Concours Fesic **Correction**

Exercice 1

a. Faux : c'est –1.

b. Faux : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

c. Vrai : comme au a.

d. Vrai : On pose $x=1/n$, $\lim_{n\to+\infty}(n-1)\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{x\to 0} f(x) = -1$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2e^{x} + 1\right)$.

a. Vrai : $f(x) = \ln\left[\left(e^{x} - 1\right)^{2}\right] = 2\ln\left|e^{x} - 1\right|$.

b. Faux : $f(x) < 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^{x} < 0 \Leftrightarrow e^{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$.

c. Faux.

d. Vrai : en $-\infty$, limite = 0, en $+\infty$ c'est y=2x, en 0 c'est $-\infty$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(x) + 2\ln(n) - nx$ et on appelle C_n la courbe représentant f_n dans un repère orthonormal du plan.

a. Faux : $f_n'(x) = \frac{1}{x} + 0 - n = \frac{1-nx}{x}$.

b. Faux : f_n est décroissante sur $]1/n\,;+\infty[$.

c. Vrai : $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\ln n + 2\ln n - 1 = \ln n - 1$: $(x_n)_n$ est décroissante et $(y_n)_n$ est croissante.

d. Vrai : $F_n'(x) = \ln x + 2\ln n - nx$ et $F_n(x) = x\ln x - x + 2x\ln n - \frac{nx^2}{2} \to 0 - 0 + 0 - 0 = 0$ quand x tend vers 0.

Exercice 4

a. Faux : limites différentes.

b. Faux : l'intégrale est négative.

c. Faux : Comme la courbe devient horizontale, la dérivée tend vers 0.

d. Faux : Entre 0 et 4, f' est négative puis positive…

Exercice 5

a. Faux

$\left.\begin{cases} u = e^x, u' = e^x \\ v' = \sin x, v = -\cos x \end{cases}\right\} \Rightarrow \int_0^\pi e^x \sin x dx = \left[-e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x dx$

$\left.\begin{cases} u = e^x, u' = e^x \\ v' = \cos x, v = \sin x \end{cases}\right\} \Rightarrow \int_0^\pi e^x \cos x dx = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x dx$

$\int_0^\pi e^x \sin x dx = e^\pi + 1 + 0 - \int_0^\pi e^x \sin x dx \Leftrightarrow \int_0^\pi e^x \sin x dx = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$

b. Vrai : la fonction est impaire.

c. Vrai : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x} + x\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2} \right)e^{\frac{1}{x}\ln x} = \left(\dfrac{x - \ln x + 1}{x} \right)e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

d. Vrai : $n^2 - 1$ est croissante et $\sqrt{n}$ également.

Exercice 6

a. Faux : pas le droit de simplifier par $3+x$…

b. Vrai. Le seul problème est $f'(x) > 0$: f' s'annule en 1 mais ça ne joue pas sur le sens de variation.

c. Faux : Le problème est la non-existence de G_m lorsque $1+1+m-2+m=0$, soit $m=0$…

d. Faux : Il manque la continuité de f…

Exercice 7

On considère l'équation différentielle [E] : $y' + 2y = 4$.

a. Vrai : $z - 2$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$: $z' - 0 + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow z' + 2z - 4 = 0$.

b. Vrai : $f(x) = 2\left(1 - e^{2(1-x)}\right) = 2 - 2e^{2-2x}, f'(x) = 4e^{2-2x}, f' + 2f = 4$.

c. Faux : $g(x) = 2 - e^{2x+4}, g'(x) = -2e^{2x+4} \Rightarrow g' + 2g \neq 4$.

d. Vrai : $h(x) = 2 + \left(\dfrac{1}{e^{x+1}} \right)^2 = 2 + \dfrac{1}{e^{2x+2}} = 2 + e^{-2x-2} \Rightarrow h'(x) = -2e^{-2x-2}, h' + 2h = 4$ et $h'(-1) = -2$.

Exercice 8

a. Vrai : $\begin{matrix} u_{n+1} = 0,8u_n + 0,3v_n \\ v_{n+1} = 0,2u_n + 0,7v_n \end{matrix}$.

b. Vrai : $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{5}{5}u_n + \dfrac{10}{10}v_n = s_n = u_0 + v_0 = 500$.

c. Vrai : $t_{n+1} = -2u_{n+1} + 3v_{n+1} = -\dfrac{8}{5}u_n - \dfrac{6}{10}v_n + \dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{21}{10}v_n = -u_n + \dfrac{3}{2}v_n = \dfrac{1}{2}(-2u_n + 3v_n)$.

$t_0 = -640 + 540 = -100$.

d. Vrai : $\begin{cases} u_n + v_n = 500 \\ -2u_n + 3v_n = -\dfrac{100}{2^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_n + 2v_n = 1000 \\ -2u_n + 3v_n = -\dfrac{100}{2^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5v_n = 1000 - \dfrac{100}{2^n} \\ -2u_n + 3v_n = -\dfrac{100}{2^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n = 200 - \dfrac{20}{2^n} \\ -2u_n + 3v_n = -\dfrac{100}{2^n} \end{cases}$.

Exercice 9

$v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

a. Faux : si u est convergente vers 0, alors…

b. Vrai : $u_n \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \leq 1 \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{u_n} \leq 2$.

c. Faux : si u est négatif…

d. Vrai : $v_{n+1}=1+\dfrac{1}{u_{n+1}}=1+\dfrac{u_n+2}{u_n}=\dfrac{2u_n+2}{u_n}=2\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)=2v_n$.

