Intégration SUP/ESC

1. Méthodes d'intégration 1
1-1 : Intégrale immédiate 1
1-2 : Somme ou différence de fonctions 2
1-3 : Composée de fonction 2
1-4 : Décomposition en fractions rationnelles 2
1-5 : Par substitution (changement de variable) 3
1-6 : Réductions à des formes particulières 6
1-7 : Intégration par parties 7
1-8 : Décomposition en série 8
2. Intégration numérique 8
2-1 : Méthode des rectangles 8
2-2 : Méthode des trapèzes 9
2-3 : Méthode de Simpson 9
3. Diverses questions 9
3-1 : Introduction à la loi normale 9
3-2 : Extension de la notion d'intégrale. 10
3-3 : Suites définies par une intégrale. 10
3-4 : Comparaison série et intégrale 11
3-5 : Sommes de Riemann 12
4. Ecole Supérieure de commerce de Lyon 13
4-1 : escl 88 13
4-2 : escl 89 14
4-3 : escl 90 14
4-4 : escl 91 14
4-5 : escl 92 15
4-6 : escl 93 15
4-7 : escl 94 15
4-8 : escl 95 16
4-9 : escl 96 16
4-10 : escl 98 16
4-11 : escl 98 bis (sujet de secours) 17
4-12 : escl 2000 17
4-13 : escl 2001, extrait 18
4-14 : escl 2002 18
4-15 : escl 2004, extrait 19
5. Annales E.S.C. 19
5-1 : esc 97 19
5-2 : esc 98 20
5-3 : esc 2001, extrait 20
5-4 : esc 2002 20
5-5 : esc 2004 21
6. Annales EDHEC 22
6-1 : edhec 96, exercice 1 22
6-2 : edhec 96 22
6-3 : edhec 98, extrait du problème 22
6-4 : edhec 2002 23
6-5 : edhec 2003 23
6-6 : edhec 2004 23
7. Annales ECRICOME 24
7-1 : ecricome 91 24
7-2 : Ecricome 93 24
7-3 : D'après ecricome OG 93 25
7-4 : ecricome 98 (extrait) 25
7-5 : ecricome 99 (extrait) 26
7-6 : ecricome 2002 26
7-7 : ecricome 2004 27
8. Annales ISC-ESLSCA 28
8-1 : eslsca 93 28
8-2 : eslsca 95 28
8-3 : eslsca 96 29
8-4 : eslsca 98 29
8-5 : eslsca 99 29

1. Méthodes d'intégration

Nous reprenons les principales méthodes classiques d'intégration. Chaque cas est illustré par un ou plusieurs exemples. Certains exemples sont volontairement assez compliqués, dans le sens qu'ils font intervenir plusieurs méthodes. En effet, il est important de comprendre que toutes ces méthodes forment un ensemble, et qu'il faut savoir utiliser toutes les armes disponibles.

Notons enfin que souvent plusieurs méthodes sont possibles et qu'il n'y a pas de recette magique qui fonctionne à tous les coups. On doit donc simplement s'en servir comme outils et aide-mémoire.

1-1 : Intégrale immédiate

Il s'agit de l'application simple et immédiate des formules que l'on peut trouver dans n'importe quel formulaire.

Exemple 1 : $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$

Exemple 2 : $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Exemple 3 : $\int e^x dx = e^x + C$.

1-2 : Somme ou différence de fonctions

Soit à intégrer la fraction rationnelle : $f(x)/g(x)$ où $f(x)$ est un polynôme de degré m et $g(x)$ un polynôme de degré n avec $m > n$, on effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$. Puis on intègre.

Exemple 4 : $\int \frac{x^3+2x+1}{x+1}dx = \int \left(x^2-x+3-\frac{2}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-2\ln|x+1|+C$.

Exemple 5 : $\int \frac{x^5}{x-1}dx = \int \left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln\left(|x-1|\right)+C$

1-3 : Composée de fonction

Si on peut arriver à identifier un facteur comme étant la dérivée de l'autre, la solution est presque immédiate : $\int h'(g(x))\,g'(x)\,dx = h(g(x))+C$.

Exemple 6 : $\int (2x-1)\left(x^2-x+1\right)^3 dx = \frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{4}+C$ car $\begin{cases} g'(x)=2x-1 \rightarrow g(x)=x^3-x+1 \\ h'(x)=x^3 \quad \rightarrow \quad h(x)=\frac{x^4}{4} \end{cases}$.

On pouvait également procéder comme suit :

$$\int (2x-1)\left(x^2-x+1\right)^3 dx = \int \left(x^2-x+1\right)^3 d\left(x^2-x+1\right) = \frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{4}+C.$$

Exemple 7 : $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln\left(e^x+1\right)+C$ car de la forme $\int \frac{u'}{u}dx$.

Exemple 8 : $I = \int \frac{x}{x^2+x+1}dx$: on remarque que $\left(x^2+x+1\right)' = 2x+1$ d'où

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

(voir plus bas pour la dernière intégrale).

Exemple 9 : $I = \int e^{\cos^2 x}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{\cos^2 x}\sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{4}\int e^{\cos^2 x}d\left(\cos^2 x\right) = -\frac{1}{4}e^{\cos^2 x}+C$.

Exemple 10 : $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int (\tan x)'\tan x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + C$.

1-4 : Décomposition en fractions rationnelles

Pour toute forme $\frac{f(x)}{g(x)}$ où f et g sont des polynômes en x (si le degré de f est supérieur à celui de g on effectuera d'abord la division euclidienne).

Exemple 11 : $I = \int \frac{1}{x^3-x^2-4x+4}dx$. On décompose :

$$\frac{1}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-1} = \frac{(a+b+c)x^2+(-3a+b)x+2a-2b-4c}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$ d'où

le système $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -3a+b=0 \\ 2a-2b-4c=1 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{12}, b=\frac{1}{4}, c=-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{1}{12}\frac{1}{x+2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}$.

Enfin $I = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} = \ln\left|\frac{(x+2)^{\frac{1}{12}}(x-2)^{\frac{1}{4}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right|+C$.

Exemple 12 : $I=\int \frac{8x^2+3}{\left(x^2+x+1\right)(x-2)}dx=\int \frac{ax+b}{x^2+x+1}dx+\int \frac{c}{x-2}dx$. On cherche et on trouve a, b, c :

$I=\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}dx+\int \frac{5}{x-2}dx=\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int \frac{x}{x^2+x+1}dx+\int \frac{5}{x-2}dx$. Il reste à intégrer :

$I=\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+5\ln|\ x-2\ |$

$$I=\ln\left|\ \left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}}(x-2)^5\ \right|-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Exemple 13 : $I=\int \frac{x^2-x+2}{(1-x)^3}dx$:

$$\frac{x^2-x+2}{(1-x)^3}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{(1-x)^2}+\frac{c}{(1-x)^3}=\frac{ax^2-(2a+b)x+a+b+c}{(1-x)^3}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\-(2a+b)=-1\\a+b+c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1.\\c=2\end{cases}$$

$$I=\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{dx}{(1-x)^2}+2\int\frac{dx}{(1-x)^3}=-\ln|\ x-1\ |+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=-\ln|\ x-1\ |+\frac{x}{(x-1)^2}+C.$$

1-5 : Par substitution (changement de variable)

C'est une des méthodes les plus efficaces et donc la plus utilisée ; elle est basée sur la dérivation des fonctions composées : $\int f(x)dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$.

