Concours Geipi et ENI

Correction sur http://www.geipi.org/resultats-corriges/index.htm

1. Exercice 1

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ orthomormé, direct. Soient A le point d'affixe $z_A = 1+3i$ et B le point d'affixe $z_B = 2$.

1. Dessiner le triangle OAB.

2. Expliquer pourquoi le triangle OAB est isocèle en A.

3. On considère le point C symétrique du point O par rapport au point A et le point D symétrique du point B par rapport au point O.

Placer les points C et D sur la figure du 1.a. Déterminer les affixes z_C et z_D des points C et D.

4. On considère le point E, image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$. Placer le point E sur la figure du 1. Déterminer l'affixe z_E du point E.

5. On désigne par F le barycentre des points pondérés $(A\,;\,2)$, $(B\,;\,-3)$ et $(D\,;\,2)$. Déterminer l'affixe z_F du point F. Placer le point F sur la figure du 1.

6. Justifier que les points B, E et F sont alignés.

7. On note Z le complexe défini par : $Z = \dfrac{z_F - z_C}{z_B - z_C}$.

a. Déterminer le réel a tel que $Z = ai$. On détaillera les calculs.

b. Déterminer le module $|Z|$ et un argument $\arg(Z)$ de Z.

c. En déduire la nature du triangle CBF. On justifiera la réponse.

2. Exercice 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Soit C la courbe représentant f dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé (1 cm d'unité).

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b. En déduire que C admet deux asymptotes D_1 et D_2 dont on donnera les équations.

2. a. Soit g la fonction définie, pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$, par : $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Justifier que sa dérivée g' vérifie, pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$: $g'(x) = f(x)$

b. f' désigne la dérivée de f. Justifier que, pour tout réel x de $]1\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}.$$

c. Dresser le tableau des variations de f.

d. Compléter le tableau suivant, en donnant des valeurs approchées à 0, 01 près des images $f(x)$.

x	1,1	1,25	1,5	1,75	2	4
$f(x)$						

e. Tracer la courbe C, D_1 et D_2 dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

3. Soient deux réels a et b tels que $1 < a < b$. On définit l'intégrale : $J(a,b)=\int_a^b\left[f(x)-1\right]dx$.

a. En utilisant la question 2. a., justifier que l'on a :

$$J(a,b)=\sqrt{b^2-1}-\sqrt{a^2-1}-b+a\,.$$

b. Déterminer, en fonction de b, la limite : $I(b)=\lim\limits_{a\to 1^+} J(a,b)$.

4. a. On admet que, pour tout réel $b > 1$, on a : $\sqrt{b^2-1}-b=\dfrac{-1}{\sqrt{b^2-1}+1}$. Déterminer la limite $K=\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$.

b. Donner une interprétation géométrique de ce que représente K.

3. *Exercice 3*

Un certain concours d'entrée dans une école d'ingénieurs consiste en plusieurs épreuves :

- Après examen de leur dossier scolaire, 15% des candidats (les meilleurs) sont admis directement sans passer d'autres épreuves.

- Les autres candidats, non admis sur dossier, passent une épreuve écrite. On estime que 60% des candidats réussissent cette épreuve écrite et les autres sont recalés.

- Les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont alors convoqués pour passer une épreuve orale. Les candidats réussissant l'épreuve orale sont alors admis. On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On considère les événements suivants :

- *D :* « Le candidat est admis sur dossier »
- *E :* « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite »
- *O :* « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale »
- *A :* « Le candidat est admis »

On note $\overline{E}$ l'événement contraire de E.

On note $P(D)$ la probabilité de l'événement D et $P_E(O)$ la probabilité de l'événement O sachant que l'événement E est réalisé.

1. Faire un arbre pondéré décrivant les diverses étapes de la sélection.

2. a. Calculer les probabilités suivantes : $P(D)$, $P_{\overline{D}}(E)$, $P_E(O)$.

b. Déterminer la probabilité $P(E)$ qu'un candidat passe et réussisse l'épreuve écrite et la probabilité $P(O)$ qu'un candidat passe et réussisse l'épreuve orale.

c. On note p la probabilité $P(A)$ qu'un candidat soit admis dans cette école d'ingénieurs. Justifier que p vaut 0, 32.

3 Cinq amis décident de passer ce concours (les résultats obtenus par chaque candidat sont indépendants les uns des autres).

a. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_1 que les cinq soient admis. Puis donner une valeur approchée de P_1 à 10^{-4} près.

b. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_2 qu'au moins un des cinq soit recalé. Puis donner une valeur approchée de P_2 à 10^{-4} près.

c. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_3 qu'au moins un des cinq soit admis. Puis donner une valeur approchée de P_3 à 10^{-4} près.

d. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_4 que trois exactement soient admis. Puis donner une valeur approchée de P_4 à 10^{-4} près.

4. Par hasard, je rencontre un candidat qui me dit avoir été admis dans cette école d'ingénieurs. Quelle est la probabilité $P_A(D)$ qu'il ait été admis sur dossier ?

4. Exercice 4

On considère la suite définie, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, par $u_n = e^{-n}$.

1. a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $0 < u_n \leq 1$.

2. Étudier le signe de la fonction h définie, pour tout réel t de $]0\,;+\infty[$, par : $h(t) = 1 - \ln t$.

3. Soit la fonction g définie, pour tout réel t de $]0\,;+\infty[$, par : $g(t) = t(2 - \ln t)$.

a. Déterminer $g'(t)$ où g' est la dérivée de g. On détaillera le calcul.

b. En déduire la primitive H de la fonction h qui s'annule en e^2. On justifiera la réponse.

4. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, par : $v_n = \int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} (1 - \ln t)\,dt$.

a. Justifier que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a : $v_n \geq 0$.

b. À l'aide de la question 3. b., calculer v_n en fonction de n. On détaillera le calcul.

c. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

5. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.