Concours Fesic/Puissance 11

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour un exercice entièrement juste.

Exercice n°1 : Bases en Analyse

Les questions sont indépendantes.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$ est $x \mapsto \dfrac{x-1}{e^x}$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = +\infty$.

Soit *f* une fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ telle que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{x}{e^x}$.

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Soit (w_n) la suite définie, pour tout entier naturel *n* non nul, par $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

d. La suite (w_n) converge vers 0.

Exercice n°2 : Bases en Géométrie

Les questions sont indépendantes.

Soit (P) et (Q) les plans d'équations respectives (P) : $2x + y + z = 2$ et (Q) : $x + y - z = 0$.

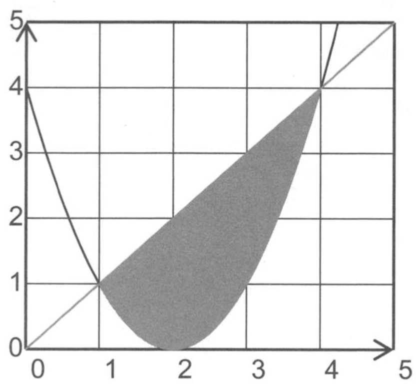
a. L 'intersection des plans (P) et (Q) a pour équation $x + 2z = 2$.

Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. (D) est perpendiculaire au plan (R) d'équation $x - y + 2z = 0$.

c. Sur le graphique ci-contre, nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions f : $x \mapsto x$ et $g : x \mapsto (x-2)^2$.

L'aire A du domaine hachuré est égale à $A = \dfrac{9}{2}$ unités d'aire.



d. La courbe représentative de la fonction *f* définie sur $\left]1\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 1}\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$.

Exercice n°3 : Lecture graphique

f est une fonction définie et dérivable sur [–3 ; 5] de courbe représentative (C).

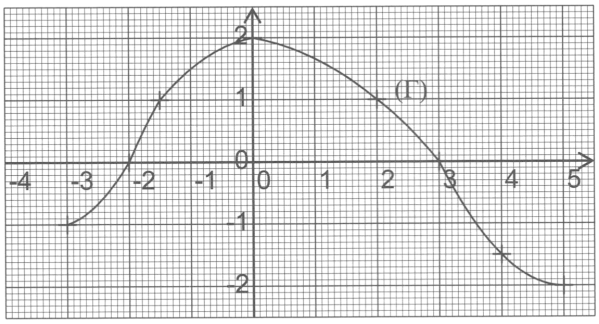
On donne ci-dessous la courbe (Γ) représentative de sa fonction dérivée f'.

a. (C) admet une tangente horizontale en $x = 0$.

b. f admet un minimum relatif en $x = -2$.

c. La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;5]$.

d. Les tangentes à (C) aux points d'abscisses $-\dfrac{3}{2}$ et 2 sont parallèles.



Exercice n°4 : Suite définie par un algorithme

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) où u_n est le réel affiché par l'algorithme ci-contre lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

a. $u_3 = 11$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

c. La suite (u_n) est strictement croissante.

d. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 2$.