Exemple 14 : $I=\int x(1+x)^5\,dx$: posons $t=1+x\Rightarrow x=t-1=g(t)\Rightarrow g'(t)=1$. On en tire

$$I=\int(t-1)t^5\,dt=\int t^6dt-\int t^5dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+C=\frac{(1+x)^7}{7}-\frac{(1+x)^6}{6}+C=\frac{(6x-1)(1+x)^6}{42}+C.$$

Exemple 15 : $I=\int\frac{dx}{e^x-1}$: posons $y=e^x\Rightarrow e^xdx=dy\Leftrightarrow dx=\frac{dy}{e^x}=\frac{dy}{y}$. On a alors

$$I=\int\frac{\frac{1}{y}dy}{y-1}=\int\frac{\frac{1}{y^2}dy}{\frac{y-1}{y}}=\int\frac{d\frac{y-1}{y}}{\frac{y-1}{y}}=\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|=\ln|\ e^x-1\ |-x+C.$$

Les substitutions à opérer ne sont pas toujours évidentes. Cependant certaines sont assez classiques.

<u>Les substitutions trigonométriques</u>

Pour les formes en	Re*mplacer x par*	*Donc dx =*
$\sqrt{x^2-a^2}$	$a\frac{1}{\cos\theta}$	$a\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$a\tan\theta$	$a\left(\tan^2\theta+1\right)d\theta=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$a\sin\theta$	$a\cos\theta\,d\theta$

Exemple 16 : $I=\int\frac{\sqrt{4-9x^2}}{x^2}dx=3\int\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}}{x^2}$. On pose $x=\frac{2}{3}\sin\theta\ \to\ dx=\frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta$, soit

$$I=3\int\frac{\frac{2}{3}\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\left(\frac{2}{3}\cos\theta\right)d\theta=3\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta=3\int\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)d\theta=-3(\cot\theta-\theta),$$

or $\sin\theta=\frac{3}{2}x\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{1-\frac{9}{4}x^2}$ donc $I=-3\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{4-9x^2}}{\frac{3}{2}x}-3\arcsin\frac{3}{2}x=-\dfrac{\sqrt{4-9x^2}}{x}-3\arcsin\frac{3}{2}x+C$.

Exemple 17 : $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}dx$; $x=\sqrt{2}\tan\theta\Rightarrow dx=\sqrt{2}\left(\tan^2\theta+1\right)d\theta$;

$$I=\int\frac{\sqrt{2}\sqrt{\tan^2\theta+1}}{2\tan^2\theta}\sqrt{2}\left(\tan^2\theta+1\right)d\theta=\int\frac{\tan^2\theta+1}{\cos\theta.\tan^2\theta}d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos\theta.\tan^2\theta}+\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta+\int\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

On a deux intégrales à calculer :

$$I_1=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int\frac{d\sin\theta}{\sin^2\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\quad\text{car } \sin\theta=\sin\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$I_2=\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$: posons $t=\tan\frac{\theta}{2}\Rightarrow d\theta=\frac{2}{1+t^2}dt,\ \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$;

$$I_2=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}.\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{dt}{1-t}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=\ln\left|\frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{\tan\frac{\theta}{2}-1}\right|=\ln\left|\frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1-\cos\theta-\sin\theta}\right|$$

car $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ et comme $\cos\theta=\cos\left(\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}$, on a donc

$$I_2=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}+x}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}-x}\right|=\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}+x\right)}\right|=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{-\sqrt{2}}\right|$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C.$$

Et enfin $I=I_1+I_2=-\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+C$.

<u>Les substitutions algébriques</u>

* Pour les formes du type $(a+bx)^{\frac{1}{n}}$, on pose $y^n=a+bx$.

Exemple 18 : $I=\displaystyle\int\frac{xdx}{(3+4x)^{\frac{1}{4}}}$; $y^4=3+4x\Rightarrow4y^3dy=4dx$ d'où

$$I=\int\frac{\frac{y^4-3}{4}y^3dy}{y}=\frac{1}{4}\int y^2\left(y^4-3\right)dy=\frac{1}{4}\frac{y^7}{7}-\frac{3}{4}\frac{y^3}{3}+C=\frac{1}{28}(3+4x)^{\frac{7}{4}}-\frac{1}{4}(3+4x)^{\frac{3}{4}}+C.$$

Exemple 19 : $I=\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{x-1}\,dx$; on pose $x-1=t^3\Rightarrow dx=3t^2dt$ et

$$I=\int\left(t^3+1\right)^2.t.3t^2.dt=\frac{3}{10}t^{10}+\frac{6}{7}t^7+\frac{3}{4}t^4=\frac{3}{10}(x-1)^{\frac{10}{3}}+\frac{6}{7}(x-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+C.$$

* Pour les formes en $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, on pose $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Exemple 20 : $I=\displaystyle\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$; on pose $t^2=\dfrac{x+1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{t^2-1}\Rightarrow dx=-\dfrac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt\Rightarrow I=\displaystyle\int\frac{-2t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dx$

soit après décomposition en éléments simples : $\dfrac{-2t^2}{\left(t^2-1\right)^2}=\dfrac{at+b}{(t-1)^2}+\dfrac{ct+b}{(t+1)^2}$, $a=\dfrac{1}{2}, b=0, c=-\dfrac{1}{2}, d=0$,

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{t}{(t+1)^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{t}{(t-1)^2}dt=\frac{1}{4}\left[\int\frac{2t+2-2}{(t+1)^2}dt-\int\frac{2t-2+2}{(t-1)^2}dt\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int\frac{d(t+1)^2}{(t+1)^2}-2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2}-\int\frac{d(t-1)^2}{(t-1)^2}-2\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{(t+1)^2}{(t-1)^2}+\frac{2}{t+1}+\frac{2}{t-1}\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{t}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}\right|+\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2x\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right|+x\sqrt{\frac{x+1}{x}}+C.$$

<u>Les fonctions trigonométriques</u>

Fonctions rationnelles en $\cos x, \sin x$ et $\tan x$, on utilise les substitutions suivantes :

$$x=2\arctan x\Rightarrow t=\tan\frac{x}{2},\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\Rightarrow\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Exemple 21 : $I=\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\tan x-1}{\tan x+1}dx=\int\frac{t-1}{(t+1)\left(t^2+1\right)}dt\Big|_{t=\tan x}$ or

