Concours Sciences-Po Paris, admission au collège universitaire

Calculatrice autorisée ; durée 3 heures.

Problème 12 points

Partie A

1. En janvier 2006, l'once d'or (soit environ 31 grammes d'or) coûtait 500 \$ contre 1 700 \$ en janvier 2013 (source Les Echos, 2013). Le cours de l'or a donc connu une progression spectaculaire avec une augmentation moyenne d'environ 19 % par an.

En supposant que cette augmentation annuelle reste constante pour les prochaines années, à partir de quelle année le prix de l'once d'or dépassera-t-il les 5 000 \$ ¿

2. On s'intéresse à une entreprise spécialisée dans la production d'articles dont la qualité augmente quand on y introduit de l'or. Le coût de production de ces articles, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par une fonction C.

Cette fonction C dépend principalement de la masse d'or, exprimée en dizaines de grammes, contenue dans les articles. Les coûts de production augmentant très fortement (on parle, en économie, d'une croissance exponentielle) en fonction de la masse d'or contenue, l'entreprise ne produira que des articles ne contenant qu'une faible quantité d'or.

On admet que tous les articles fabriqués sont vendus et que leur prix de vente est proportionnel à la masse d'or contenue, la même pour tous les articles.

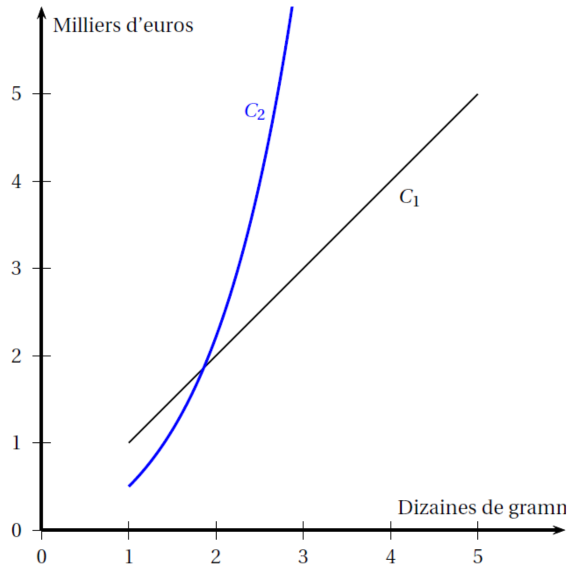
On appelle R la recette de l'entreprise exprimée en milliers d'euros en fonction de x la quantité d'or exprimée en dizaines de grammes d'or.

Les courbes des fonctions C et R sont données dans le repère ci-dessous.

On suppose que la quantité d'or minimale contenue dans chaque article est de dix grammes.

a. Identifier, en justifiant, les courbes associées aux fonctions de coût et de recette.

b. Conjecturer le sens de variation de chacune des fonctions.



3. On dit que l'entreprise a un bénéfice nul lorsque le coût de production est égal à la recette.

a. Justifier graphiquement qu'il existe une masse d'or exprimée en dizaines de grammes et notée α pour laquelle le bénéfice de l'entreprise est nul et en déduire une équation vérifiée par α .

b. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les masses d'or que les articles doivent contenir pour que l'entreprise réalise des bénéfices positifs.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction C définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $C(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}$ et les solutions éventuelles de l'équation $C(x) = x$.

Pour cela on pose $\phi(x)=C(x)-x$, pour $x\in[1\,;+\infty[$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction ϕ.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction ϕ sur $[1\,;+\infty[$.

3. En déduire que l'équation $C(x) = x$ admet une unique solution α.

4. Établir que $\frac{3}{2}\alpha<2$.

Partie C

On se propose d'étudier une méthode d'approximation du nombre α.

Soit g la fonction définie sur $\ddot{I}=\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$ par : $g(x)=\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+1$.

1. Démontrer que l'équation $C(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$ pour $x\in I$.

2. a. Justifier que la fonction g est croissante sur I et en déduire que, pour tout réel x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

b. Montrer que, pour tout réel x de I : $0\le g'(x)\le\frac{1}{2}$.

3. On admet alors que, pour tout couple de réels $(x\,;y)$ de I, on a : $\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}\le\frac{1}{2}$.

a. Montrer que, pour tout réel x de I, on a : $\frac{|g(x)-\alpha|}{|x-\alpha|}\le\frac{1}{2}$.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de I définie par $w_0=\frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel $n > 0$, $w_{n+1}=g(w_n)$.

b. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de w_2 et w_3.

c. Établir que pour tout entier naturel n : $|w_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|w_0-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

4. Donner un encadrement de la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'amplitude 10^{-4}. Expliquer la démarche.

5. Pour quelle masse d'or incluse dans les articles produits, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice nul ? La masse sera donnée en grammes à 10^{-2} près.

Exercice Vrai-Faux 8 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. Soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite définie par $v_1 = 1$ et pour tout entier $n > 1$, $v_{n+1}=nv_n$.

On a $v_3 = 6$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1}=u_n+1$. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=e^{u_n}$.

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_0+v_1+\ldots+v_n\right)=\dfrac{e}{1-e}$.

3. Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

On considère la fonction g définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $g(x)=e^{-f(x)}$.

La fonction g est strictement décroissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

4. On suppose qu'à partir de l'année 2000 le prix d'un bien immobilier augmente chaque année de 5 % pour atteindre 1 500 000 euros en 2020.

En 2000, le prix arrondi à l'euro de ce bien était de 53 772 euros.

5. L'équation $3e^{2x}+2=12e^{x}$ admet deux solutions réelles.

6. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la droite (d) a pour équation $3x + 4y + 4 = 0$.

La droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point A(4 ; 1) coupe la droite (d) en un point H de coordonnées $\left(\dfrac{8}{5};-\dfrac{11}{5}\right)$.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N, P, S, I nombres entiers naturels

Début	Saisir (N)
	Saisir (P)
	S prend la valeur 1
	I prend la valeur N
	Tant que $S < P$ et $I > 0$ faire
	  S prend la valeur $S \times I$
	  I prend la valeur $I - 1$
	Fin Tant que

Fin	Afficher I

Si l'utilisateur saisit $N = 10$ et $P = 10000$, alors l'algorithme retourne 6.

8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^2+x+1\right)e^{x}$.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 0,5.

9. Une entreprise fabrique en très grande quantité des gélules dont la masse est exprimée en milligrammes.

Lors de la fabrication des gélules, une étude statistique a montré que 3 % des gélules ont une masse non conforme.

Si l'entreprise conditionne les gélules par sachet de 10, il y aura au moins 96 % des sachets qui comporteront 9 ou 10 gélules de masses conformes.

10. Sarah et Aurélien ont chacun organisé une tombola comportant 100 billets.

Sarah propose 30 billets gagnants, parmi lesquels figurent 1 lot de 250 euros, 4 lots de 50 euros et 25 lots de 2 euros.

Aurélien propose 55 billets gagnants avec 5 lots de 20 euros, 10 lots de 15 euros, 15 lots de 10 euros et 25 lots de 5 euros.

Un billet de tombola coûte 1 euro.

Il est préférable de participer à la tombola de Sarah plutôt qu'à celle d'Aurélien.

FIN