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  U PREND_LA_VALEUR 2
  k PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (k<n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    U PREND_LA_VALEUR U+2*(k-l)+1
          FIN_TANT_QUE
       AFFICHER U
   FIN_ALGORITHME
```

Exercice n°5 : Bases sur les complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les nombres complexes $z_1 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ et $z_2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

a. $z_1^2 = 8\sqrt{3} + 8i$.

b. $|z_2| = \sqrt{2}$.

c. $\arg\left(z_1^2\right) = \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$.

d. $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Exercice n°6 Bases de logique

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. x et y sont deux nombres réels et z est le nombre complexe $x + iy$.

a. La négation de la proposition : « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » est la proposition « $x < 0$ et $y < 0$ ».

b. Si $x = y$ alors $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π.

c. La réciproque de la proposition précédente est vraie.

d. On suppose $z \neq 0$. Si $z = \frac{1}{z}$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.

Exercice n°7 : Calculs de limites

a. La fonction $x \mapsto x \times \sin(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)+2}{\cos(x)+x} = 1$.

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x + 3x}{x+1} = 0$.

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 1$.

Exercice n°8 : Calculs d'intégrales

a. $\int_2^4 \frac{3}{x^2} dx = \frac{5}{4}$.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$.

b. La fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = 1 + \frac{\ln(x^2+2x)}{2}$ est une primitive de f.

c. $\int_1^e \frac{1+t}{t^2} dt = \frac{1}{e}$.

d. $\int_0^1 \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} dx = \frac{1}{e}$.

Exercice n°9 : Transformation complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z + 1$.

a. L'image, par f, du point B d'affixe 2 est le point C d'affixe $3+2i$.

b. Le point A d'affixe i est le seul point invariant par f.

c. L'image, par f, de l'axe des réels est la droite (BC).

d. Soit D le point d'affixe 1. Pour tout point M distinct de A et de D, le triangle DMM' est isocèle en M.

Exercice n°10 : Loi normale

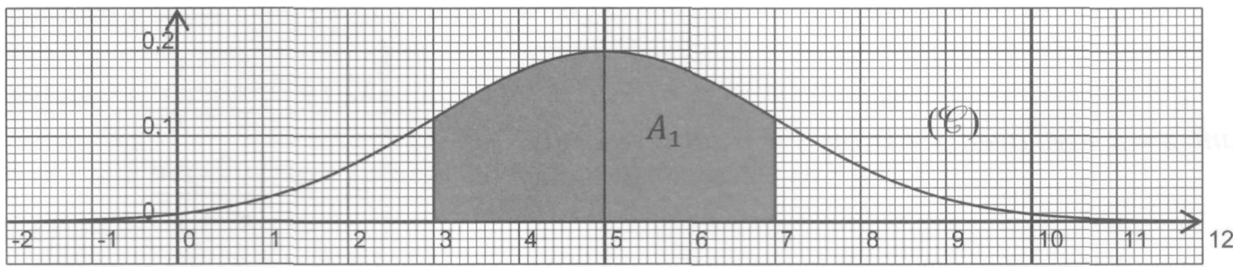
Dans tout l'exercice, on suppose T une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ deux entiers naturels.

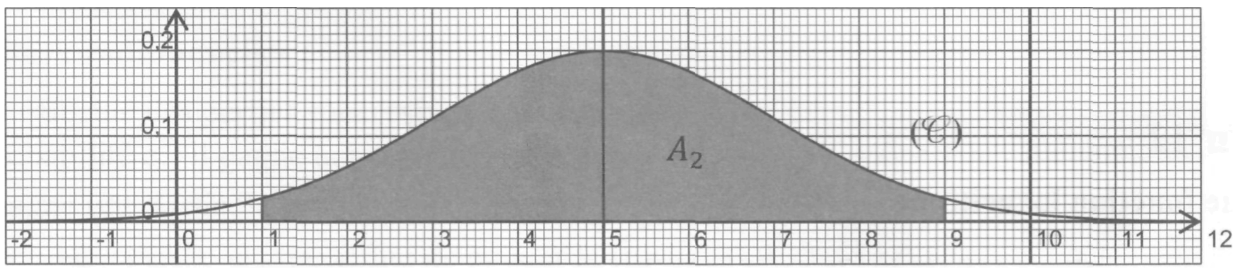
La densité de probabilité de cette loi, notée f, est représentée ci-dessous par la courbe (C).

On suppose que (C) admet la droite $x = 5$ comme axe de symétrie et que l'aire du domaine A_1 (représentée en gris) est environ égale à 0,68.

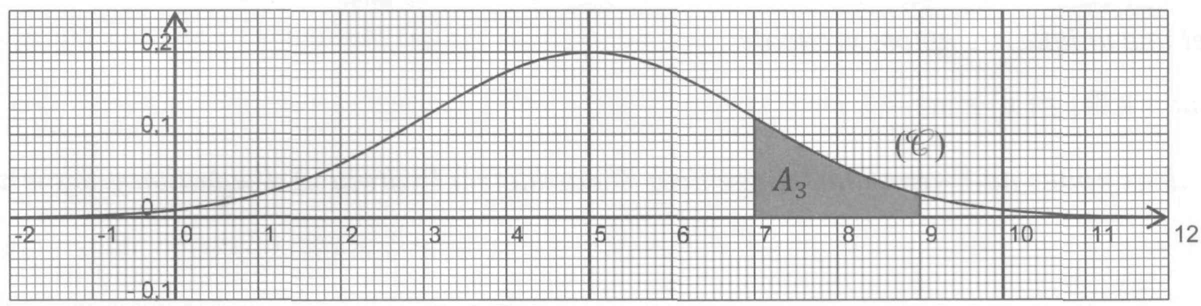
a. $\mu = 5$ et $\sigma = 4$.

b. L'aire du domaine A_1, représentée ci-dessous, est environ égale à 0,8.





c. L'aire du domaine A_2, représentée ci-dessous, est environ égale à 0,135.



On admet, dans cette question, que $\mathbb{P}\big(T \in [\,\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma\,]\big) \approx 0{,}95$.

d. $\mathbb{P}\big(T \le 9\big) \approx 0{,}975$.

Exercice n°11 : Nombres complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

À chaque point M d'affixe $z \neq 0$, on associe l'unique point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(\dfrac{\bar{z}}{|z|}\right)^2$.