$\dfrac{t-1}{(t+1)\left(t^2+1\right)}=-\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{1}{t^2+1}$ donc

$$I=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\ln|t+1|\Big|_{t=\tan x}=\ln\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}\Bigg|_{t=\tan x}=\ln\frac{\sqrt{\tan^2 x+1}}{|\tan x+1|}=-\ln|\sin x+\cos x|.$$

<u>* Cas particulier : Produit de facteurs $\cos ax$ et $\sin ax$</u>

Utiliser les formules de Simpson inverses :

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right]$$
$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right]$$
$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right]$$

Exemple 22 :

$$I=\int\sin 3x\sin 7x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos 10x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{10}\sin 10x\right)=\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{20}\sin 10x.$$

<u>* Cas particulier : Puissances de cos et sin</u>

Linéariser, c'est à dire utiliser les formules d'Euler et le binôme de Newton pour passer de termes de la forme $\cos^n x$ à $\cos(mx)$ ou $\sin(mx)$.

Exemple 23 :

$$\int \cos^3 x dx = \int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8}\int e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix} dx = \frac{1}{8}\int e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix} \right) dx,$$

soit $\frac{1}{8}\int 2\cos 3x + 6\cos x dx = -\frac{1}{12}\sin 3x - \frac{3}{4}\sin x + C$.

1-6 : Réductions à des formes particulières

On peut souvent arriver à revenir à une forme particulière. Plusieurs exemples seront donnés ci-après. De façon générale, on utilisera les tables de primitives qui donnent les solutions pour une série de formes particulières.

Les fonctions hyperboliques

Fonction hyperbolique	Dérivée
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(\sinh x)' = \cosh x$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(\cosh x)' = \sinh x$
$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

et leurs réciproques, les fonctions arguments hyperboliques sont souvent utiles.

Fonction argument hyperbolique	Dérivée
$\arg\sinh x = (\sinh x)^{-1} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1} \right)$	$(\arg\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arg\cosh x = (\cosh x)^{-1} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1} \right)$	$(\arg\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x = (\tanh x)^{-1} = \frac{1}{2}\ln\left\| \frac{1+x}{1-x} \right\|$	$(\arg\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Un petit résumé :

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2} \right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\| \frac{x+a}{x-a} \right\|$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$		
$\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\| x + x\sqrt{x^2 \pm a^2} \right\|$	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

* **Formes en** $\frac{1}{x^2+px+q}$

– Si $p^2 - 4q < 0$, transformer en $\frac{1}{1+u^2}$.

Exemple 24 : $I=\int \frac{1}{x^2+x+1}dx=\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}dx=\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$; on pose :

$u=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow du=\frac{2}{\sqrt{3}}dx\Leftrightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}du$ d'où

$$I=\frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{u^2+1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan u=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

En utilisant les remarques précédentes on pouvait écrire :

$$I=\int \frac{1}{x^2+x+1}dx=\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

– Si $p^2-4q>0$, décomposer en fractions rationnelles (le dénominateur peut se factoriser)

Exemple 25 : $I=\int \frac{4}{2x^2+5x-3}dx=\int \frac{4}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)}=\frac{4}{7}\int \frac{dx}{x-\frac{1}{2}}-\frac{4}{7}\int \frac{dx}{x+3}=\frac{4}{7}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+3}\right|+C.$

* **Formes en** $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ou en $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

On fait les transformations nécessaires pour revenir à une forme connue.

Exemple 26 : $I=\int \sqrt{x^2+x+1}dx=\int \sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx=\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$

On pose $u=x+\frac{1}{2}\Rightarrow dx=du\Rightarrow I=\int \sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\,du$; avec les formules :

$$I=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{8}\ln\left|u+u\sqrt{u^2+a}\right|=\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}\right|.$$

Exemple 27 : $I=\int \sqrt{\frac{7}{2}+2x-2x^2}dx=\int \sqrt{4-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx=\sqrt{2}\int \sqrt{2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}dx$; $u=x-\frac{1}{2}\Rightarrow du=dx$;

$$I=\sqrt{2}\left[\frac{u}{2}\sqrt{2-u^2}+\frac{2}{2}\arcsin \frac{u}{\sqrt{2}}\right]=\sqrt{2}\left[\frac{2x-1}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+2x-2x^2}+\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Exemple 28 :

$$I=\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x-1}}dx=\int \frac{2x+1+2}{\sqrt{x^2+x-1}}dx=\int \frac{d\left(x^2+x-1\right)}{\sqrt{x^2+x-1}}+2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}=2\sqrt{x^2+x-1}+2\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}$$ et

$$I=2\sqrt{x^2+x-1}+2\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-1}\right|+C.$$

1-7 : Intégration par parties

C'est une méthode très puissante et donc très souvent utilisée.

$$\int f(x).g'(x)\,dx=f(x).g(x)-\int f'(x).g(x)\,dx$$

Exemple 29 : $I=\int \sin(\ln x)\,dx$: $y=\ln x \Rightarrow dy=\dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow dx=x\,dy=e^y\,dy \Rightarrow I=\int \sin y\, e^y dy$;

par parties : $\begin{array}{ll} u=\sin y & u'=\cos y \\ v'=e^y & v=e^y \end{array} \Rightarrow I=e^y\sin y-\int e^y\cos y\,dy$;

par parties de nouveau : $\begin{array}{ll} u=\cos y & u'=-\sin y \\ v'=e^y & v=e^y \end{array} \Rightarrow I=e^y\sin y-e^y\cos y-\int \sin y\, e^y dy=e^y\sin y-e^y\cos y-I$,

d'où enfin $2I=e^y(\sin y-\cos y) \to I=\dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)$.

Exemple 30 : $I=\int \arcsin x\,dx$: $\begin{array}{lll} f(x)=\arcsin x & \to & f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x)=1 & \to & g(x)=x \end{array}$ d'où

$$I=x\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x-\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

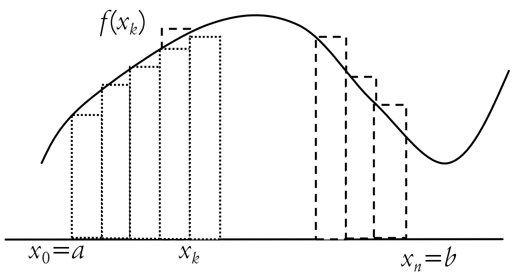
Vous avez de très nombreux exemples dans les exercices.