Exercice 10

On considère les suites u et v définies par : $u_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n\times n!}$.

a. Faux : on ajoute des termes positifs qui tendent vers 0 mais comme on démarre à 2…

b. Vrai :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!(n+1)}\Rightarrow$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{n+1}{n(n+1)!}=\frac{(n+1)n+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}=\frac{-1}{\ldots}<0.$$

c. Vrai.

d. Vrai : $u_1=2$, $v_1=3$.

Exercice 11

a. Vrai.

$$z'=\frac{\overline{z}}{\overline{z}-i}=\frac{x-iy}{x-iy-i}=\frac{(x-iy)\left(x+i(y+1)\right)}{x^2+(y+1)^2}=\frac{\left(x^2-ixy+ix(y+1)+y(y+1)\right)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+ix+y(y+1)\right)}{x^2+(y+1)^2}.$$

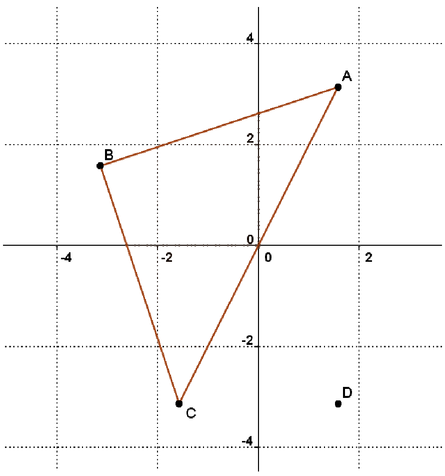
b. Vrai.

c. Vrai : $z'=\overline{z'}\Leftrightarrow \operatorname{Im} z'=0\Leftrightarrow x=0$.

d. Vrai.

$$|z'|=1\Leftrightarrow z'\overline{z'}=1\Leftrightarrow\frac{z\overline{z}}{(\overline{z}-i)(z+i)}=1\Leftrightarrow -iz+i\overline{z}+1=0\Leftrightarrow -i(x+iy)+i(x-iy)+1=0\Leftrightarrow 2y+1=0.$$

Exercice 12



a. Faux : C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. Vrai : A est sur le cercle de centre O, de diamètre AC, de même que D (OD=OA).

c. Faux : $|z-a|=|z+a|$: AM=CM, c'est la médiatrice de [AC].

d. Vrai.

Exercice 13

$Z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2-2i}$ et M le point du plan d'affixe Z.

a. Faux : $2-2i$ a pour argument $-\dfrac{\pi}{4}$.

b. Vrai : $\left|Z\right|=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\arg Z=\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)-\arg\left(2-2i\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$.

c. Vrai.

d. Vrai : Il faut $\arg\left(Z^n\right)=k\pi\Leftrightarrow\dfrac{7n\pi}{12}=k\pi\Leftrightarrow n=\dfrac{12k}{7}$, ce qui est possible si k est un multiple de 7.

Exercice 14

a. Faux : de 0000 à 9999 iI y a 10 000 codes différents.

b. Vrai : 10 choix pour le premier, 9 pour le 2ème, 9 pour le 3ème et 9 pour le 4ème, soit $10\times9\times9\times9=7290$ codes possibles.

c. Faux : il y a $10\times9\times8\times7=5040$ et non $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}=\dfrac{5040}{4!}$ codes différents possibles.

d. Vrai : il y a comme possibilités 75ab, a75b, ab75, soit $3\times8\times7=168$ codes possibles.

Exercice 15

$p\left(\mathrm{A}\right)=\dfrac{1}{5}$, $p_{\mathrm{A}}\left(\mathrm{B}\right)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(A\right)}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow p\left(A\cap B\right)=\dfrac{1}{15}$ et $p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)=\dfrac{2}{3}$.

a. Vrai : $p_{\overline{\mathrm{A}}}\left(\mathrm{B}\right)=\dfrac{p\left(\overline{A}\cap B\right)}{p\left(\overline{A}\right)}=\dfrac{2/3}{4/5}=\dfrac{5}{6}$.

b. Faux : $p\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)=p_A\left(\overline{B}\right)\times p\left(A\right)=\left(1-p_A\left(B\right)\right)\times p\left(A\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{15}$.

c. Vrai : $p\left(\mathrm{B}\right)=p\left(A\cap B\right)+p\left(\overline{A}\cap B\right)=\dfrac{1}{15}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{11}{15}$.

d. Faux : $p_{\overline{\mathrm{B}}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=\dfrac{p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{B}}\right)}=\dfrac{p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)}{4/15}=\dfrac{1-5/6}{4/15}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{15}{4}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$.

Exercice 16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les plans P et Q d'équations respectives : P : $y=x+2$ et Q : $z=3-2y$.

On appelle (D) la droite d'intersection de P avec Q.

a. Vrai : il faut que (1, 1, –2) soit vecteur directeur dans P et dans Q ou encore orthogonal aux vecteurs normaux de P et Q :

$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0$.

b. Vrai : A(–1, 1, 1) est sur (D) si il est dans P et dans Q...

c. Vrai : A est dans le plan ; un autre point de (D) est par exemple (0, 2, –1) qui est aussi dans le plan. 0+0+0=0 donc le plan contient O.

d. Faux : équations de (D) : $\begin{cases}x=-1+t\\y=1+t\\z=1-2t\end{cases}$; la droite (D) coupe l'axe des ordonnées si $\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$, ce qui ne donne pas le même t.