

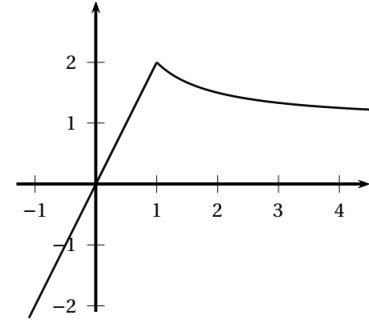
Concours Fesic/Puissance 11

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, -1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour un exercice entièrement juste.

Exercice 1 : Étude de fonction

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} de courbe représentative (Γ) dont la fonction dérivée f' a pour représentation graphique la courbe ci-contre.

On admet que $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.



- La courbe (Γ) admet une asymptote horizontale en $+\infty$.
 - Pour tout $x \in]-\infty; 1]$, $f(x) = x^2$.
- On suppose dans le c. et d. que (Γ) passe par $\Omega(1; 1)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
 - $f(2) = \ln 2 + 2$.

Exercice 2 : Fonction définie par deux paramètres

Soit a et b deux réels strictement positifs fixés et f la fonction définie par $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ sur $I = [-a; a]$ de courbe représentative (Γ) .

- Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{b}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$.
- Si $a = 6$ et $b = 3$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) > 3$.
- Si $a = b = 1$, alors l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet deux solutions sur I .
- Si $a = b$ alors (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = x - 5$.

Exercice 3 : Bases de la géométrie

Les questions suivantes sont indépendantes.

- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si la droite (D) a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$, alors le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est un vecteur directeur de (D) .

- Soit $a > 0$. Si ABC est un triangle équilatéral direct de côté a , alors $\overline{AB} \cdot \overline{CA} = \frac{a^2}{2}$.

Pour le c. et le d., on suppose que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- Le nombre $(1 + i)^4$ est un nombre réel négatif.
- L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z + 4 - 3i| = 5$ est un cercle passant par l'origine du repère.

Exercice 4 : Questions de logique

Agnan, Clotaire, Eudes, Geoffroy et Rufus ne s'entendent pas tous très bien. Pour la fête d'anniversaire qu'organisait le petit Nicolas, ils avaient prévenu :

- Clotaire refuserait de venir si Rufus était présent.
 - Eudes ne viendrait que s'il était accompagné d'Agnan ou de Rufus.
 - Quant à Geoffroy et Agnan, ils n'iraient nulle part l'un sans l'autre.
- a. Si Clotaire n'est pas venu à la fête, alors Rufus était présent.
b. Si Rufus était absent, alors Clotaire est venu à la fête.
c. Si Agnan est venu, alors Geoffroy et Eudes aussi.
d. Si Eudes et Clotaire sont venus, alors Geoffroy était lui aussi présent.

Exercice 5 : Petite démonstration

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$, de courbe représentative (Γ) et

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

a. Pour tout réel $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{2x(1-x)}{(2x-1)^2}$

b. (Γ) admet deux tangentes parallèles à la droite (Δ) d'équation $y = -x + 5$.

c. Si $x \in I$, la fonction $k: x \mapsto \ln(f(x))$ admet comme dérivée la fonction $k': x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{2}{2x-1}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$$

Afin d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) , on effectue le raisonnement suivant :

« Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite démontrer la relation « $u_{n+1} - u_n > 0$ ».

Si $x \in I$, alors $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur I .

Supposons que la relation soit vraie à un certain rang $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{k+1} - u_k > 0$. Par définition de la suite (u_n) nous avons $u_{k+2} = f(u_{k+1})$ et $u_{k+1} = f(u_k)$ avec f strictement croissante sur I ; donc si $u_{k+1} > u_k$ alors nous pouvons en déduire que $u_{k+2} = f(u_{k+1}) > f(u_k) = u_{k+1}$, soit $u_{k+2} > u_{k+1}$ ce qui nous permet de conclure que la relation est vraie au rang $k + 1$.

Conclusion : la relation est héréditaire et, comme la fonction f est strictement croissante sur I , nous pouvons en déduire que la suite (u_n) , $n > 0$, est strictement croissante ».