1-8 : Décomposition en série

Exemple 31 : $I=\int e^{-x^2}dx$; comme $e^{-x^2}=1-x^2+\dfrac{x^4}{2!}-\dfrac{x^6}{3!}+\ldots\ldots$ l'intégration terme à terme donne

$$I=\int dx-\int x^2dx+\int \frac{x^4}{2!}dx-\int \frac{x^6}{3!}dx+\ldots..=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5.2!}-\frac{x^7}{7.3!}+\ldots+C.$$

2. Intégration numérique



Comme très souvent on ne sait pas calculer les intégrales, on recourt à des méthodes de calcul approchées et/ou numériques : on en utilise trois principalement suivant le degré de précision souhaité.

2-1 : Méthode des rectangles

On divise l'intervalle d'intégration $[a\,;b]$ en n intervalles de longueur identique $\dfrac{b-a}{n}=h$, et on considère la somme des aires des rectangles au-dessus et la somme en dessous ; on obtient alors les encadrements suivants :

$$\sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} hf(x_k)$$

avec $x_k=a+hk$ lorsque la fonction est monotone croissante. L'erreur commise est de l'ordre de $\dfrac{b-a}{2h}M$ où $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$. Le lien avec les séries est évidemment très fort et on remplacera fréquemment une question d'intégrale par une question de série et réciproquement.

2-2 : Méthode des trapèzes

Beaucoup plus rentable ; on joint chaque point $(x_k, f(x_k))$ et on regarde l'aire sous chaque trapèze dont les bases sont $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$, la hauteur h. On fait donc la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}h(f(x_k)+f(x_{k+1}))=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]=\frac{f(a)+f(b)}{2}+h\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)$$

qui donne $\int_a^b f(x)dx$ avec une erreur inférieure à $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M$; $M=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

Cette méthode est très facile à appliquer en informatique, et la précision est en général très bonne. Une variante consiste à utiliser la dérivée *f'* et la tangente au milieu de deux valeurs x_k, x_{k+1}.

2-3 : Méthode de Simpson

On prend des arcs de paraboles au lieu de segments de droite entre deux points successifs (en fait on peut même travailler avec le développement de la fonction à l'ordre 2 au voisinage de chaque point) ; il faut alors diviser $[a\,;\,b]$ en $2n$ intervalles et la formule obtenue est avec $h=\frac{b-a}{2n}$:

$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{n}f(x_{2k-1})\right]$ et la précision est en h^4 : $\frac{(b-a)^4}{2880n^4}\left|f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\right|$.

En fait avec l'informatique la plupart du temps on peut se contenter de calculer la somme des valeurs de *f* sur l'intervalle choisi en multipliant par la différence des abscisses ; si cette différence est constante, il suffit de le faire à la fin.

3. Diverses questions

3-1 : Introduction à la loi normale

1. Etudier $f: x\to\exp\left(-x^2\right)$. Déterminer les points d'inflexion de C_f. Tracer C_f.

2. Montrer que *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier naturel n il existe P_n polynôme de degré n tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{-x^2}$. Ces polynômes s'appellent polynômes d'Hermite.

3. Soit $F(x)=\int_1^x \exp(-t^2)dt$. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t\geq 1$, on a $\exp\left(-t^2\right)\leq\exp(-t)$. En déduire que F est majorée sur $\mathbb{R}$.

Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty}\exp(-t^2)dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2)dt$ sont convergentes.

4. On admet que $\int_0^{+\infty}\exp(-t^2)dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2)dt$.

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2/2)dt$ (changement de variable $y=\frac{t}{\sqrt{2}}$) puis $\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt$ (changement de variable linéaire).

5. Soit $G(x)=\int_0^x t\exp(-t^2)dt$. Calculer $G(x)$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty}t\exp(-t^2)dt$ est convergente.

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}t\exp(-t^2)dt$ est convergente et vaut 0.

6. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp(-t^2)\,dt$ est convergente et calculer sa valeur à l'aide d'une intégration par parties.

Le résultat du 4., $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)dt = \sqrt{2\pi}$ est à connaître.

3-2 : Extension de la notion d'intégrale.

Exercice 1

Justifier l'existence de $I = \int_0^1 x^2 \ln(x)\,dx$ et calculer sa valeur. Mêmes questions pour $\int_0^1 \ln(x)\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Exercice 2

Rappel : une fonction f majorée sur $[a\ ;\ b[$ et croissante sur $[a\ ;\ b[$ admet une limite finie en b (b étant un nombre réel > a ou $+\infty$). Faites un dessin pour vous en convaincre.

Démontrer : pour tout t de $[1\ ;\ +\infty[$, $\frac{1}{1+t^2} \le \frac{1}{t^2}$.

En déduire que la fonction φ : $[1\,;+\infty[\,\to \mathbb{R}$, définie par $x \to \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$, puis que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

Exercice 3

Soit n un entier naturel. Etablir successivement

* Pour tout y différent de 1 : $\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{n} y^k + \frac{y^{n+1}}{1-y}$;
* $\forall x \in \mathbb{R}\quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$;
* $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx$ (on admet que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$) ;
* $\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \le \frac{1}{2n+3}$.

Déduire de ce dernier résultat la belle formule : $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ et un algorithme rédigé en turbo-pascal destiné à calculer une valeur approchée de π à une précision donnée près.

3-3 : Suites définies par une intégrale.

Exercice 1

Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx$.

1. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $(2n+1)I_n = -2nI_{n-1}$.

2. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 2

p et q étant deux nombres entiers positifs ou nuls, on pose : $B(p,q)=\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Comparer $B(p, q)$ et $B(q, p)$.

2. Etablir la relation : $B(p,q)=\dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$ ($p\geq 1$).

3. Calculer $B(0, n)$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$; en déduire $B(p, q)$.

Exercice 3

Pour n entier naturel, on pose : $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$.

1. Quelle est la signification géométrique de I_0 ? En déduire la valeur de I_0.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que pour tout $n\geq 2$, on a : $I_n=\dfrac{n-1}{n+2}I_{n-2}$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n (on distinguera suivant la parité de n).
4. Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante et que cette suite converge vers 0.
5. Montrer que $n(n+1)(n+2)I_n I_{n-1}$ est indépendant de n et calculer sa valeur ; en déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n : $u_n(a)=\int_0^1 x^n\exp(a(1-x))\,dx$.

1. Calculer $u_0(a)$.
2. Convergence de la suite $(u_n(a))$. Soit $a>0$ donné.

a. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $0\leq u_n(a)\leq\dfrac{e^a}{n+1}$.

b. Montrer que la suite $(u_n(a))$ est décroissante.

c. Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Forme explicite de $u_n(a)$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre $u_n(a)$ et $u_{n+1}(a)$.

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n(a)=\dfrac{n!}{a^{n+1}}\left[\exp(a)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}\right]$.

