Concours Fesic

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour un exercice entièrement juste.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{(1-x)(1-e^x)}{x}$.

a. On a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

b. On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

c. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = -1$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

d. On a : $\lim\limits_{n\to +\infty} (n-1)\left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) = -1$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right)$.

a. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b. On a : $f(x) < 0$ si et seulement si $x < 0$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire $f(x) = 2\ln\left(e^x - 1\right)$.

d. La courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan possède pour asymptotes les axes du repère et la droite d'équation $y = 2x$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(x) + 2\ln(n) - nx$ et on appelle C_n la courbe représentant f_n dans un repère orthonormal du plan.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toout $x \in]0\,;+\infty[$, on a : $f'_n(x) = \dfrac{n + 2x - xn^2}{nx}$.

b. On fixe n dans $\mathbb{N}^*$. f_n est décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle M_n l'extremum de la courbe C_n. On note (x_n, y_n) les coordonnées de M_n. La suite $(x_n)_n$ est décroissante et la suite $(y_n)_n$ est croissante.

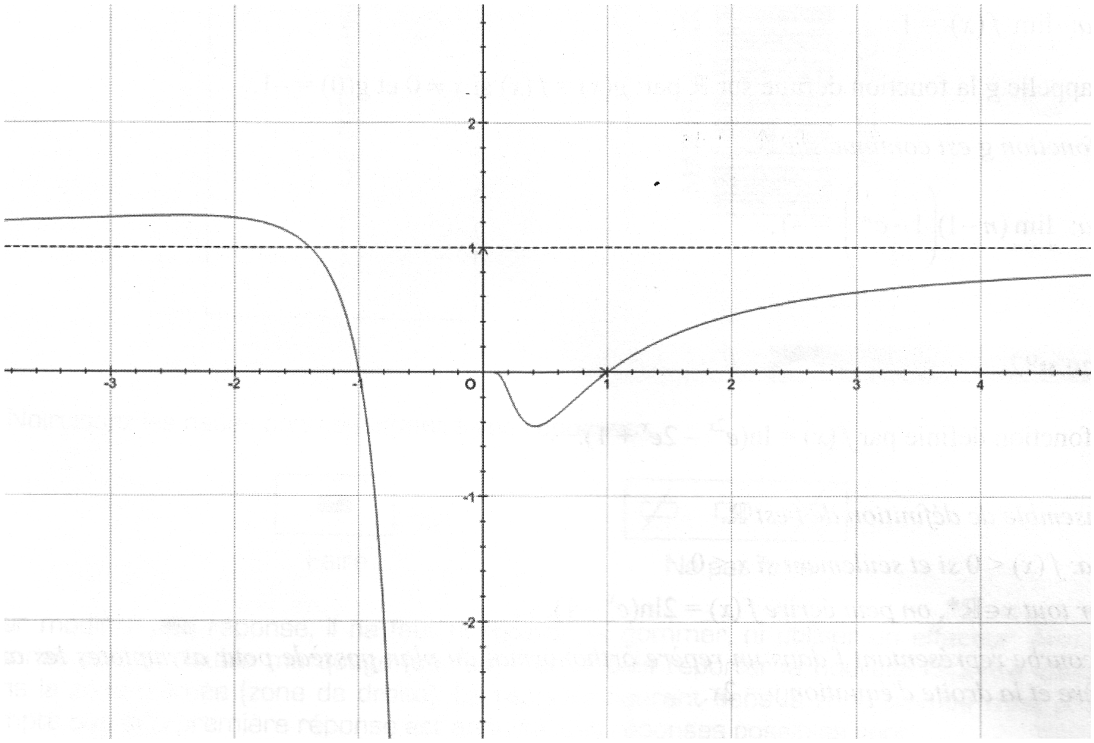
d. On fixe n dans $\mathbb{N}^*$. La fonction F_n définie par : $F_n(x) = x\ln x - x + 2x\ln n - \dfrac{nx^2}{2}$ est la primitive de f_n sur $]0\,;+\infty[$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

Exercice 4

On considère la représentation graphique suivante d'une fonction f.

