Concours Fesic

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour un exercice entièrement juste.

Exercice 1

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. On appelle *D* l'ensemble de définition de *f*.

a. $D=\left]-1\,;+1\right[$.

b. *f* estpaire.

c. *f* est décroissante sur *D*.

d. Quel que soit le réel *b*, l'équation *f*(*x*) = *b* possède l'unique solution $x=\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$.

Exercice 2

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x)=\frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$. On appelle C la courbe représentant *f* dans un repère du plan.

a. *f* est continue en 0.

b. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x\neq 0$, $f'(x)$ est du signe de *x*.

c. C possède la même droite pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

d. Quel que soit le réel *x*, on a *f*(*x*) < 1.

Exercice 3

On considère la fonction *f* définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ par : $f(t)=\sin(\ln t)$. On appelle C la courbe représentant *f* dans un repère orthonormal du plan.

Soit *F* la fonction définie sur $\left[1\,;+\infty\right[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

a. On a $f(e)=\frac{\pi}{2}$.

b. Si $t\in\left[1\,;e^{\pi}\right]$, alors on a $f(t)\geq 0$.

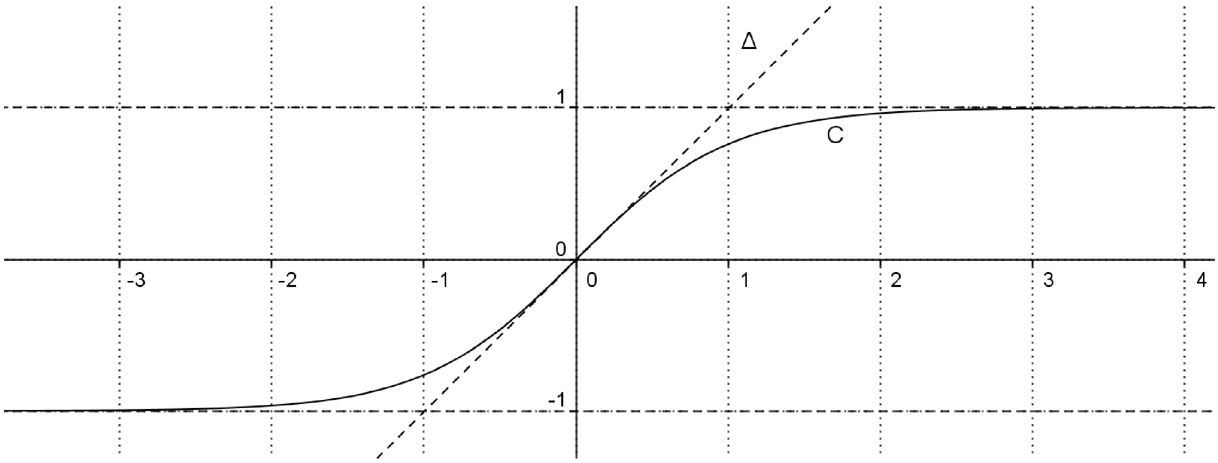
c. $F\left(e^{\pi}\right)$ représente l'aire de la surface limitée par la courbe C et les droites d'équations $x=1$, $x=e^{\pi}$ et $y=0$.

d. Quel que soit *x* > 1, on a $F'(x)\leq 1$.

Exercice 4

On considère une fonction *f* définie et deux fois dérivable sur ℝ.

On appelle Γ la courbe représentant *f* et C la courbe représentant la fonction dérivée f' de *f*. On a représenté ci-dessous la courbe C de f' : C est symétrique par rapport à l'origine du repère. La droite Δ est la tangente à C au point d'abscisse 0.



a. La courbe Γ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

c. La courbe Γ possède une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

d. Ona $f''(0) = 1$.

Exercice 5

a. $\displaystyle\int_{-5}^{7} |x|\,dx = 12$ J.

b. $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x+5)e^{x}dx = 5e-3$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)(e^{x}-1)}{x} = 2$.

d. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)x^2\sin^2 x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x\sin^2 x + x^2\cos^2 x$.