3-4 : Comparaison série et intégrale

Exercice 1

La série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente : démonstration par comparaison avec une intégrale généralisée. Démontrer successivement :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \forall t\in[n\,;n+1]\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{t}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\ \text{ puis }\ \frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq\int_n^{n+1}\frac{dt}{\sqrt{t}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{enfin pour tout } N\geq 2 :\ \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\int_1^N\frac{dt}{\sqrt{t}}\leq\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En déduire le résultat annoncé. Illustration graphique.

Exercice 2 Série de Bertrand.

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

2. En vous inspirant de l'exercice précédent, montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^2}$, $n \geq 2$, est convergente.

Exercice 3

Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) par : $S_n = 1+\frac{1}{2^{1/3}}+\frac{1}{3^{1/3}}+\ldots+\frac{1}{n^{1/3}}$.

1. Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement : $\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$.

2. En déduire l'encadrement : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^{n} \frac{dx}{x^{1/3}} + 1$.

3. Que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4. A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par : $T_n = 1+\frac{1}{2^{4/3}}+\frac{1}{3^{4/3}}+\ldots+\frac{1}{n^{4/3}}$ est convergente.

3-5 : Sommes de Riemann

Exercice 1

Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5}$; $n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$ (rappel : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$).

Exercice 2

(esg 94 2e épreuve)

Soit k un entier naturel non nul et soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n+1}\right)^k$.

1. Déterminer la limite de cette suite pour $k = 1$, $k = 2$ puis $k = 3$.
2. Pour k quelconque > 0 déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 3

Soit n un entier ≥ 2 et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$. Démontrer :

1. $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}$.
2. $u_n \leq \int_{1/n}^{1} \ln x\,dx \leq u_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.
3. $\frac{1}{n} - 1 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.
4. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.
5. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.

Exercice 4

Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{2^k}$.

1. Montrer que pour tout $\forall k\in\{0,\ldots,n-1\}$: $\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k}\le\int_{k/n}^{(k+1)/n}2^t dt\le\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^{k+1}}$.

2. En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3. Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit f la fonction définie pour tout x strictement positif par : $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x-\frac{1}{2}$.

1. Etudier les variations de f. Montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.

2. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$.

a. Etablir, pour tout entier j vérifiant $1\le j\le n$, les inégalités : $\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right)\le\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}}f(x)dx\le\frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$.

b. en déduire l'encadrement : $\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)dx\le S_n\le\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)dx$.

c. Montrer les inégalités : $0\le\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\le\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)dx$.

d. Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, on a l'égalité : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum_{j=1}^{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n. En déduire la limite : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

4. Ecole Supérieure de commerce de Lyon

4-1 : escl 88

1. Vérifier que $\forall x\in[0\,;+\infty[\quad 0\le\ln(1+x)\le x$.

En déduire la limite quand l'entier n tend vers $+\infty$ de $\int_0^1\ln(1+x^n)dx$.

2. Soit u la suite réelle définie par $u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n=\frac{\ln 2}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)dx$; on pourra utiliser une intégration par parties. En déduire la limite de u_n et celle de nu_n quand n tend vers $+\infty$.

4-2 : escl 89

Soit I la suite de terme général $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1. a. Calculer I_0 et I_1.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \le \frac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite I.

2. Calcul d'une valeur approchée de I_{15}.

a. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=(n+1)I_n-\frac{1}{e}$, et $I_n=\frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!}+\frac{n!}{(n+p)!}I_{n+p}$.

b. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $0\le I_n-\frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!}\le\frac{n!}{(n+p+1)!}\le\frac{1}{(n+1)^{p+1}}$.

c. Comment peut-on choisir p pour que $0\le I_{15}-\frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!}<10^{-6}$?

En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de I_{15} à 10^{-6} près.

c*. Ecrire en turbo-pascal un programme qui affiche une valeur de $\frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!}$. p est fourni par l'utilisateur. On veillera à minimiser les calculs.

4-3 : escl 90

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $J_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. Quelle est la dérivée de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$? Calculer I_0.

2. Calculer I_1.

3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$. Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. Etablir à l'aide d'une intégration par parties que $I_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}+\frac{1}{n+1}J_n$.

Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

4-4 : escl 91

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on pose $I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)dx$ et $J_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$.

1. Etude de la suite $(J_n)_{n\ge1}$.

a. Calculer J_1.

b. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1, $0\le J_n\le\frac{1}{n+1}$.

c. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\ge1}$.

2. Etude de la suite $(I_n)_{n\ge1}$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$I_n=\frac{\ln(2)}{n+1}-\frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$

b. Etudier la convergence de la suite $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$.

c. Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

4-5 : escl 92

Soit $f:\left]1\,;+\infty\right[\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

2. Montrer que pour tout entier k tel que $k\geq 3$: $f(k)\leq\displaystyle\int_{k-1}^{k}f(x)dx\leq f(k-1)$.

Pour tout n entier tel que $n\geq 2$, on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}f(k)$.

3. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$: $S_n-\dfrac{1}{2\ln(2)}\leq\displaystyle\int_2^n f(x)dx\leq S_n-\dfrac{1}{n\ln(n)}$.

b. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$: $\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)\leq S_n\leq\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)+\dfrac{1}{2\ln 2}$.

c. Etablir que $S_n\sim_{+\infty}\ln(\ln n)$.

Pour tout n entier tel que $n\geq 2$, on note $u_n=S_n-\ln(\ln(n+1))$ et $v_n=S_n-\ln(\ln n)$.

4. En utilisant le résultat de la question 2. montrer que les suites $\left(u_n\right)_{n\geq 2}$ et $\left(v_n\right)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note l leur limite commune.

5. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$: $0\leq v_n-l\leq\dfrac{1}{n\ln n}$.

b. En déduire une valeur approchée de l à 10^{-2} prés.

b*. Ecrire un programme en turbo-pascal qui utilise le résultat du a. pour calculer et afficher une valeur approchée de l à moins de e près, e étant un nombre réel positif fourni par l'utilisateur.

4-6 : escl 93

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-x)^n\exp(-x^2)dx$ et $J_n=\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n\exp(-x^2)dx$.

1. a. Former le tableau de variations de $f:[0\,;1]\to\mathbb{R},\ x\to x\exp\left(-x^2\right)$.

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$: $0\leq J_n\leq\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2e}}$.

c. Etudier la convergence de la suite $\left(J_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout n de $\mathbb{N}$: $I_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+1}J_{n+1}$.

En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

4-7 : escl 94

On pose pour tout entier naturel non nul n : $\mathrm{I_n}=I_n=\displaystyle\int_1^e(\ln x)^n dx$ et $I_0=e-1$.

1. a. Etablir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.

b. Montrer, pour tout entier naturel n : $I_n\geq 0$.

c. Déduire des questions a. et b. que, pour tout entier naturel n : $\dfrac{e}{n+1}$.

d. Quelle est la limite de la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

e. Montrer : $I_n \sim_{+\infty} \dfrac{e}{n}$.