On appelle C la courbe représentant f et on suppose que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

On appelle f' la dérivée de f lorsqu'elle existe.



a. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 existe.

b. Quand x_0 tend vers 0 par valeurs positives, $\int_{x_0}^{1} f(x)\,dx$ représente l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.

c. La limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 1.

d. Entre 0 et 4, la fonction f' est décroissante, puis croissante, puis à nouveau décroissante.

Exercice 5

a. On a : $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx = e^{\pi} + 1$.

b. Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a : $\int_{-a}^{a} t^3 e^{-t^2}\,dt = 0$.

c. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}\ln x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par $f'(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}\ln x}(x+1-\ln x)$.

d. La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(n^2-1\right)\sqrt{n}$ est croissante.

Exercice 6

a. On cherche l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{15+2x-x^2}{x^2+10x+21}\right)$.

On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est définie si et seulement si on a $\dfrac{15+2x-x^2}{x^2+10x+21}>0$. Or $15+2x-x^2=(3+x)(5-x)$ et $x^2+10x+21=(x+3)(x+7)$. Il faut donc et il suffit d'avoir $\dfrac{5-x}{x+7}>0$, soit $x\in\left]-7\,;5\right[$.

Conclusion : l'ensemble de définition cherché est $\left]-7\,;5\right[$. » *Ce raisonnement est exact*.

b. On considère la fonction f définie sur $I=\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=x^2-x\ln\left(x^2\right)$.

On cherche à montrer que f est croissante sur I. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« f est dérivable sur I. Pour $x\in I$, on a $f'(x)=2(x-1-\ln x)$. Or la représentation graphique de la fonction ln est située en dessous de ses tangentes en tout point. En particulier, elle est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1 qui est la droite d'équation $y=x-1$.

On en déduit que, quel que soit $x\in I$, on a: $\ln x\le x-1$. Il s'ensuit que l'on a : $f'(x)>0$. Ceci étant vrai pour tout $x\in I$, on en déduit que f est croissante sur I. » *Ce raisonnement est exact.*

c. On considère quatre points A, B, C et D de l'espace, deux à deux distincts. On appelle I le milieu de [AB] et, pour tout $m\in\mathbb{R}$, on appelle G_m le barycentre de {(A, 1), (B, 1), (C, m–2),(D, m)}.

On cherche à montrer que, quel que soit $m\in\mathbb{R}$, G_m est situé dans le plan (ICD). On tient pour cela le raisonnement suivant :

« I est le milieu de [AB], donc I est le barycentre de {(A, 1), (B, 1)}. Quel que soit $m\in\mathbb{R}$, et par associativité du barycentre, G_m est alors le barycentre de {(I, 2), (C, m–2),(D, m)}. On en déduit que G_m appartient au plan (ICD). » *Ce raisonnement est exact.*

d. On considère la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x)=e^{-x}-\ln x-x$. On considère la rédaction suivante qui donne le sens de variation de f.

« $f(x)$ est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et, pour $x\in\left]0\,;+\infty\right[$, on a $f'(x)=-e^{-x}-\dfrac{1}{x}-1$. $f'(x)$ est la somme de trois nombres négatifs, donc on a : $f'(x)<0$. Il s'ensuit que $f(x)$ est décroissante sur $\left]0\,;+\infty\right[$. » *Cette rédaction est rigoureuse*.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle [E] : $y'+2y=4$.

a. Soit z une fonction dérivable sur ℝ. z est solution de [E] si et seulement si $z-2$ est solution de l'équation $y'+2y=0$.

b. L'application f, définie par $f(x)=2\left(1-e^{2(1-x)}\right)$ est une solution de [E].

c. L'application g, définie par $g(x)=2-e^{2x+4}$ est la solution de [E] vérifiant $g(-2)=1$.

d. L'application h, définie par $h(x)=2+\left(\dfrac{1}{e^{x+1}}\right)^2$ est la solution de [E] vérifiant $h'(-1)=-2$.

Exercice 8

On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B.

Chaque mois, 20 % des fourmis de A passent en B et 30 % des fourmis de B passent en A.

