Concours Sciences-Po Paris

Calculatrice autorisée ; durée 3 heures.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$. La suite (u_n) est décroissante.

2. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. La suite (u_n^2) est aussi croissante et majorée.

3. Soit b un nombre réel et soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = x^2 + bx + 4$. Le minimum de la fonction f est inférieur ou égal à 4.

4. L'équation $e^x - 2e^{-x} = -1$ admet 2 solutions réelles.

5. La courbe représentative de la fonction logarithme népérien, notée ln, est toujours au-dessous de sa tangente en 1.

6. Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. On admet que 3 % des rondelles ont un diamètre défectueux.
On prélève au hasard 10 rondelles dans le stock pour vérification du diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. La probabilité de tirer au moins une rondelle au diamètre défectueux est égale à 0,263 arrondi à 10^{-3} près.

7. Une urne contient 10 boules blanches et 4 boules rouges. Un joueur tire successivement et avec remise 20 boules de l'urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 € et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 €.
On désigne par G la variable aléatoire égale au gain du joueur. L'espérance de G est de $\frac{200}{7}$.

8. Soient les points A(–2 ; 1), B(2 ; 2) et C(l ; 5). Le triangle ABC est rectangle isocèle.

9. Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une équation cartésienne de la droite d passant par le point A(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{-1}{2} ; \frac{5}{3}\right)$ est $-3x + 10y - 1 = 0$.

10. On considère l'algorithme suivant :

Traitement	Affecter 1 à S
	Affecter 1 à n
	Tant que $S < 1{,}5$
	    Affecter $n+1$ à n
	    Affecter $S + \frac{1}{n^2}$ à S
	Fin tant que

Sortie	Afficher la valeur de S

L'algorithme calcule la somme $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$.

Problème

Les parties A, B et C de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

L'objet de ce problème est d'étudier la rémunération d'un capital donné sur un compte en faisant varier la période pour l'application d'un taux d'intérêt.

Partie A : Calculs d'intérêts

Dans ce problème on considère l'évolution au cours d'une année d'un capital de 1 millier d'euros placé en début d'année sur un compte bancaire rémunéré.

Supposons dans un premier temps que le compte est rémunéré avec un taux d'intérêt annuel de 10 %. Au bout d'un an le montant des intérêts est alors égal à 10 % de 1 millier d'euros soit un montant de 0,1 millier d'euros. Le capital disponible sur le compte devient alors égal à 1,1 milliers d'euros. Résumons avec un tableau (T_1) :

	Début janvier	Fin décembre
Intérêts		0,1
Capital	1	1,1

Supposons maintenant que le compte est rémunéré avec un taux de 5 % mais tous les 6 mois et résumons dans un tableau l'évolution du capital et des intérêts au bout de 6 mois (fin juin) puis au bout de 12 mois (fin décembre). On obtient alors le tableau (T_2) suivant :

	Début Janvier	Fin Juin	Fin Décembre
Intérêts		0,05	$1{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}0525$
Capital	1	1,05	1,1025

1. Les trois capitaux successifs figurant dans la dernière ligne du tableau (T_2) ci-dessus sont-ils les premiers termes d'une suite géométrique ? Si oui, en donner la raison.

2. On suppose dans cette question que le compte est rémunéré chaque mois avec un taux égal à $\frac{a}{12}$ % où a est un réel strictement positif.

En appliquant les mêmes méthodes de calcul que précédemment, compléter le tableau ci-dessous en prenant $a = 10$. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

	Début 01	Début 02	Début 03	Début 04	Début 05	Début 06	
Intérêts							
Capital	1						
	Début 07	Début 08	Début 09	Début 10	Début 11	Début 12	Fin 2012
Intérêts							
Capital							

3. Expliquer pourquoi les capitaux successifs du tableau précédent sont les 13 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\left(1+\frac{1}{120}\right)$. En déduire la valeur exacte du capital à la fin du mois de décembre.

4. Soit n un entier non nul. On se place maintenant dans le cas d'une banque appliquant n fois au cours de l'année (à intervalles réguliers) un taux d'intérêt égal à $\frac{a}{n}$ % où a est un réel strictement positif.

