Terminale S

Exercices Sections planes de surfaces *(Spécialité)*

Extraits du programme :

…L'objectif est de montrer qu'une fonction de deux variables peut être représentée par une surface et que des études de coupes par des plans permettent leur étude à l'aide des outils déjà vus pour les fonctions d'une variable….

…Sections de cônes et cylindres illimités d'axes (Oz) par des plans parallèles aux plans de coordonnées…

…Surfaces d'équation $z=x^2+y^2$ ou $z=xy$ coupées par des plans parallèles aux plans de coordonnées…

1. Exemple 1

Dans un repère orthonormal de l'espace, S est la surface d'équation $z=x^2+y^2$.

1. Quelle est l'équation et la nature de la section de S par le plan d'équation $x=-2$?

2. Quelle est l'équation et la nature de la section de S par le plan d'équation $z=2$?

Trouver un plan parallèle aux plans de coordonnées dont la section par S donne la parabole d'équation $z=x^2+49$. Ce plan est-il unique ?

2. Exemple 2

- Déterminer l'équation du cylindre d'axe (Oz) et de rayon 2.

- Déterminer l'équation du cône de sommet O et d'axe (Oz) passant par $B(5\,;5\,;5)$.

3. Exemple 3

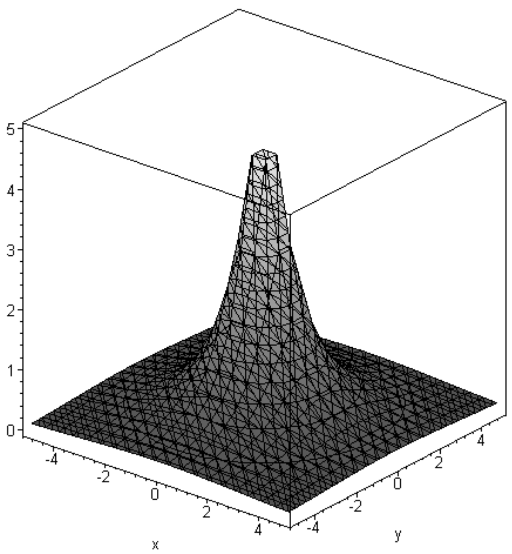
Dans un repère orthonormal de l'espace, on considère la surface S d'équation $z=\dfrac{5}{x^2+y^2+1}$.

1. Déterminer l'équation et la nature de la section de S avec le plan d'équation $z=1$? $z=4$? $z=0$?

2. Déterminer la nature de la section de S par un plan parallèle au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ (on pourra distinguer plusieurs cas).

3. En déduire que la surface S est une surface de révolution dont on précisera l'axe.

4. Représenter dans un repère $(O;\vec{j},\vec{k})$ la section de S par le plan d'équation $x=0$.



Remarque

La question 3 pose le problème de la définition d'une surface de révolution, la réponse attendue ne peut-être qu'intuitive, aucune rigueur n'est à exiger dans la justification.

4. Exemple 4

On considère la surface S d'équation

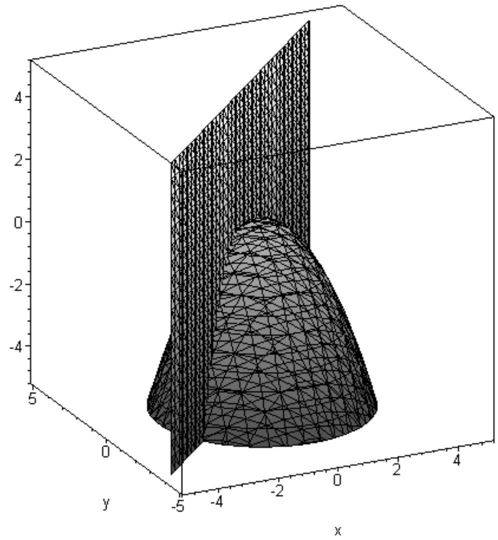
$$z = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

et le plan P d'équation $y = x + 1$, dont on a la représentation ci-contre.

Le but de l'exercice est de déterminer la cote maximale d'un point appartenant à $S \cap P$.

