Concours Sciences-Po Paris

Calculatrice autorisée ; durée 3 heures.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $\frac{4}{5}$, et on pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ pour tout entier naturel non nul *n*. La suite (S_n) converge vers 5.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$ pour tout entier naturel *n*. La suite (v_n) est géométrique.

3. On considère les suites (w_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et $t_n = e^{-u_n}$ pour tout entier naturel *n*. La suite (v_n) est convergente.

4. Une entreprise de sondage réalise une enquête par téléphone. On admet que la probabilité que la personne contactée accepte de répondre est égale à 0,2.
Si un enquêteur contacte 50 personnes, la probabilité qu'au moins six personnes acceptent de lui répondre est supérieure à 0,95.

5. Toute suite non majorée diverge vers $+\infty$.

6. L'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ admet le réel 1 pour unique solution.

7. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. La tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.

8. L'équation $x^3 + 4x^2 + 4x = -2$ a exactement trois solutions réelles.

9. Voici un algorithme :

Entrée	Saisir un entier naturel a

Traitement	Affecter *à n la* valeur 1 et à c la valeur 1
	Tant que $c < a$
	    Affecter *à n la* valeur $n + 1$.
	    Affecter *à c la* valeur $c + n^2$
	Fin du Tant que

Sortie	Afficher la valeur de n

Si on saisit pour a la valeur 20, alors la sortie vaut 4.

10. On lance deux dés cubiques et non truqués. On appelle *X* la variable aléatoire donnant le plus grand des deux chiffres obtenus. L'espérance de la variable aléatoire *X* est : $\mathbb{E}(X) = \frac{161}{36}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + 1\frac{1}{x}\right)\right)$ et on appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'axe des ordonnées du repère et la courbe Γ d'équation $y=\ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ sont asymptotes à la courbe C.

On rappelle que les courbes (C) et (C') respectivement représentatives de deux fonctions f et g sont asymptotes en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$.

3. a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)<1$.

b. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire la position de la courbe C par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

4. Tracer la droite D ainsi que les courbes Γ et C sur le même graphique.

Partie B

On se donne un réel u_0 supérieur ou égal à 1. La suite (u_n) est définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Partie C

On admet que la limite de la suite (u_n) est égale à 1.

On se propose dans cette partie d'étudier la rapidité de convergence de la suite (u_n) vers sa limite.

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) quand u_0 vaut 1 ?

2. Dans cette question on choisit la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies à 10^{-6} près de u_1, u_2, u_3.

On suppose dans cette partie que le réel u_0 strictement supérieur à 1.

3. a. Montrer que pour tout réel $t>-1$, on a $\ln(1+t)\le t$.

3. b. Montrer que pour tout réel $h\ge 0$, on a $f(1+h)-1=\ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right)$.

4. On définit la suite (v_n) par $v_n=u_n-1$ pour tout entier naturel n.

Montrer que pour tout entier naturel n on a $v_{n+1}\le\frac{1}{2}v_n^2$.

5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $0\le v_n\le 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

6. Dans cette question, on choisit à nouveau la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

À partir de quel p peut-on affirmer que $u_p-1\le 10^{-20}$?