a. Enposant $z = x + iy$, avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, et $z' = x' + iy'$, on a : $x' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

b. M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si M appartient à la droite d'équation $y = x$ privée de O.

c. M' est un point du cercle trigonométrique.

d. M' a pour affixe –1 si et seulement si $z = i$ ou $z = -i$.

Exercice n°12 : Etude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ de courbe représentative (C).

a. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. (C) admet une unique asymptote verticale.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

d. Il existe deux points de (C) ayant une tangente à (C) parallèle à la droite (D) d'équation $y = x - \ln 7$.

Exercice n°13 : Étude d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x$. On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

a. Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \left(e^x - 1\right)\left(e^x + 2\right)$.

b. Pour tout réel x, on a : $f(x) > \frac{3}{2}$.

c. (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n°14 : Probabilités conditionnelles

Un joueur effectue des parties successives d'un jeu vidéo.

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2.
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,7.
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,5.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n.

a. $p_2 = 0{,}54$.

b. Le joueur gagne la deuxième partie. La probabilité qu 'il ait perdu la première est 0,6.

c. Pour tout entier naturel n non nul, on a $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{2}$.

Pour le d., on donne l'algorithme ci-dessous :

Variables	p est un réel ; i, n sont des entiers
Algorithme	donner la valeur de n p prend la valeur 0,2 pour i allant de 2 à n p prend la valeur 0,2*p+0,5 fin pour afficher p

d. Si on teste le programme pour n = 5 alors cet algorithme restitue la probabilité que le joueur gagne la cinquième partie.

Exercice n°15 : Différentes lois de probabilités

Les quatre questions sont indépendantes.

a. Soit $t > 0$. Si X suit une loi uniforme sur $[0\,;t]$ telle que $\mathbb{P}(X < 5) = 0{,}4$ alors $t = 20$.

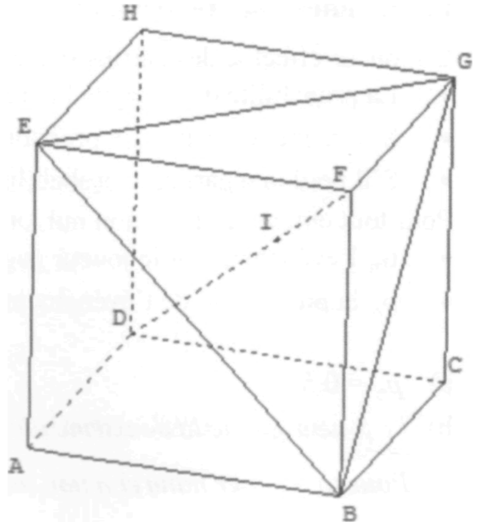
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}3)$ d'espérance 12, alors $n = 40$.

c. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-3}$, alors $\mathbb{E}(X) = 5000$.

d. On considère A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B)$, alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Exercice n°16 Repérage dans un cube

Dans le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, on considère le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



On rappelle que :

• Le plan médiateur d'un segment est le plan passant par le milieu de ce segment tout en lui étant perpendiculaire.

• Si M est un point de l'espace et (P) un plan de l'espace, on appelle *distance* du point M au plan (P) la plus petite distance d entre le point M et un point H du plan (P).

a. (GDF) est le plan médiateur du segment [EB].

b. Le plan (BEG) a pour équation : $x - y + z = 1$.

c. $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (DF) avec le plan (BEG).

d. La distance du point D au plan (BEG) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.