1. Montrer que les coordonnées d'un point de $S \cap P$ vérifient l'équation $z = \frac{1}{2} - x - x^2$.

2. Montrer alors que z est maximal pour $x = -\frac{1}{2}$ et donner les coordonnées du point de $S \cap P$ correspondant.



5. Paraboloïde

A. Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) solution particulière de l'équation (E) $2x + 3y = 17$.

En déduire tous les couples de solutions entières de l'équation (E), puis préciser celles qui vérifient $0 \le y \le 8$.

B. Soit le paraboloïde ci-contre défini dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ par la surface d'équation $z = x^2 + y^2$, les lignes de niveaux représentant les valeurs de z sont tracées de 10 en 10.

Vrai ou faux ?

1. La section de S par un plan d'équation $x = 2$ est une parabole.

2. La section de S par un plan d'équation $y = 2$ est un cercle.

3. Toute section de S par un plan parallèle à (Oz) est une parabole.

C – On considère maintenant le plan P de l'espace d'équation $2x + 3y = 17$. Un des objectifs est de représenter l'intersection de P et de S.

1. Montrer que P est parallèle à l'axe (Oz).

2. Représenter l'intersection de P et du plan $\left(O\,;\vec{i}, \vec{j}\right)$.

3. A l'aide de la partie A, déterminer les points (x, y, z) à coordonnées entières appartenant à $S \cap P$, et préciser parmi ces points ceux dont la coordonnée y vérifie $0 \le y \le 8$.

4. Déterminer et placer les points du 3. puis tracer l'esquisse de $S \cap P$.

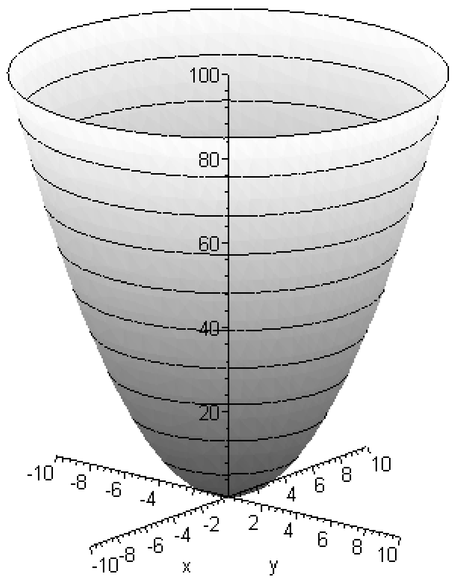
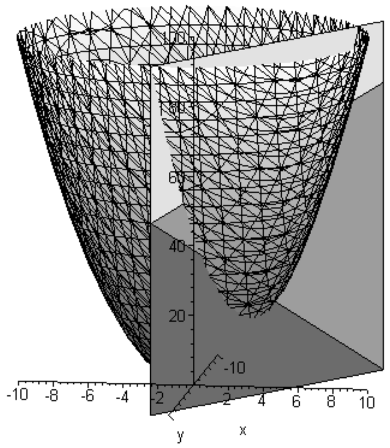


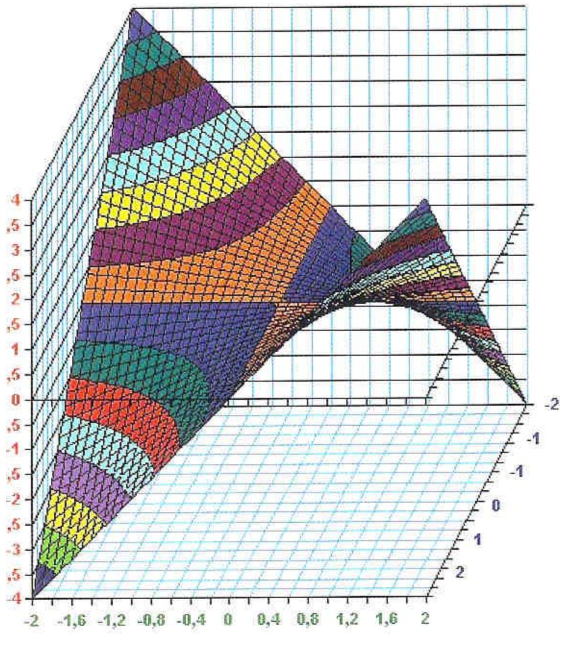
Figure complétée : la nature de la section est une notion intuitive et n'est pas exigible. Le tracé est approximatif car aucune étude n'a été faite sur la parabole pour en déterminer les éléments caractéristiques (minimum).