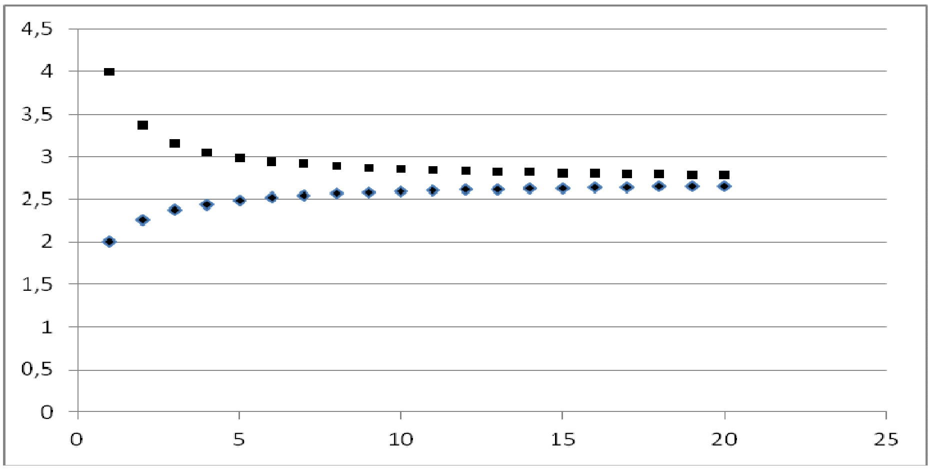
Proposer et justifier une formule permettant de calculer le capital, noté U_n, présent sur le compte à la fin décembre, c'est-à-dire au bout de n périodes. On définit ainsi une suite (U_n).

Partie B : Etude théorique

L'objectif de cette partie est de proposer un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée du nombre e (où $\ln e = 1$).

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1. Le graphique suivant représente les 20 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).



a. Par le calcul de quelques termes (ou par une autre justification) identifier les suites (a_n) et (b_n) sur ce graphique.

b. Conjecturer leur sens de variation.

Pour la suite du problème, on admet que les conjectures sont validées.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leq b_n$.

3. Convergence de la suite (a_n).

a. Donner une interprétation graphique de l'inégalité suivante : pour tout nombre réel x, $1+x \leq e^x$.

b. Démontrer, en utilisant l'inégalité précédente que l'on admet, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leq e$.

c. Prouver que la suite (a_n) est convergente.

Dans la suite de l'exercice on admet que la suite (a_n) converge vers le nombre e.

4. Convergence de la suite (b_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{e}{n}$.

b. En déduire que la suite (b_n) est convergente et préciser sa limite.

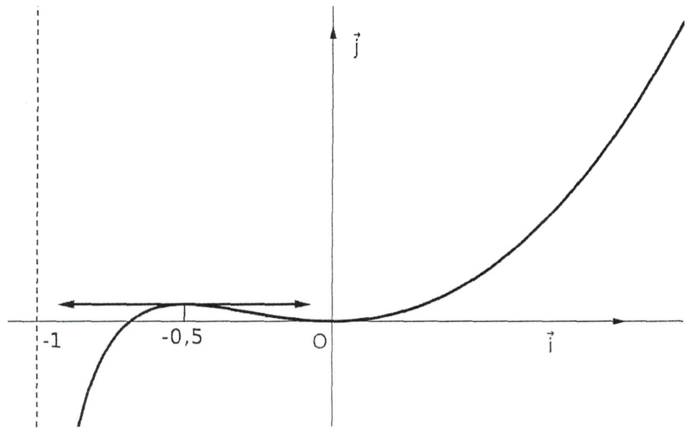
c. Démontrer alors que pour tout entier naturel n non nul, $b_n \geq e$.

d. En déduire que $e \leq 4$ et donc que, pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{4}{n}$.

5. Proposer un algorithme permettant de déterminer un encadrement du nombre e à 10^{-2} près.

Partie C : Généralisation

Sur le graphique ci-dessous on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.



On sait qu'il existe un nombre réel c tel que $f(x)=\ln(1+x)-x+cx^2$.

1. En utilisant le graphique, donner la valeur de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que pour tout réel x : $f'(x)=\dfrac{2cx^2+(2c-1)x}{1+x}$.

3. En déduire la valeur de c.

4. a. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

b. À l'aide de l'inégalité établie graphiquement à la question 3. a. de la partie B, prouver que, pour tout réel $x>-1$: $\ln(1+x) \leq x$.

c. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$: $-x^2 \leq \ln(1+x)-x \leq 0$.

5. Prouver que, pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier naturel n non nul : $-\dfrac{t^2}{n} \leq n\ln\left(1+\dfrac{t}{n}\right)-t \leq 0$.

6. Pourquoi peut-on en déduire que, pour tout réel $t \geq 0$, la suite de terme général $\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$ tend vers e^t ?

7. Déterminer la limite de la suite (U_n) définie à la question A. 4.