Ce raisonnement est correct.

Exercice 6 : Calculs de limites

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1$

c. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - x - 1}$.

La courbe (Γ) représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) définie par $u_n = \sin(n) - \frac{2n}{n+1}$ converge vers 0.

Exercice 7 : Calcul intégral

a. $J = \int_0^e \frac{2x+1}{x^2} dx = 3 + \frac{1}{e}$

b. $K = \int_0^e \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{3}{20}$

c. Soit α un réel strictement positif, $\int_0^\alpha \frac{x}{1+x} dx = \alpha - \ln(1+\alpha)$.

d. Soit $L = \int_e^{e^2} -x \ln(x) dx$. On a : $e^2(1-e^2) \leq L \leq \frac{e^2}{2}(1-e^2)$.

Exercice 8 : Fonction exponentielle

Soit F_1 et g les fonctions définies sur \mathbb{R} respectivement par $F_1(x) = e^{-x} - 2x$ et $g(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x}+2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction F_1 et par (x_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = g(x_n)$.

a. L'équation $F_1(x) = 0$ admet une unique solution α avec $0 < \alpha < 1$.

Dans les questions b., c. et d., on admet la convergence de la suite (x_n) .

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$

c. Si $a \in \mathbb{R}$, alors la tangente à (C) en $x = a$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $g(a)$.

On donne le programme Prog ci-dessous :

Variables	A, B, I, FA, FB, FI sont des réels
Initialisation	A prend la valeur 0 B prend la valeur 1 I prend la valeur (A + B)/2 FA prend la valeur $F_1(A)$ FB prend la valeur $F_1(B)$ FI prend la valeur $F_1(I)$
Traitement	Tant que (abs(A - B) > 0,1) Si (FA * FI > 0) alors A prend la valeur I FA prend la valeur $F_1(A)$ I prend la valeur (A + B)/2 FI prend la valeur $F_1(I)$ Fin du Si Sinon B prend la valeur I FB prend la valeur $F_1(B)$ I prend la valeur (A + B)/2 FI prend la valeur $F_1(I)$ Fin du sinon Fin du Tant que
Sortie	Afficher A, B

d. Pour $n = 5$, Prog affiche 0,3125 et 0,375 ; nous pouvons en déduire que $0,3125 < \alpha < 0,375$.

Exercice 9 : Fonctions exponentielle et logarithme

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$, g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x - (x-1) \times \ln(x-1) \text{ et } \varphi \text{ la fonction définie sur }]1; +\infty[\text{ par } \varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

a. $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

b. $\varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2}$.

c. g admet un minimum en $x = e + 1$.

On admet qu'il existe une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$ sur $]e+1; +\infty[$.

d. $f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

Exercice 10 : Suite et trigonométrie

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

a. Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+8} > u_n$.

b. Pour tout entier naturel n , on a : $-3 \leq u_n \leq 3$.

c. La suite (u_n) est monotone.

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

Exercice 11 : Suite de nombres complexes

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et on considère la suite

$$(z_n) \text{ de nombres complexes définie, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ par : } \begin{cases} z_0 = 5 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$$

On pose A_n le point d'affixe z_n et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) par $u_n = |z_n|$.

a. La suite (u_n) est géométrique.

b. Pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

c. À partir du rang $n = 4$, le point A_n appartient au disque de centre O et de rayon $R = 12$.

d. Pour tout entier naturel n , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est isocèle et rectangle.

Exercice 12 : Géométrie et complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On définit A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 2i$; soit T la transformation complexe du

plan qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-2i}{z}$.

a. L'image du point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{4}}$ par la transformation T est le point d'affixe $1 + 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- b. L'ensemble des points M du plan complexe tels que $OM' = 1$ représente la médiatrice du segment $[OB]$.
- c. M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1 si et seulement si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon $R = 2$.
- d. z' est un nombre complexe imaginaire pur si et seulement si le point M appartient au cercle de diamètre $[OB]$.