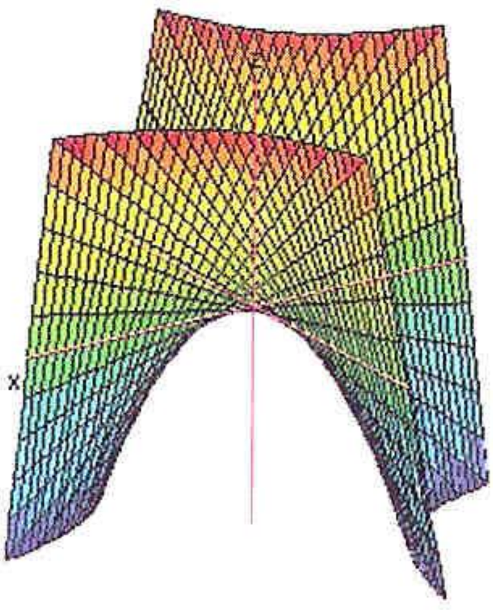


Figures réalisées avec Maple
(fichier http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/TS/divers/TS_sections_planes.mws)

6. Le paraboloïde hyperbolique

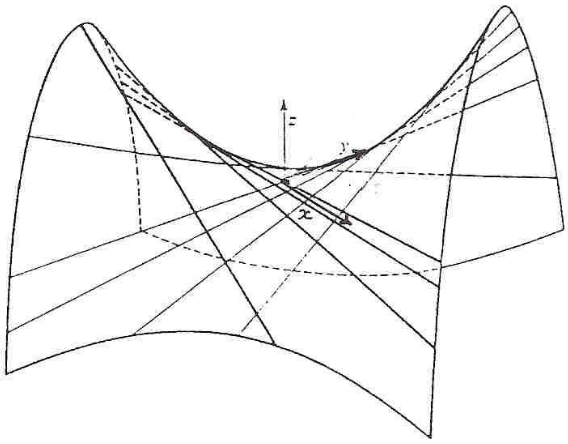
Voici deux représentations issues de manuels de la courbe d'équation $z = xy$.





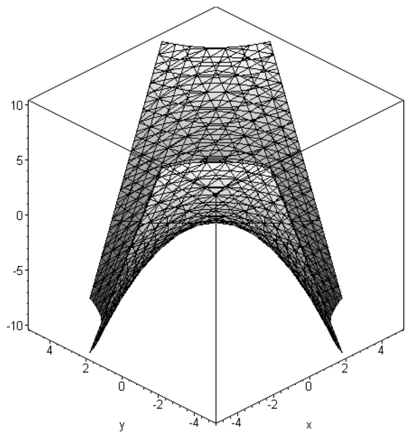
Ces représentations issues de logiciels ont un défaut majeur, elles se situent dans un cube suivant les axes de coordonnées. L'appellation "selle de cheval" semble un peu tirée par les cheveux.

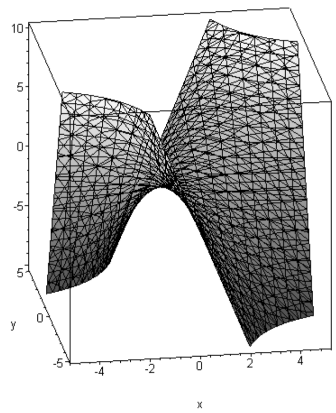
Sur la représentation ci-dessous le choix de la coupe suivant un plan d'équation de la forme $y = mx + p$ permet un autre point de vue.

