Concours Sciences-Po Paris

Calculatrice autorisée ; durée 4 heures.

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population.

Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc. Dans ce problème, on étudie quelques-uns de ces modèles.

Les parties 1, 2, 3 et 4 du problème sont, dans une très large mesure, **indépendantes entre elles**.

Partie 1 : Le modèle de Malthus

Une première approche consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

1. Modèle discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n de l'étude (P_n est un réel positif). D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = kP_n .$$

a. Justifier que la suite ainsi définie est géométrique.

b. Indiquer le sens de variation de la suite en fonction de la valeur de k.

c. Préciser la limite de la suite en fonction de la valeur de k.

d. Interpréter les résultats des questions b. et c. en termes d'évolution de population.

2. Modèle continu

On appelle désormais $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $P'(t) = kP(t)$.

a. Pour tout réel $t \geq 0$, exprimer en fonction de t, k et P_0 la population à l'instant $t = 0$.

b. Quel est le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction P ? On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de k.

c. On se place maintenant dans le cas où $k > 0$. On appelle temps de doublement le temps λ au bout duquel la population a doublé par rapport à la population initiale.

Exprimer λ en fonction de k.

Si la population double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle ? Justifier.

d. On suppose toujours que $k > 0$. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Calculer la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

En déduire la population moyenne sur l'intervalle $[0\,;\lambda]$ en fonction de P_0.

3. Comparaison des deux modèles

On suppose que la population initiale est de 1000 individus et que $k = 0{,}1$.

Comparer les résultats obtenus après 10 ans puis après 100 ans pour chacun des deux modèles.

Le fait que la population augmente de manière exponentielle n'est pas très réaliste. Le taux d'accroissement de la population va diminuer à cause de différents facteurs comme la diminution de l'espace disponible ou des ressources. Il faut donc introduire un facteur d'autorégulation M tenant compte de la capacité d'accueil du milieu.

Dans ce qui suit, on étudie donc les modèles de Verhulst et de Gompertz qui permettent de décrire l'accroissement de la population comme « proportionnel » à l'effectif mais freiné par des ressources limitées.

Partie 2 : Modèle de Verhulst discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n (exprimé en milliers d'individus).

D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante $k > -1$ et une constante M strictement positive telle que, pour tout entier naturel n,

$$P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right).$$

1. Si la suite (P_n) est convergente, quelles sont les valeurs possibles de la limite ?

2. On pose $r = 1 + k$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{k}{rM}P_n$.

Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$.

3. Dans cette question, on suppose que $r = 1{,}8$ et $u_0 = 0{,}8$.

a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$ et croissante.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

c. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population ? Justifier.

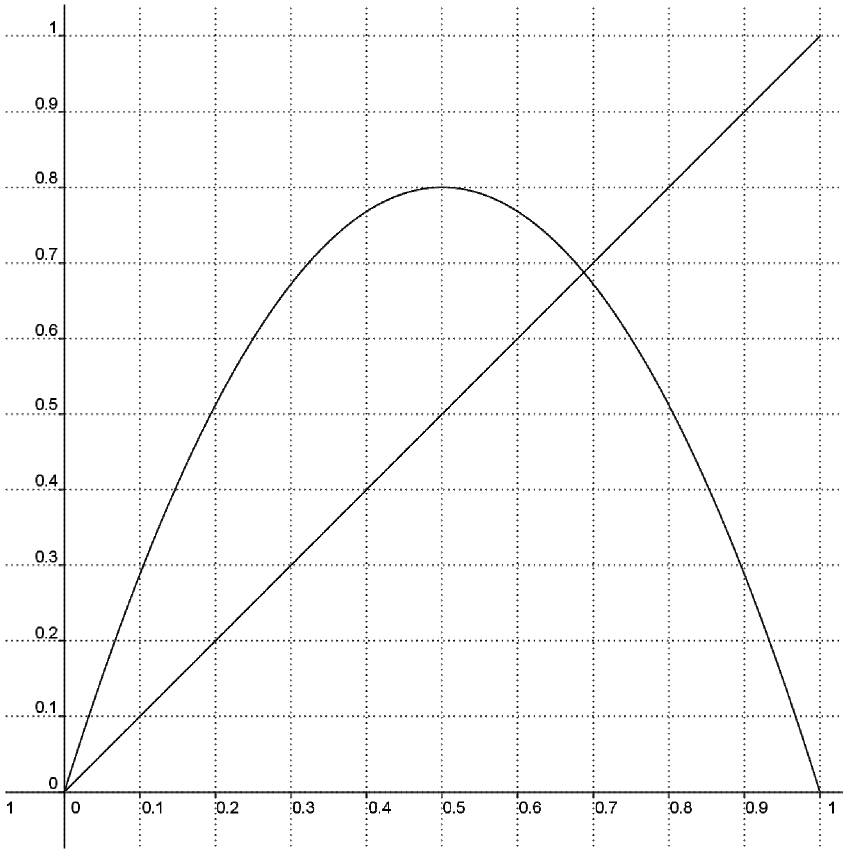
4. Dans cette question, on suppose que $r = 3{,}2$ et $u_0 = 0{,}8$.