Exercice 13 : Variables aléatoires réelles, cours – calculs

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

- a. Pour tout entier naturel n , on a : $\mathbb{P}(X > n) = \frac{1}{e^n}$.
- b. Pour tout entier naturel n , on a : $\mathbb{P}_{X>n}(X > n+1) = \mathbb{P}(X < 1)$.

Soit $\sigma > 0$, Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(9; \sigma^2)$ et Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y-9}{\sigma}$.

- c. Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.
- d. $\mathbb{P}(7 \leq Y \leq 11) = 2\mathbb{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right)$.

Exercice 14 : Probabilités conditionnelles

Un acteur est sujet à des trous de mémoire.

S'il relit son texte avant d'entrer en scène, la probabilité qu'il ait un trou de mémoire pendant la représentation vaut $\frac{1}{9}$, tandis que s'il ne relit pas son texte, cette probabilité vaut $\frac{1}{3}$.

S'il a eu un trou de mémoire au cours d'une représentation, il relit forcément son texte avant la représentation suivante; mais s'il n'a pas eu de trou de mémoire, il ne relit son texte qu'avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

On suppose que l'acteur a relu son texte le soir de la première représentation.

- a. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire lors de la première et de la deuxième représentation est de $\frac{1}{9}$.
- b. La probabilité qu'il ait eu un trou de mémoire à la deuxième représentation est de $\frac{25}{81}$.
- c. Sachant qu'il n'a pas eu de trou de mémoire le soir de la première, la probabilité qu'il n'en ait pas eu non plus à la deuxième représentation est de $\frac{7}{9}$.

On note p_n (n étant un entier naturel non nul) la probabilité de l'évènement « l'acteur a eu un trou de mémoire lors de la n -ième représentation ».

- d. Pour tout entier $n > 1$, $p_{n+1} = \frac{2-p_n}{9}$.

Exercice 15 : Logique et géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et m et p sont deux réels.

On définit le plan (P) ayant pour équation cartésienne $x - y + 2z - 3 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A de coordonnées $(2; p; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; m; 1)$.

- a. Il existe au moins un réel m tel que (Δ) soit parallèle à (P) .

- b. Si $m = 1$, alors il existe au moins un réel p tel que $(\Delta) \cap (P) = \emptyset$.
- c. Si $m \neq 1$, alors pour tout réel p , $(\Delta) \cap (P) \neq \emptyset$.
- d. Si $p = 1$, alors pour tout réel m , $(\Delta) \cap (P) = \{A\}$.

Exercice 16 : Orthogonalité dans l'espace

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD.

Le point O est le centre du carré ABCD, J est le milieu du segment [SO], F est le milieu du segment [BC] et

K est le point défini par $\overline{SK} = \frac{1}{3}\overline{SD}$.

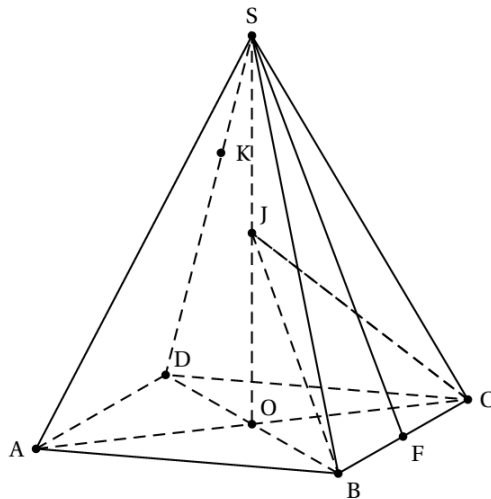
a. $\overline{BK} = -\overline{SB} + \frac{1}{3}\overline{SD}$ et $\overline{BJ} = \frac{3}{4}\overline{SB} + \frac{1}{4}\overline{SD}$.

b. B, K et J sont alignés.

c. Les plans (BJC) et (SAD) sont sécants suivant une droite (Δ) orthogonale à la droite (SF).

Pour le d., on suppose que $BD = SO$ et on se place dans le repère orthonormé direct $(O; \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OJ})$.

d. La droite (KJ) coupe le plan (P) d'équation cartésienne $2x + 3y - z + 4 = 0$ au point Ω de coordonnées $(-1; 0; 2)$.



That's all folks !