2. Soit a un réel différent de I_0 ; on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e-(n+1)u_n \end{cases}$.

Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. (On pourra considérer la suite (D_n) définie par $D_n = |u_n - I_n|$)

4-8 : escl 95

On définit la fonction $f : [2\,;+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1. Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{1}{x} \le f(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x)dx$.

a. Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

b. On définit la fonction $F : [2\,;+\infty[\to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Calculer la dérivée de F et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$.

a. Montrer que : $I_{n+1} \le S_n \le I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b. Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

4-9 : escl 96

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$.

b. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n : $I_n = \dfrac{1}{e(n+1)} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$.

3. a. En déduire pour tout entier naturel n : $0 \le I_n - \dfrac{1}{e(n+1)} \le \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

b. Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

4-10 : escl 98

1. Soit $-1 \le x < 1$.

a. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1\,;1[$: $\dfrac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1\,;x]$: $\left|\dfrac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| \le \dfrac{|t|^{n+1}}{1-x}$.

c. Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\left|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \le \frac{1}{(n+2)(1-x)}$.

d. En déduire que la série $\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}$ [sic] converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

2. Un joueur lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile.

S'il lui a fallu n lancers (n entier non nul) pour obtenir ce pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant. Quelle est la probabilité que ce joueur gagne ?

4-11 : escl 98 bis (sujet de secours)

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{x^4+1}$.

1. Vérifier que f est paire et étudier les variations de f.

2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_x^{2x}\frac{1}{t^4+1}dt$ existe.

On définit la fonction réelle F sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{t^4+1}dt$.

3. a. Etudier le signe de F.

b. Etudier la parité de F.

4. a. Montrer, pour tout réel x strictement positif $\frac{x}{16x^4+1} \le F(x) \le \frac{x}{x^4+1}$.

b. En déduire les limites de F en $-\infty$ et $+\infty$.

5. a. Vérifier, pour tout réel x : $\left(1-14x^4\right)F'(x)\ge 0$.

b. Dresser le tableau des variations de F sur $[0\,;\,+\infty[$. On admettra qu'une valeur approchée de $14^{-1/4}$ est 0,52 et qu'une valeur approchée du maximum de F sur $[0\,;\,+\infty[$ est 0,37.

c. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé (unité 5 cm).

6. a. Montrer, pour tout réel x strictement positif : $\frac{x}{16x^4(16x^4+1)} \le \int_x^{2x}\frac{dt}{t^4}-F(x) \le \frac{x}{x^4(x^4+1)}$.

b. En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\frac{7}{24x^3}$ au voisinage de $+\infty$.

7. a. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall t\ge 0$, $\left|\frac{1}{1+t^4}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k}\right| \le t^{4n+4}$.

b. En déduire que, pour tout réel x de $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, la série $\sum_{n\ge 0}(-1)^n\frac{2^{4n+1}-1}{4n+1}x^{4n+1}$ converge.

c. Montrer, pour tout réel x de $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$: $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{4n+1}-1}{4n+1}x^{4n+1}$.

4-12 : escl 2000

On considère la fonction $f :]-1\,;\,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$, par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\in]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[\end{cases}.$$

1. a. Montrer que f est continue sur $]-1\,;\,+\infty[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$. Pour tout réel x de$]-1\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

d. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1\,;+\infty[$.

2. Montrer : $\forall x>-1,\ \dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)\leq 0$.

En déduire les variations de f. On précisera les limites de f en -1 et en $+\infty$.

3. Montrer que , pour tout x de l'intervalle $]-1/2\,;\,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$ existe.

4. On considère la fonction F définie, pour tout x de $]-1/2\,;\,+\infty[$, par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$.

a. Montrer que F est dérivable sur $]-1/2\,;\,+\infty[$et que F est croissante .

b. Montrer : $\forall x\in]0\,;+\infty[,\ F(x)\geq xf(2x)$.

c. En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$ est convergente .

En déduire que la fonction F admet une limite finie en $-\dfrac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

4-13 : escl 2001, extrait

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t\leq 0\end{cases}$.

a. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_n(t)=0$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente.

b. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall X\in[0\,;+\infty[,\ \displaystyle\int_0^{x} f_n(t)\,dt=-\frac{e^{-x}x^n}{n!}+\int_0^{x} f_{n-1}(t)\,dt$.

c. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt=1$.

4-14 : escl 2002

On considère, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n: $[0\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie, pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, par : $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k}=-x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{-x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n}}{2n}$.

I. Etude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,+\infty[$: $P'_n(x)=\dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$, où P'_n désigne la dérivée de P_n.

2. Etudier, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $P_n(1)<0$.

4. a. Vérifier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;\,+\infty[$: $P_{n+1}(x)=P_n(x)+x^{2n+1}\left(-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{x}{2n+2}\right)$.

b. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $P_n(2)\geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1\,;\,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que $1 < x_n \leq 2$.

6. Ecrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Etablir, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;\,+\infty[$: $P_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt$.

2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt=\int_0^1\frac{1-t^{2n}}{t+1}dt$.

3. Démontrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1\,;\,+\infty[$: $t^{2n}-1\geq n\left(t^2-1\right)$.

4. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}dt\geq\frac{n}{2}(x_n-1)^2$, puis : $0<x_n-1\leq\dfrac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$.

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4-15 : escl 2004, extrait

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie, pour tout $t\in\mathbb{R}$ par : $f(t)=\dfrac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$, et l'application $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $G(x)=\displaystyle\int_{-x}^{+x}f(t)dt$.

a. Montrer que G est impaire.

b. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout x réel.

c. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

d. Etudier le sens de variation de G et dresser le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de G en $-\infty$ et en $+\infty$.

5. Annales E.S.C.

5-1 : esc 97

Soit n un entier naturel non nul. On pose : In = $I_n=\displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.

2. a. Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

b. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

c. Montrer que, pour tout $x\in[1\,;e]$: $\ln x\leq\dfrac{x}{e}$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1}=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{n+1}{3}I_n$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

5-2 : esc 98

Soit $I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)dx$, $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer I_0.

2. a. Montrer que $I_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Etablir que la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. a. Justifier l'inégalité : $x^n\ln\left(1+x\right)\leq x^n$ pour tout x de [0, 1].

b. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$.