Au bout d'un nombre de mois égal à n, on note u_n et v_n le nombre total (en milliers de fourmis) de fourmis présentes respectivement dans les fourmilières A et B.

On a dénombré que, initialement, on avait $u_0=320$ et $v_0=180$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{7}{10}v_n \end{cases}$.

b. La suite $s = u + v$ est une suite constante.

c. La suite $t = -2u + 3v$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = \frac{-100}{2^n}$.

d. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = 200 - \frac{20}{2^n}$.

Exercice 9

Soit u une suite numérique dont aucun terme n'est nul. On définit la suite v par : $v_n = 1 + \frac{1}{u_n}$.

a. Si u est convergente, alors v est convergente.

b. Si u est minorée par 1, alors v est majorée par 2.

c. Si u est majorée par 0,5 alors v est minorée par 3.

d. On suppose ici que u est définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$. Alors v est une suite géométrique.

Exercice 10

On considère les suites u et v définies par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

a. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. La suite v est croissante.

c. Les suites u et v sont adjacentes.

d. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2 \le u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \le 3$.

Exercice 11

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on appelle A le point dont l'affixe est $-i$. Pour tout point M distinct de A, d'affixe $z = x + iy$ (écriture algébrique), on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ (écriture algébrique) telle que : $z' = \frac{\overline{z}}{\overline{z} - i}$.

a. On a : $x' = \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + (y+1)^2}$.

b. On a : $\overline{z'} = \frac{z}{z + i}$.

c. L'ensemble des points M tels que $z' = \overline{z'}$ est l'axe des ordonnées privé du point A.

d. M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si M appartient à la médiatrice de [OA].

Exercice 12

Soit a un nombre complexe non réel.

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe a, le point B d'affixe ia, le point C d'affixe $-a$ et le point D dont l'affixe est le conjugué de a.

a. C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. On a : $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - a| = |z + a|$ est la droite (AC).

d. Les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle.

Exercice 13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. Soient $Z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$ et M le point du plan d'affixe Z.

a. Le complexe $2-2i$ est de module $2\sqrt{2}$ et l'un de ses arguments est $\dfrac{\pi}{4}$.

b. On a : $\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c. Quelque soit $n\in\mathbb{N}$, on a $Z^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{7n\pi}{12}\right)\right)$.

d. Il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que le point M_n d'affixe Z^n appartienne à l'axe des abscisses.

Exercice 14

Le code d'entrée dans un immeuble est composé de quatre chiffres.

a. II y a 9999 codes différents.

b. Pour éviter les erreurs de saisie, certains occupants demandent qu'un même chiffre ne puisse pas être répété deux fois consécutivement. Il y a alors 7290 codes différents possibles.

c. Certains occupants préféreraient que les 4 chiffres soient tous différents. II y aurait alors $\dbinom{10}{4}$ codes différents possibles.

d. Comme cet immeuble est situé à Paris, certains occupants souhaitent que le code choisi contienne le nombre « 75 ». Il y aurait alors 168 codes différents possibles.

Exercice 15

On considère un espace probabilisé (Ω,p) et deux événements A etB dans Ω.

On sait que $p(\mathrm{A})=\dfrac{1}{5}$, que $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{1}{3}$ et que $p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)=\dfrac{2}{3}$.

a. On a : $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\dfrac{5}{6}$.

b. On a : $p\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)=\dfrac{1}{3}$.

c. On a : $p(\mathrm{B})=\dfrac{11}{15}$.

d. Ona : $p_{\overline{\mathrm{B}}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=\dfrac{2}{15}$.

Exercice 16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans P et Q d'équations respectives : P : $y=x+2$ et Q : $z=3-2y$.

On appelle (D) la droite d'intersection de P avec Q.

a. La droite (D) accepte pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées (1, 1, –2).

b. La droite (D) passe par le point A(–1, 1, 1).

c. Une équation du plan contenant la droite (D) et passant par O est: $3x+y+2z=0$.

d. La droite (D) coupe l'axe des ordonnées.