Concours Fesic Corrigé

Exercice 1 : Bases en Analyse

a. Faux : la dérivée du produit donne $(x+1)e^x$.

b. Faux : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0+0=0$ (croissances comparées).

c. Faux : 0 est bien telle que $0'=0$ mais il existe d'autres fonctions comme toutes les fonctions de la forme Ce^x.

d. Vrai : A et B sont incompatibles si $A\cap B=\varnothing$.

En utilisant $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, on trouve $P(A\cap B)=0{,}2+0{,}5-0{,}7=0$.

Exercice 2 : Bases en Géométrie

a. Faux : Attention au –6 : $-6=6e^{i\pi}\Rightarrow z=6e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}=6e^{i\frac{5\pi}{3}}$, $\arg(z)=\frac{5\pi}{3}[2\pi]$.

b. Faux : Si $z=x+iy$, on a $\bar{z}=x-iy\Rightarrow -\bar{z}=-x+iy$ donc symétrie par rapport à l'axe (Oy).

c. Faux : on peut remarquer que

$$4x+6y-10z+3=0\Leftrightarrow 2x+3y-5z=\frac{-3}{2}\text{ et }-6x-9y+15z-8=0\Leftrightarrow 2x+3y-5z=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3},$$

les deux équations sont incompatibles, les plans sont strictement parallèles.

d. Faux : on cherche t, $\begin{cases}2=2t+1\\3=-t-3\\-5=5t-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1/2\\t=-6\\t=-4/5\end{cases}$, ce qui est impossible.

Exercice 3 : Lecture graphique

Nombre dérivé = coefficient directeur de la tangente :

a. Vrai : $f'(0)=1$.

b. Faux : $f'(1)=0$.

c. Vrai : l'intersection de y=x avec C a une solution.

d. Vrai : on compte 4 carreaux pour une unité : l'aire hachurée est supérieure à 8 carreaux et inférieure à 16 carreaux.

Exercice 4 : Volume d'un parallélépipède rectangle

a. Vrai : $V(x)=x(12-x)(12-x)=(x^2-12x)(x-12)=x^3-24x^2+144x$.

b. Faux : la fonction change de sens de variation.

c. Faux : $V(x)=f(x)$.

d. Vrai : On a un cube si $x=12-x\Leftrightarrow x=6\Rightarrow V=6^3=216$.

Exercice 5 : Utilisation d'une suite dans un algorithme

a. Faux : le dernier terme est –24/8.

b. Vrai : vérifiez à la main.

c. Vrai : $v_n=u_n+n\Leftrightarrow u_n=v_n-n$ et $u_{n+1}=v_{n+1}-n-1$ d'où en remplaçant :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n-n)-1\Leftrightarrow v_{n+1}-n-1=\frac{1}{2}(v_n-n-n)-1\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n-n-1+n+1=\frac{1}{2}v_n$. $v_0=u_n+0=1$.

d. Faux : $v_n=v_0q^n=\frac{1}{2^n}\Rightarrow u_n=v_n-n=\frac{1}{2^n}-n$.

Exercice 6 : Utilisation d'un algorithme avec les nombres complexes

a. Faux : $a'=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. $\theta=\frac{\pi}{3}$, a = 1 et b = 1 : $a'=a\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ puis $a'=\frac{1}{2}-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

b. Vrai : $b'=a\times\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis $b'=\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

c. Vrai : si $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, a = 1 et b = 1 alors $|z'|=\sqrt{a'^2+b'^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{4}+\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{4}}=\sqrt{2}$.

d. Vrai : $a'=a\cos(\theta)-b\sin(\theta)$, $b'=a\sin(\theta)+b\cos(\theta)$. D'un autre côté on a :

$z'=e^{i\theta}z=(\cos\theta+i\sin\theta)(a+ib)=a\cos\theta-b\sin\theta+i(a\sin\theta+b\cos\theta)$.

Exercice 7 : Bases de logique

La contraposée de ($p\Rightarrow q$) est (non $q\Rightarrow$ non p). Ces deux phrases ont même valeur de vérité.

a. Faux : $z=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ et $\mathrm{Im}(z)=0$ donc par contraposée : $z\neq 0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)\neq 0$ ou $\mathrm{Im}(z)\neq 0$.

b. Faux : la contraposée est « si Re(z) $\neq$ 0 alors $z\notin\Gamma$ ».

c. Faux : Il faut également que f soit continue…

d. Faux : si f est constituée de plusieurs morceaux non continus, elle peut très bien avoir une primitive sur chaque intervalle et donc une primitive partout sans être continue.

Exercice 8 : Calculs de limites

a. Faux : $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$.

b. Faux : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln\left(x^2\right)=-\infty$.

c. Vrai : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\leq f(x)\leq \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

d. Faux : la limite proposé eest le nombre dérivé de sin en $\dfrac{\pi}{2}$, soit $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(x)-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice 9 : Calculs d'intégrales

a. Faux : $\displaystyle\int_2^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_2^4=2\sqrt{4}-2\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}$.

b. Vrai : $\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{u'}{u}dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

c. Vrai : dérivons $x\to\left(x^2-2x+2\right)e^x-2$: $(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x=x^2e^x$.

d. Faux : on utilise le résultat précédent : $\displaystyle\int_0^1 x^2e^xdx=\left[\left(x^2-2x+2\right)e^x\right]_0^1=e-2$.