Exercice 6

a. On considère un tétraèdre *ABCD.* On appelle *I* le milieu de [*AD*], *J* celui de [*BC*], *K* le barycentre de {(*A*, 2), (*B*, 1)}, *L* le barycentre de {(*C*, 1), *(D, 2)*} et *G* le barycentre de {(*A*, 2), (*B*, 1), (*C*, 1), (*A*, 2)}.
On veut montrer que les points *I*, *J*, *K* et *L* sont coplanaires. On tient pour cela le raisonnement suivant :
« *G* est le barycentre de {(*I*, 4), (*J*, 2)} et de {(*K*, 3), (*L*, 3)}. Donc *G*, *I* et *J* sont alignés, ainsi que *G*, *K* et *Z* sont alignés. On en déduit que *I*, *J*, *K* et *L* sont coplanaires.» *Ce raisonnement est exact.*

b. On considère les deux intégrales $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{e^{x}+3}{e^{x}+4}dx$ et $J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{1}{e^{x}+4}dx$. On veut calculer *I* et *J*. On tient pour cela le raisonnement suivant : « On a $I + J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{e^{x}+4}{e^{x}+4}dx = \ln 8 - \ln 2 = 2\ln 2$.

De plus, $I - 3J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{e^{x}}{e^{x}+4}dx = \Big[\ln\left(e^{x}+4\right)\Big]_{\ln 2}^{\ln 8} = \ln 12 - \ln 6 = \ln 2$. On en déduit $I = \dfrac{7\ln 2}{4}$ et $J = \dfrac{\ln 2}{4}$. »

Ce raisonnement est exact.

c. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par: $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On appelle C la courbe représentant f dans un repère du plan.

On cherche à savoir si C possède ou non une demi-tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« On sait que $\lim f(x) = 0$ (limite de référence). Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$. On en déduit que C possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation $x=0$. » *Ce raisonnement est exact.*

d. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. On appelle C la courbe représentant f dans un repère. On cherche à savoir si C possède ou non une tangente au point d'abscisse 0. On tient pour cela le raisonnement suivant :

« Pour tout $x \neq 0$, on a: $-1 < \sin\left(\frac{1}{x}\right) < 1$, donc $-x^2 < f(x) < x^2$. Or $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right) = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Comme $f(0) = 0$, c'est que f est continue en 0. De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Or on a $-x \leq 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ si $x > 0$ et $x \leq 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x$ si $x < 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Mais comme $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, alors $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en 0. On en déduit que C ne possède pas de tangente au point d'abscisse 0. » *Ce raisonnement est exact.*

Exercice 7

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

À chaque point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 + z + 1$.

On appelle A le point d'affixe 1 et on note E_0 l'ensemble des points dont l'affixe z est solution de l'équation $z' = 0$.

a. Pour tout z différent de 1, on a $z' = \frac{1-z^3}{1-z}$.

b. L'ensemble E_0 est réduit à deux points B et C symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$.

c. Quel que soit le point M d'affixe z appartenant à E_0 et quel que soit l'entier n, z^n est soit l'affixe du point A, soit celle d'un élément de E_0.

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z' \in \mathbb{R}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires.

Exercice 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

a. Les complexes $-1 + 2i$ et son conjugué sont solutions de (E).

b. Cette équation est une équation polynômiale de degré 2 qui possède deux solutions.

c. On pose $z = x + iy$, x et y étant réels. Si z est solution de (E), alors $y^2 = (x-1)^2$.

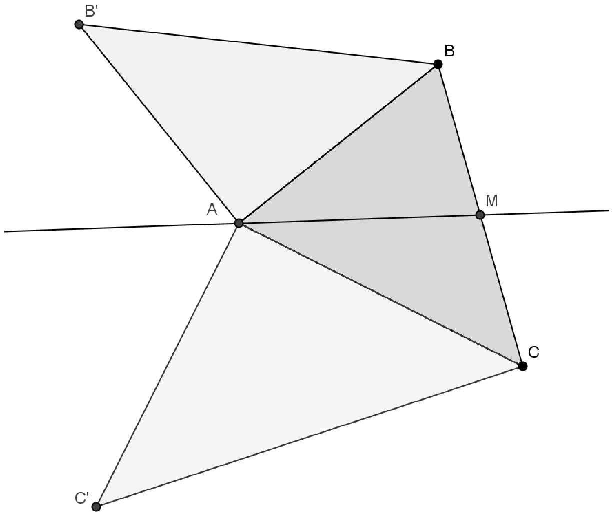
d. La somme des solutions de (E) est égale à -1.

