements A $\cap$ B et A $\cup$ B.

3. On choisit une bouteille de vin blanc. Calculer la probabilité que ce soit un Bordeaux.

4. On choisit une bouteille de Bourgogne. Calculer la probabilité que ce soit un vin blanc.

EXERCICE 2 (12 points)

On injecte dans le sang 100 mg d'un médicament A. Pendant l'élimination naturelle, la dose restant dans le sang à l'instant t est donnée en mg par la fonction f définie par : $f(t) = 100e^{-0,4t}$ où t est exprimé en heure.

Partie A

Étude de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. Calculer $f'(t)$ et justifier son signe.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. On appelle C la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités : 1 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 10 mg en ordonnée). Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C de f au point A d'abscisse 0.

Partie B

On injecte une deuxième dose de 100 mg huit heures après la première.

1. Calculer la dose totale dans le sang juste après cette deuxième injection.

2. La dose restant dans le sang après la deuxième injection est donnée en mg par la fonction g définie sur $[8 ; +\infty[$ par $g(t) = 100e^{-0,4t}\left(1+e^{3,2}\right)$ où t est exprimé en heure.

Tracer T et C sur [0 ; 8] puis la courbe C' représentative de g sur [8 ; 16].

Partie C

On répondra aux questions suivantes par lecture graphique.

On considère que le médicament est efficace lorsque la dose restant dans le sang est supérieure à 20 mg.

1. Au bout de combien de temps la première injection perd-elle son effet ?

2. Sur quels intervalles de temps le médicament agit-il ?

13. STL, France, juin 2004, Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée. Durée de l'épreuve 3 heures. Coefficient 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Une partie de dé est organisée selon les règles suivantes : on mise 2 euros puis on lance un dé parfaitement équilibré ;

pour la sortie du 6 on reçoit 6 euros ;

pour la sortie du 5 on reçoit 2 euros ;

pour la sortie du 4 on reçoit 1 euros ;

et dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

1. On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Établir la loi de probabilité de X.

c. Déterminer l'espérance mathématique E(X).

2. Un joueur se présente ; il a en poche 2,50 euros.

a. Quelles sont les différentes sommes possibles qu'il peut avoir en poche à l'issue d'une partie ?

b. Déterminer la probabilité qu'il puisse jouer deux parties.

c. On suppose qu'il gagne assez à la première partie pour pouvoir jouer une deuxième partie. Quelles sont les différentes sommes possibles qu'il peut avoir en poche à l'issue des deux parties ?

EXERCICE 2 (5 points)

1. Résoudre le système suivant d'inconnues complexes z et z' : $\begin{cases} z + iz' = -1 \\ z - z' = 2 + i \end{cases}$.

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

a. Placer dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = 2i$ et $z_C = -2 + i$.

b. Calculer les modules des nombres complexes : $z_B - z_C$ et $z_B - z_A$. Donner une interprétation géométrique de ces résultats.

c. On note I le milieu du segment $[AC]$. Préciser l'affixe du point I puis calculer la distance BI.

d. Déterminer l'aire en cm^2 du triangle ABC.

PROBLÈME (10 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right)e^x$.

1. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout n entier naturel.

En remarquant que $f(x) = x^2e^x - 5xe^x + 7e^x$, déterminer la limite de f en $-\infty$. En déduire que C admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. a. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)e^x$.

b. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.

Dresser le tableau de variations de f (on donnera les valeurs exactes de $f(1)$ et de $f(2)$).

3. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Que peut-on dire de la tangente à C au point d'abscisse 1 ? Et au point d'abscisse 2 ?

4. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2	2,5
$f(x)$						

On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut.

5. Construire la droite T et la courbe C.

Partie B

1. a. Hachurer sur le dessin la partie du plan comprise entre la courbe C, la droite d'équation $x = 1$ et les deux axes du repère. On appelle A son aire, en cm^2.

b. En utilisant la partie A. montrer que pour tout x de l'intervalle [0 ; 1] on a : $7 \le f(x) \le 3e$.

c. En déduire l'encadrement suivant : $7 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 3e$.

d. En utilisant l'encadremement ci-dessus justifier que l'aire A est comprise entre 28 et 33 cm^2.

2. a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(x^2 - 7x + 14\right)e^x$.

Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la valeur exacte de A puis la valeur arrondie à l'unité près.

14. STL, France, juin 2004, Physique de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée. Durée de l'épreuve 4 heures. Coefficient 4.

Ce sujet nécessite l'utilisation de deux feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1 (5 points)

L'iode 131 est un produit radioactif. Tout échantillon d'iode 131 a sa masse qui diminue régulièrement par désintégration.

1. Dans un premier livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 diminue de 8,3% chaque jour.

On dispose d'un échantillon de masse initiale $M_0 = 100$ g.

a. Calculer, arrondie au dixième, la masse M_1 de l'échantillon au bout d'une journée puis sa masse M_2 au bout de deux jours.

b. On note M_n la masse de l'échantillon au bout de n jours. Démontrer que la suite (M_n) est une suite géométrique.

c. Calculer la masse M_{10} de l'échantillon au bout de 10 jours, arrondie au dixième.

2. Dans un second livre de physique, on lit que la masse de tout échantillon d'iode 131 est une fonction du temps, $M : t \to M(t)$ qui est solution de l'équation différentielle : $M'(t) = \lambda M(t)$ (E) où t est le temps exprimé en jours et λ une constante réelle.

a. Résoudre l'équation (E).

b. Sachant que lorsque $t = 0$, la masse de l'échantillon est de 100 g, exprimer $M(t)$ en fonction de t et de λ.

c. Calculer $M(1)$ en fonction de λ. Pour quelle valeur de λ a-t-on $M(1) = 91{,}7$?

On donnera une valeur approchée de λ arrondie au dix-millième.

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unite graphique : 1 cm). i désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

À tout point M d'affixe z du plan complexe, on fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z - 2i$.

1. Determiner le nombre complexe z tel que $z' = z$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = -1 + 3i$.

a. Déterminer les affixes des points A' et B'. Que peut-on dire du point A' ?

b. Placer les points A, B et B' dans le repère $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

c. Démontrer que le triangle ABB' est un triangle rectangle et isocèle.

3. a. Vérifier l'égalité : $|z'| = \sqrt{2}\,|z - (1+i)|$.

b. Soit C le point d'affixe $z_C = 1 + i$. Interpréter géométriquement $|z|$ et $|z-(1+i)|$.

c. Déduire des questions précédentes l'ensemble (D) des points M d'affixe z vérifiant $|z'| = \sqrt{2}\,|z|$ et tracer (D) dans le repère précédent.

Problème (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de f quand x tend vers 0, x réel positif. En déduire que C possède une asymptote dont on précisera l'équation.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à la droite D.

3. a. Calculer, pour tout x réel strictement positif, le nombre dérivé $f'(x)$. Montrer que, pour tout x réel strictement positif, $f'(x) = 2\dfrac{\left(e^x - \frac{1}{2}\right)\left(e^x - 2\right)}{\left(e^x - 1\right)^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

4. Tracer la courbe C et ses asymptotes.

5. a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x > 0$, $f(x) = ax + b + \dfrac{ce^x}{e^x - 1}$.

b. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. Déterminer l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.