a. Sur le graphique ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3{,}2x(1-x)$ et la droite d'équation $y = x$.

Sur ce graphique, construire, sur l'axe des abscisses, les quatre premiers termes de la suite . On laissera les traits de construction apparents.

b. Que peut-on conjecturer quant à l'évolution de la suite ?

c. À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs arrondies à 10^{-5} près des 6 premiers termes de la suite. Ces résultats confirment-ils la conjecture émise précédemment ?



5. Dans cette question, on suppose que $r = 5$ et u_0 est un réel strictement positif.

On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p > 1$.

a. Démontrer que $u_{p+1} < 0$ puis que, pour tout $n \geq p+1$, $u_n < 0$.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq p+1}$ est décroissante. On pourra, pour cela, étudier le signe de la fonction $h(x) = 5x(1-x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

En déduire que, s'il existe, l'entier p est unique.

c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq p+1}$ n'est pas minorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

e. Si $u_0 = 0{,}8$, que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier.

f. Démontrer que si $u_0 = 0{,}5$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.

Même question avec $u_0 = 0{,}1$.

En programmant le calcul des termes de la suite à l'aide de la calculatrice, démontrer que si $u_0 = 0{,}799\,999$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.

Que peut-on dire de la validité du modèle dans ces différents cas ?

Partie 3 : Modèle de Verhulst continu

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel de l'intervalle $[0 ; +\infty[$).

On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et strictement positive sur $[0 ; +\infty[$ et qu'il existe des constantes k et M strictement positives telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right).$$

On note (E) l'équation différentielle : $y' = ky\left(1 - \frac{1}{M}y\right)$.

1. On considère la fonction Q définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $Q = \frac{1}{P}$.

a. Démontrer que P est une solution de l'équation (E) si et seulement si Q est une solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -ky + \frac{k}{M}$.

b. Résoudre (E'). Justifier que les fonctions obtenues sont strictement positives quelle que soit la valeur de la population initiale $P_0 = P(0)$.

c. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel t positif, $P(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-kt}}$ où C est une constante réelle.

a. Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?

b. Étudier le sens de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ selon le signe de C.

c. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.

d. Décrire l'évolution de cette population. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de P_0 et M.

3. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0 ; T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0 ; T]$.

a. Calculer, en fonction de M, C, k et T, la population moyenne, notée μ_T, sur l'intervalle $[0 ; T]$.

b. Déterminer la limite de μ_T quand T tend vers $+\infty$.