Exercice 9

On considère un triangle ABC et le point M milieu de $[BC]$.

On appelle B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On munit le plan complexe d'un repère de centre A dans lequel B, C, B', C' et M ont les affixes respectives b, c, b', c' et m.



a. $c' + ic = 0$ et $b' - ib = 0$.

b. $\frac{c'-b'}{m} = -2i$.

c. (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

d. $B'C=2AM$.

Exercice 10

Soient $a \in \mathbb{R}$ et φ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle [E]:

$$y' + ay = \varphi(x).$$

a. Si φ est définie par $\varphi(x) = x^3 - 1$, alors quel que soit le réel a, il existe un polynôme de degré 2, solution de [E].

b. Si φ est définie par $\varphi(x) = e^{2x}$, alors quel que soit le réel a, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que la fonction f, définie par $f(x) = be^{2x}$ soit solution de [E].

c. Si φ est la fonction constante nulle et si f est une solution de [E], alors la courbe représentant f possède au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = (1-ax)f(0)$.

d. Si $a = 0$, alors quelle que soit la fonction φ définie et continue sur $\mathbb{R}$, [E] possède une solution.

Exercice 11

On considère la suite u définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$.

a. La suite u est géométrique de raison $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{(n-1)!}$.

c. La suite u est décroissante à partir de $n = 2$.
d. La suite u est convergente.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty\,; 3[$ par $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$. Soit u la suite définie par $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. f est croissante.
b. u est croissante.
c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < u_n < 2$.
d. Si u est convergente et si l est sa limite, alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exercice 13

On considère la suite u définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2}\left(u_n\right)^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On considère alors la suite v définie par $v_n = \ln\left(\sqrt{2}\, u_n\right)$.

a. La suite v est géométrique.
b. $v_{10} = -512 \times \ln 2$.
c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 2)\left(1-2^n\right)$.
d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Exercice 14

On dispose de quatre urnes numérotées de 1 à 4. Les urnes sont composées ainsi :

Urne U_1 : 1 boule bleue et 3 boules rouges ;
Urne U_2 : 2 boules bleues et 4 boules rouges ;
Urne U_3 : 3 boules bleues et 5 boules rouges ;
Urne U4 : 6 boules rouges.

Un joueur choisit une urne au hasard, puis prélève une boule au hasard de cette urne. Le joueur est gagnant s'il tire une boule bleue; il est perdant sinon. On désigne par :

- Ω l'univers des possibilités et P la probabilité associée ;
- P_A la probabilité conditionnée par un événement A de Ω ;
- G l'événement: « le joueur gagne » ;
- U_n l'événement: «le joueur choisit l'urne U_n ».

a. $P_{U_1}(G) = \dfrac{2}{3} P_{U_3}(G)$.
b. $P(G) = \dfrac{9}{8}$.
c. $P(U_1) = \dfrac{1}{6}$.
d. $P_{U_2}(G) = P_G(U_2)$.

Exercice 15

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 4, 3)$, $C(-2, 1, 3)$ et $D(5, 4, -3)$.
On appelle K le barycentre de $\{(C, 1); (D, -2)\}$ et J le milieu de $[BC]$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.
a. Dans le triangle ABC, les médianes se coupent au point de coordonnées $(-2, 7, 9)$.
b. Les coordonnées de K sont $(-12, -7, 9)$.

c. Une équation paramétrique du segment [KJ] est $\begin{cases} x = 12 - 9t \\ y = 7 - 3t \\ z = -9 + 8t \end{cases}$, où $t \in \left[0 \,;\, \frac{3}{2} \right]$.

d. Une équation du plan perpendiculaire à (KJ) passant par A est $9x + 3y - 8z + 9 = 0$.

Exercice 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ et la droite D d'équation $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Soient $A(1, 1, 1)$, B(3, 5, −3) et $C(1, -4, 2)$.

a. A et B sont deux points de P.

b. D est perpendiculaire à P.

c. La distance de C à P est $\sqrt{5}$ (en unités de repère).

d. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $(x-1)(x-3)+(y-1)(y-5)+(z-1)(z+3)=0$ est la sphère de diamètre [AB].