Exercice 10 : Notions de bases sur les nombres complexes

a. Vrai : $z_E=2+2i\sqrt{3}=4\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Faux : E est situé sur le cercle de centre O et de rayon R = 4.

c. Vrai : $|z+2i|=|z-(-2i)|=AM$, $|z+2|=|z-(-2)|=BM$; on a $AM=BM$, ce qui caractérise la médiatrice du segment [AB].

d. Faux : On rappelle que $z\bar{z}=|z|^2\Rightarrow z\bar{z}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow|z|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Cercle de centre O, de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 11 : Utilisation des nombres complexes en géométrie

a. Vrai : $z'_A=1+\dfrac{i}{1+i}=1+\dfrac{i(1-i)}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

$z'=1+\dfrac{i}{z}=1+\dfrac{i}{x+iy}=1+\dfrac{i(x-iy)}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}+i\dfrac{x}{x^2+y^2}$ d'où

b. Vrai : $\mathrm{Re}(z')=x'=\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$.

c. Faux : $\mathrm{Im}(z')=y'=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

d. Vrai : z' est imaginaire pur si $\mathrm{Re}(z')=x'=\dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2+y=0\Leftrightarrow x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ (on enlève O pour éviter d'avoir 0 au dénominateur).

Exercice 12 : Étude d'une fonction logarithme

a. Vrai : signe du trinôme.

b. Faux : $\mathrm{D} =]-1\,;1[$.

c. Faux : $f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{-2x}{1-x^2}$.

d. Faux : $f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = e \Leftrightarrow x^2 = 1 - e$ ce qui est impossible donc pas de solutions.

Exercice 13 : Étude d'une fonction exponentielle

a. Faux : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = 0$.

b. Vrai : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées ($\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$).

c. Vrai : $f'(x) = \frac{2e^{2x}\left(x^2+1\right) - e^{2x}(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^{2x}\left(2x^2-2x+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\left(2x^2-2x+2\right)}{e^{-2x}\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(x^2-x+1\right)}{\left(e^{-x}\right)^2\left(x^2+1\right)^2}$.

d. Faux : Le trinôme $x^2 - x + 1$ n'a pas de racines, il est du signe de $+1$, soit $+$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Bases en probabilités

a. Faux : $\mathbb{P}_{\overline{F}}(E) = \frac{\mathbb{P}\left(E\cap\overline{F}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{F}\right)} = \frac{\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E\cap F)}{1-\mathbb{P}(F)}$; $\mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$. En général ça ne marche pas.

b. Vrai : $\mathbb{P}(B\cap G) = \mathbb{P}_B(G)\times\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}\times\frac{5}{8} = \frac{5}{32}$.

c. Faux : $\mathbb{P}(G) = \frac{5}{8}\times\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{32}$.

d. Vrai : $\mathbb{P}_G(B) = \frac{\mathbb{P}(B\cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{5/32}{11/32} = \frac{5}{11}$.

Exercice 15 : Différentes lois de probabilités

a. Faux : $\mathbb{P}\left(1 \le X \le \frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}-1}{5-0} = \frac{1,5}{5} = 0,3$.

b. Vrai : $\mathbb{P}(Y > c) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \left(1 - e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c}$.

c. Vrai : $\mathbb{P}(T \le 10) = 1 - e^{-\frac{1}{10}\times 10} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$.

d. Faux : Si la loi de Z était la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$, alors on aurait :

$\mathbb{P}(0 \le Z \le 2) = \mathbb{P}(\mu \le Z \le \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2}\times 0,95 = 0,48$.

Exercice 16 : Repérage dans l'espace

a. Vrai : $\begin{cases} x = 1 + 2t = -1 \\ y = 2 - t = 3 \\ z = -3 - t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$.

b. Vrai : $x + 2y + 3z - 2 = 0 \Rightarrow 1 + 2t + 2(2-t) + 3(-3-t) - 2 = 0 \Leftrightarrow -3t = 6 \Leftrightarrow t = -2$ d'où $\begin{cases} x = 1 + 2(-2) = -3 \\ y = 2 - t = 2 + 2 = 4 \\ z = -3 - t = -3 + 2 = -1 \end{cases}$

c. Vrai : $x + 2y + 3z - 2 = 0 \Rightarrow k + 2(-2k+1) + 3(k) - 2 = 0 \Leftrightarrow 0k + 0 = 0$. D' est incluse dans P (sécante=intersection non vide).

d. Faux : les droites D et D' sont coplanaires ici si elles ont en commun le point B : $\begin{cases} x = k = -3 \\ y = -2k + 1 = 4 \\ z = k = -1 \end{cases}$, impossible.