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4. a. En utilisant une intégration par parties, montrer que In = $I_n=\dfrac{\ln(2)}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

b. Montrer que 0 ≤ $0\leq\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx\leq\dfrac{1}{n+2}$ et en déduire un encadrement de I_n.

c. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

5-3 : esc 2001, extrait

1. On pose pour tout entier naturel n non nul l'intégrale : $I_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln t}{t^n}dt$.

a. Calculer pour $A\geq 1$ l'intégrale $\int_1^A\dfrac{\ln t}{t}dt$ et en déduire que I_1 est divergente.

b. Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier naturel $n\geq 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.

c. Etudier les variations de la fonction f définie sur [2 ; $+\infty$ [par $f(t)=\dfrac{\ln t}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. (On donne $\sqrt{e}\approx 1{,}65$)

d. En déduire grâce à I_2 que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{\ln k}{k^2}$ converge (on ne cherchera pas à calculer cette série).

5-4 : esc 2002

On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : fn (x) = $f_n\left(x\right)=\dfrac{n\ln x}{n+1+nx^2}$ pour tout réel x strictement positif.

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par : $h\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ pour tout x strictement positif.

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

2. a. Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

b. Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ est convergente. Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre : $K=\int_1^{+\infty} h(x)dx$.

3. a. Montrer, grâce au changement de variable $u=\frac{1}{x}$ que $K=-\int_0^1 h(u)du$.

b. En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} |h(x)|dx$ converge et est égale à 2K.

c. En déduire également que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et vaut 0.

4. a. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $|f_n(x)|\le|h(x)|$. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

b. Montrer que pour tout réel x strictement positif, h(x) – fn (x) = $h(x)-f_n(x)\frac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

c. En déduire successivement : $0\le\int_1^{+\infty}(h(x)-f_n(x))dx\le\frac{K}{n+1}$ puis $-\frac{K}{n+1}\le\int_0^1(h(x)-f_n(x))dx\le 0$.

d. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx=0$.

5-5 : esc 2004

On considère pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(t)=\frac{e^{-t}}{1+t^n}.$$

1. a. Justifier la dérivabilité de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$.

b. Etudier les variations de la fonction f_n, préciser sa limite en $+\infty$ et sa valeur en 0.

2. Etude d'une suite d'intégrales impropres.

On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $I_n=\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ (Il est démontré dans le a. que chacune de ces intégrales est convergente).

a. Montrer que pour tout réel t strictement positif, $f_n(t)\le\frac{1}{t^n}$. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$, puis de l'intégrale I_n.

b. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(t)dt=0$.

c. Montrer que pour tout réel t positif, $0\le e^{-t}-f_n(t)\le t^n$.

d. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt=1-\frac{1}{e}$.

e. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. Etude d'une fonction définie par des limites.

a. Pour tout réel t positif, déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$. (On distinguera $t<1$, $t=1$, $t>1$).

b. Dès lors, on définit sur $\mathbb{R}_+$ une fonction h par $h(t)=\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

Donner la courbe représentative de h dans un repère orthonormé ($e^{-1}\cong 0,37$). h est-elle continue ?

c. Etudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)dt$. A-t-on ici $\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$?

6. Annales EDHEC

6-1 : edhec 96, exercice 1

On considère la suite (d_n) définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $d_{n+1}=n\left(d_n+d_{n-1}\right)$.

1. a. Calculer d_2, d_3, d_4, d_5.

b. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $d_{n+1}=(n+1)d_n+(-1)^{n+1}$.

2. On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n=\dfrac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^t\,dt$.

a. Calculer I_0, puis exprimer, pour tout entier naturel n, I_{n+1} en fonction de I_n.

b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $ed_n=n!\left(1+(-1)^n I_n\right)$.

c. Montrer alors que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|d_n-\dfrac{n!}{e}\right|\le\dfrac{1}{n+1}$.

d. Vérifier que cette dernière inégalité détermine parfaitement d_n pour $n\ge 2$, puis retrouver la valeur de d_5 obtenue à la deuxième question et calculer d_{10}. On donne $\dfrac{5!}{e}\approx 44,15$ et $\dfrac{10!}{e}\approx 1334960,92$ à 5.10^{-3} près.

6-2 : edhec 96

1. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t)>\dfrac{t}{1+t}$.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$.

a. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

b. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. a. Pour tout réel x, vérifier que $f(x)=1-f'(x)-\dfrac{e^x}{1+e^x}$. En déduire, en fonction de f, une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et donner sa valeur.

4. Soit a un réel et g la fonction définie par $g(x)=0$ si $x < 0$ et $g(x)=af(x)$ si $x\ge 0$. Déterminer a pour que g puisse être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

6-3 : edhec 98, extrait du problème

On considère la fonction définie pour tout $x\ge 0$ par $f(x)=1-e^{-x}$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\le x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x : $e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k x^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}e^{-t}dt$.

b. En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

6-4 : edhec 2002

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. a. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Etudier le signe de $f(x)$.

2. Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.

a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \dfrac{-x\,h(x)}{1+x^2}$.

b. Etudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx -0,48$).

c. En déduire le signe de $g(x)$.

4. On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

a. Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \in [0\,;1]$.

b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6-5 : edhec 2003

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a. Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.

b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \dfrac{e^{1/n}}{n^2}$.

4. Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

6-6 : edhec 2004

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}\,dt$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.

2. Calculer u_0 et u_1.

3. a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ln 2$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c. Donner la limite de la suite (u_n).

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

a. Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.

b. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

7. Annales ECRICOME

7-1 : ecricome 91

Pour n appartenant à $\mathbb{N}$ on pose : $u_n = \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^n}\,dx$.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente.

3. Montrer que pour tout X appartenant à [0 ; 1], on a : 1 – X ≤ $1-X \leq \sqrt[3]{1-X} \leq 1-\frac{1}{3}X$. Interpréter graphiquement.

4. En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

7-2 : Ecricome 93

Soit x un réel strictement positif. On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+x+1}.$$

On se propose d'étudier la limite $S(x)$ de la somme $S_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Pour tout entier naturel p on pose : $f_p(t) = \begin{cases} \frac{t^{x+p}}{1+t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, et $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t)\,dt$. Montrer que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $I_p(x)$ existe.

2. Montrer que pour tout réel $t \in [0 ; 1]$, on a : $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$.

3. Déduire de ce qui précède que l'on a $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt = S_n(x) + R_n(x)$ où $R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}\,dt$.

4. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel n : $0 \le 0 \le \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \le \frac{1}{n+2}$.

5. Conclure que l'on a : $S(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.

6. Etude du cas particulier où $x = \frac{1}{2}$.

a. En utilisant le changement de variable $u = t^{1/2}$, calculer S(1/2) (indications : $u^2 = 1 + u^2 - 1$ et on admet que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$).

b. En déduire que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

7-3 : D'après ecricome OG 93

1. Soit f la fonction définie sur]0 ; 1] par $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$.

Montrer que f est continue, décroissante, positive ou nulle sur]0 ; 1]. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2. Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a. Pour $k \in \{2, ..., n\}$, montrer que $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx$.

b. Pour $k \in \{1, ..., n-1\}$, montrer que $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \le \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

c. Déduire du a. et du b. que $\int_{1/n}^{1} f(x)dx \le S_n \le \int_{1/n}^{1} f(x)dx + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. a. Soit $a > 0$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_a^1 f(x)dx$. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

b. Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$?

c. Déduire alors du 2. c. la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Ecrire en turbo-pascal un programme qui :

- déclare la fonction f ;
- utilise cette fonction pour calculer et afficher la valeur de S_n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 fourni par l'utilisateur.