4. On se place dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative, on appelle point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ un point où la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ traverse la courbe $\mathcal{C}$.

a. Démontrer que le point O est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.

b. Calculer la dérivée seconde P'' de la fonction P. Montrer que l'équation $P''(t)=0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C>0$. Démontrer que $t_0=\dfrac{\ln C}{k}$.

c. Démontrer que, quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A_0\left(t_0\,;P(t_0)\right)$ appartient à la droite d'équation $y=\dfrac{M}{2}$.

d. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P, au point A_0. On note g la fonction affine correspondante.

e. Étudier la position relative de la courbe représentant la fonction P et de sa tangente au point A_0. On pourra, pour cela, étudier les variations puis le signe de la fonction φ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(t)=P(t)-g(t)$.

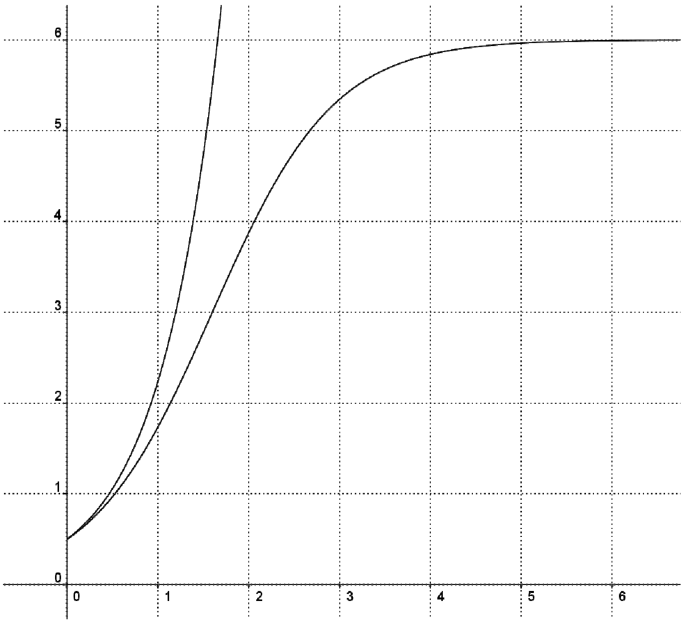
En déduire que le point A_0 est un point d'inflexion de la courbe représentant la fonction P.

5. Dans cette question, on prend $P_0=0,5$, $k=1,5$ et $M=6$. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions $t\to 0,5e^{1,5t}$ et $t\to\dfrac{6}{1+11e^{-1,5t}}$ définies sur $[0\,;+\infty[$.

a. On considère la fonction d définie sur $[0\,;+\infty[$ par $d(t)=0,5e^{1,5t}-\dfrac{6}{1+11e^{-1,5t}}$.

Résoudre l'inéquation $d(t)<0,1$. Que peut-on dire de ces deux courbes au voisinage de l'origine O ?

b. À l'aide du graphique ci-dessous, décrire, dans le cas du modèle de Verhulst continu, l'évolution de la population quand son effectif est au voisinage de la moitié de la capacité d'accueil M.



Partie 4 : Modèle de Gompertz

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude, et on suppose que P est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On suppose qu'il existe des constantes k et M avec M strictement positive telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ on ait : $P'(t)=kP(t)\ln\left(\dfrac{M}{P(t)}\right)$.

1. On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $Q=\ln(P)$.

a. Démontrer qu'une fonction P est une solution de l'équation différentielle $y'=ky\ln\left(\dfrac{M}{y}\right)$ si et seulement si Q est solution de l'équation différentielle $y'=-ky+k\ln(M)$.

b. Résoudre l'équation différentielle $y'=-ky+k\ln(M)$.

c. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$, $P(t)=M\exp\left(Ce^{-kt}\right)$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.

3. Exprimer C en fonction de la population initiale et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?

4. Un laboratoire étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie d'extinction.
La population initiale est de 1000 individus. L'effectif de la population, exprimé en milliers d'individus, est modélisé par une fonction P vérifiant le modèle de Gompertz avec $k=-\dfrac{1}{20}$ et $M=20$.

a. Comment évolue cette population au cours du temps ? Justifier l'expression « population en voie d'extinction ».

b. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de la population sera inférieure à 10 individus ? Justifier.