Concours Sciences-Po Paris

Calculatrice autorisée ; durée 4 heures.

Problème

Le problème suivant est constitué de deux parties indépendantes entre elles. Dans chaque partie on étudie un exemple classique de loi de probabilité continue à densité.

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Première partie

Soit λ un nombre réel non nul.

On considère la fonction $f_\lambda : x \mapsto e^{-\lambda x}$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est notée (C_λ).

A. 1. Étudier les variations de la fonction f_λ selon le signe de λ.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathrm{T}_{\lambda,a}$ à la courbe (C_λ) au point A d'abscisse a où a est un réel quelconque.

3. a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer, selon le signe de λ, la position de la courbe (C_λ) par rapport à la tangente $\mathrm{T}_{\lambda,a}$ au point A.

b. Donner l'allure de la courbe (C_λ) selon le signe de λ.

B. 1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on note $\mathcal{A}_\lambda(\alpha)$ l'aire sous la courbe (C_λ) sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$, exprimée en unités d'aire.

a. Déterminer la valeur de $\mathcal{A}_\lambda(\alpha)$.

b. Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathcal{A}_\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2. a. Justifier l'existence des écritures $I(\alpha)=\int_0^\alpha t f_\lambda(t)\,dt$ et $J(\alpha)=\int_0^\alpha t^2 f_\lambda(t)\,dt$.

b. Calculer la valeur de chacune de ces deux intégrales.

c. En déduire leurs limites respectives lorsque α tend vers $+\infty$, si elles existent.

C. On dit qu'une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ est une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$ si :

- pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $f(x)\geq 0$;
- la fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$;
- la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$ existe et est égale à 1.

On définit alors une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $[0\,;+\infty[$ de densité f : pour tout intervalle $[a\,;b]$ inclus dans $[0\,;+\infty[$, la probabilité de l'intervalle $[a\,;b]$ est $\mathbb{P}([a\,;b])=\int_a^b f(t)\,dt$.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0\,;+\infty[$ suit la loi $\mathbb{P}$ si, pour tout intervalle $[a\,;b]$, inclus dans $[0\,;+\infty[$, $\mathbb{P}(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(t)\,dt$.

Dans la suite de cette partie C., λ est un réel strictement positif et on considère la fonction $\varphi_\lambda : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ définie sur $[0;+\infty[$.

1. a. Déduire de ce qui précède que φ_λ est une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.

b. Soit X_λ une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité φ_λ. Reconnaître la loi suivie par X_λ.

2. a. On appelle espérance de X_λ le réel noté $\mathbb{E}(X_\lambda)$ défini par $\mathbb{E}(X_\lambda) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\varphi_\lambda(t)dt$.

Justifier l'existence de la limite précédente et donner une expression simple de $\mathbb{E}(X_\lambda)$ en fonction de λ.

b. Le temps d'attente en minutes à un standard téléphonique est une variable aléatoire Y_λ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. L'espérance $\mathbb{E}(Y_\lambda)$ représente alors le temps moyen d'attente à ce standard. Sachant que ce temps moyen est de 5 minutes, déterminer la probabilité d'attendre encore 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 2 minutes.

3. On appelle variance de X_λ le réel noté $\mathbb{V}(X_\lambda)$ défini par $\mathbb{V}(X_\lambda) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t^2\varphi_\lambda(t)dt - [\mathbb{E}(X_\lambda)]^2$.

Justifier l'existence de la limite précédente et déterminer une expression simple de $\mathbb{V}(X_\lambda)$ en fonction de λ.

Deuxième partie

Soit λ un nombre réel non nul arbitrairement fixé.

On considère la fonction $g_\lambda : x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est notée (Γ_λ).