5. Déduire du 3. c. la limite de Pn = $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$ quand n tend vers $+\infty$.

7-4 : ecricome 98 (extrait)

1. Soit g l'application de]0 ; $+\infty$ [dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \to g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}$.

a. Montrer que g est dérivable sur]0 ; $+\infty$ [et expliciter sa dérivée.

b. Dresser le tableau de variation de g avec ses éventuelles limites aux bornes.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \to f(x) = e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$. A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel x positif, on a $\int_0^x f(t)dt = g\left(e^{x}\right) + 2\ln 2$.

7-5 : ecricome 99 (extrait)

On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$ converge et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Soit α un réel strictement positif ; si x est un élément de $\mathbb{R}_+$, on pose : $I(x) = \int_0^x 2u^2 e^{-u^2}du$ et $J(x) = \int_0^x t^2 e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}dt$.

a. A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, $J(x)$ en fonction de $I\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$: $I(x) = \int_0^x e^{-u^2}du - xe^{-x^2}$.

c. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}dt$ converge et vaut $\dfrac{\alpha^3\sqrt{\pi}}{4}$.

7-6 : ecricome 2002

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n\ln(1+x)$.

<u>I. Etude des fonctions f_n</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1. Etudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Etude du cas particulier $n = 1$.

a. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1\,;\,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.

b. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1\,;\,+\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

a. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1\,;\,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

b. En déduire les variations de f_n sur $]-1\,;\,+\infty[$ (on distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

<u>II. Etude d'une suite.</u>

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

A. Calcul de U_1

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que : $\forall x \in [0\,;\,1],\ \dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}dx$.
3. Montrer que $U_1 = 1/4$.

B. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on ne demande pas sa limite).

3. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq U_n\leq\dfrac{\ln 2}{n+1}$.

4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

C. Calcul de U_n pour $n\geq 2$

Pour $x\in[0\,;1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $S_n(x)=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$.

1. Montrer que $S_n(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n=\frac{\ln 2}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k+1}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

7-7 : ecricome 2004

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par : $\begin{cases} u_0=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \\ \forall n\in N,\ u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx\end{cases}$.

A. Etude de f

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
5. Donner l'allure de C_f.
6. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0\,;1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ tel que $f(x)=y$.
8. Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}.

B. Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par : $F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Pour tout réel λ strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $\lambda\leq x\leq 2\lambda$ et $0\leq y\leq f(x)$. Ainsi $A(\lambda)=\displaystyle\int_\lambda^{2\lambda}f(x)dx$.

1. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ x+\sqrt{x^2+1}>0$. En déduire l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.

5. Exprimer $A(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

C. Etude de la suite (u_n)

1. Calculer u_0 et u_1.

2. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3 (on pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}=x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) .

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente (on ne cherchera pas sa limite dans cette question).

5. Justifier l'encadrement suivant : $\forall x\in[0\,;1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ 0\le\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\le x^n$.

En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

8. Annales ISC-ESLSCA

8-1 : eslsca 93

On pose $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ et $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$.

1. Montrer que ces intégrales ont un sens lorsque x est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

2. Déterminer explicitement la fonction g.

3. a. Montrer que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer sa fonction dérivée f'.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to1}f'(x)$?

c. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

4. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to1}[f(x)-g(x)]$ et en déduire $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

b. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 1.

5. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer l'allure de la branche infinie de (C) et enfin donner l'allure de (C).

8-2 : eslsca 95

1. Pour tout réel $x>-1$ et pour tout entier naturel n, on pose $I_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$.

a. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout entier n et tout réel $x>-1$, on a :

$$I_{n+1}(x)=-I_n(x)+\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

b. Calculer $I_0(x)$, en déduire $I_1(x)$, puis $I_2(x)$.

2. Prouver par récurrence que, pour tout réel $x>-1$,et pour tout entier $n>0$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\int_0^x\frac{(-1)^n(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt.$$

(*Remarque* : ces deux questions prouvent en fait la formule de Taylor avec reste intégral dans un cas particulier ; celle-ci étant dorénavant au programme, entraînez--vous à l'appliquer pour obtenir directement le 2.)

3. Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite $u_n(x)$ définie par $u_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(-1)^n(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt$.

Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $\left|u_n(x)\right| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, en déduire la limite de la suite $u_n(x)$.

4. Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite $(v_n(x))$ définie pour $n > 0$ par

$$v_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n(x)$) converge et déterminer sa limite.

8-3 : eslsca 96

Partie 1

Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}^*$ on pose : $f_n(x) = x^n e^{-\frac{1}{x}} = x^n \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que la restriction de f_n à $]0\,;\,+\infty[$ peut être prolongée par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable ?

2. Déterminer les limites éventuelles de f_n en $-\infty$, $+\infty$ et en 0 par valeurs inférieures.

3. Etudier, suivant les valeurs de n les variations de f_n. En désignant par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé, préciser les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}). Tracer dans le même repère (Co), (C_1),(C_2), (C_3).

Partie 2

Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, I_n est bien défini. Etudier la monotonie de la suite (I_n).

2. A l'aide d'un encadrement simple, montrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Pour n dans $\mathbb{N}$, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

8-4 : eslsca 98

m et n étant deux entiers naturels quelconques, on pose : $I_{m,n} = I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $m \geq 1$, on a $I_{m,n} = \dfrac{m}{n+1} I_{m-1,\,n+1}$.

2. Calculer $I_{0,\,m+n}$ et en déduire la valeur de $I_{m,\,n}$ pour tout couple d'entiers naturels m et n.

3. a. Calculer, pour tout entier naturel n, $I_{n,\,n}$.

b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n,n} \leq \dfrac{1}{4^n}$.

8-5 : eslsca 99

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = -x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On pose, pour n entier naturel non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, l'intégrale I_n est bien définie.

b. Calculer I_1 (on pourra, pour $\varepsilon > 0$, effectuer une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(x)dx$, puis faire tendre ε vers 0).

2. On pose, pour h et k entiers naturels non nuls, $J_{h,k} = \displaystyle\int_0^1 x^h(\ln x)^k\,dx$ et $J_{h,0} = \displaystyle\int_0^1 x^h dx$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $h \geq 1$ et $k \geq 1$, on a $J_{h,k} = -\frac{k}{h+1} J_{h,k-1}$.

b. Calculer $J_{h,0}$. En déduire la valeur de $J_{h,k}$.

c. Calculer I_n.