A. Dans cette partie A. plusieurs cas pourront être envisagé selon les valeurs du réel λ.

1. Faire une étude de la fonction g_λ : parité, limites, variations.

2. a. Déterminer la dérivée seconde de la fonction g_λ.

b. On admet que la courbe représentative d'une fonction *f* deux fois dérivable traverse sa tangente en un point A d'abscisse *a* si et seulement si la dérivée seconde de *f* s'annule en *a* en changeant de signe.
La courbe (Γ_λ) présente-t-elle des points où elle traverse sa tangente ?

c. Donner l'allure de la courbe (Γ_λ).

B. On considère les fonctions $F_\lambda : x \mapsto \int_0^x e^{-\lambda t^2}dt$ et $F_1 : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. a. Rappeler l'argument permettant de justifier la dérivabilité de la fonction F_λ puis donner l'expression de $F'_\lambda(x)$ pour tout réel *x*.

b. En déduire que, pour tout réel *x*, on a l'égalité : $F_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(x\sqrt{\lambda}\right)$.

2. Justifier que la fonction F_λ est impaire.

3. Étudier les variations de la fonction F_λ.

Dans la suite de cette deuxième partie, on se place dans le cas où λ est strictement positif.

4. a. Montrer que, pour tout *t* réel supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $g_\lambda(t) \le e^{-t}$.

b. Montrer que, pour tout x réel supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x)-F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x}e^{-t}dt$.

En déduire que, pour tout x réel supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x)\leq F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)+e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n=F_\lambda(n)$.

c. Prouver que la suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite finie en $+\infty$ que l'on note L_λ.

On admet que la fonction F_λ admet également pour limite L_λ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Quelle relation existe-t-il entre L_λ et L_1 ?

e. Montrer que $0\leq L_\lambda-F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

f. On suppose dans cette question que $\lambda=\frac{1}{2}$. Donner une valeur approchée de $L_{1/2}$ à e^{-2} près.

g. On admet que $L_{1/2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Déterminer la valeur exacte de L_λ.

C. On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si :

- pour tout réel x, $f(x)\geq 0$;
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$;
- les limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$ existent et sont finies ; leur somme est égale à 1.

On définit alors une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ de densité f : pour tout réel a, la probabilité de l'intervalle $]-\infty\,;a]$ est $\mathbb{P}(]-\infty\,;a])=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit la loi $\mathbb{P}$ si, pour tout réel a, $\mathbb{P}(X\leq a)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$.

Soit la fonction $\psi : x\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. a. Préciser la parité de la fonction ψ.

b. Déduire de la partie B. que la fonction ψ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la densité de probabilité ψ (la loi suivie par X est appelée *loi normale centrée réduite* et est très utilisée en statistiques et probabilités).

2. On appelle espérance de X le réel $\mathbb{E}(X)$ défini par : $\mathbb{E}(X)=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 t\psi(t)dt+\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t\psi(t)dt$.

Justifier l'existence des limites précédentes et calculer $\mathbb{E}(X)$.

3. a. En s'aidant de la partie B., justifier que pour tout réel a supérieur à 2, la probabilité $\mathbb{P}(2\leq X\leq a)$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2}$.

b. En déduire que $\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq \mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) \leq \frac{1}{2}$ puis déterminer un encadrement de la probabilité $\mathbb{P}(X<2)$.

D. Lors de l'étude de la loi normale centrée réduite, il est utile de s'intéresser aux limites de la forme $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n \psi(t)\,dt$ où n est un entier naturel.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $\chi_n : x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x positif, on pose alors $b_n(x)=\int_0^x \chi_n(t)\,dt$.

1. Calculer $b_1(x)$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout réel x positif, $b_n(x)=-x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}+(n-1)b_{n-2}(x)$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $b_n(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, notée B_n.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $B_n=(n-1)B_{n-2}$.

d. Donner les valeurs de B_1, B_2, B_3 et B_4.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $B_{2k+1}=2^k k!$ et $B_{2k}=\frac{(2k)!}{2^{k+1}k!}\sqrt{2\pi}$.

b. En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n \psi(t)\,dt$ en fonction de n.

FIN