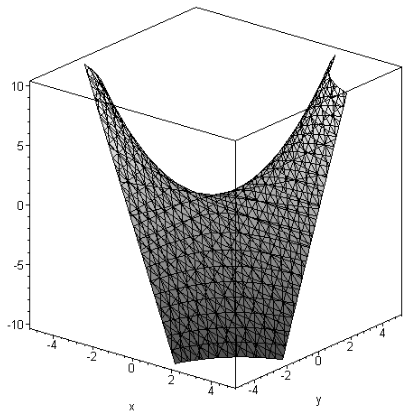


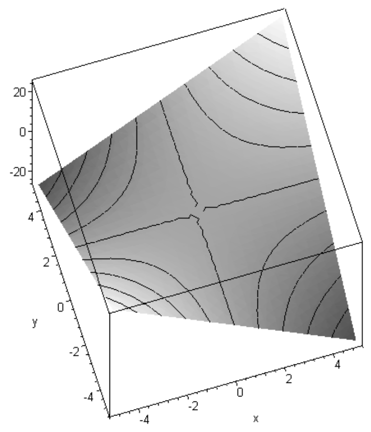
La section horizontale est une hyperbole, la section verticale est alors une parabole ; l'analogie équine est plus crédible (une représentation à l’aide de Maple est nettement plus sexy… *remarque perso*).

Voici 4 représentations plus sympathiques…









7. Bac C, Antilles, 1987

on se propose d’étudier l’ensemble Σ des points de l’espace équidistants de deux droites non coplanaires et orthogonales.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,. La droite D passe par le point A (0 ; 0 ; 1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$. La droite D' passe par le point B (0 ; 0 ; −1) et admet comme vecteur directeur $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$.

1. a. Vérifier que D et D' sont orthogonales et non coplanaires. Vérifier que O appartient à Σ.

b. Montrer qu'une représentation paramétrique de D est $\begin{cases} x=t \\ y=t\ , t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$.

c. Soit M un point de coordonnées (x ; y ; z) de l'espace et P un point de D. Exprimer MP^2. En considérant MP^2 comme une fonction de t, en déduire la distance de M à D.

d. Calculer de même la distance du point M à la droite D'.

e. En déduire que M appartient à Σ si et seulement si on a : $xy+2z=0$.

2. Déduire de cette relation :

a. Que les intersections de Σ avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.

b. La nature des intersections de Σ avec des plans orthogonaux à l'axe $\left(O;\vec{i}\right)$ ou à l'axe $\left(O;\vec{j}\right)$.

8. Exercices d'entrainement

1. Déterminer les équations des surfaces définies ci-dessous :

a. S_1 est le cylindre d'axe Ox passant par le point A(1 ; 2 ; 3)

b. S_2 est le cylindre d'axe Oz contenant la droite (D) d'équation : $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.

c. S_3 est le cône d'axe Oy, de sommet B(0 ; 5 ; 0), et de demi-angle au sommet $\dfrac{\pi}{6}$.

d. S_4 est le cône d'axe Oz, de sommet S(0 ; −1 ; 0) contenant le point C(3 ; 4 ; 4).

e. S_5 est la sphère de centre D(−1 ; 2 ; 1), passant par l'origine du repère.

2. Identifier les surfaces suivantes de façon précise :

a. $x^2+y^2+2x-y=0$. b. $3(z-2)=x^2+y^2$. c. $x^2+y^2+z^2+4x-3y+z+1=0$.

d. $y^2+z^2+2z=x$. e. $3x^2+3z^2=y-1$.

9. Centres étrangers, Juin 2003

L'espace E est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère la surface T d'équation :

$$x^2y=z \text{ avec } -1\le x\le 1 \text{ et } -1\le y\le 1.$$

La figure ci-dessous est une représentation de la surface T, dans le cube de centre O et de côté 2.

1. Eléments de symétrie de la surface T

a. Montrer que si le point M(x ; y ; z) appartient à T , alors le point M'(−x ; y ; z) appartient aussi à T. En déduire un plan de symétrie de T.

b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de T.

2. Intersections de la surface T avec des plans parallèles aux axes

a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de T avec les plans parallèles au plan (xOz).

b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de T avec les plans parallèles au plan (yOz).

3. Intersections de la surface T avec les plans parallèles au plan (xOy) d'équations $z = k$, avec $k\in[0\,;1]$

a. Déterminer l'intersection de la surface T et du plan d'équation z = 0.

b. Pour $k > 0$, on note K le point de coordonnées (0 ; 0 ; k). Déterminer, dans le repère $(K;\vec{i},\vec{j})$, l'équation de la courbe d'intersection de T et du plan d'´equation $z = k$.

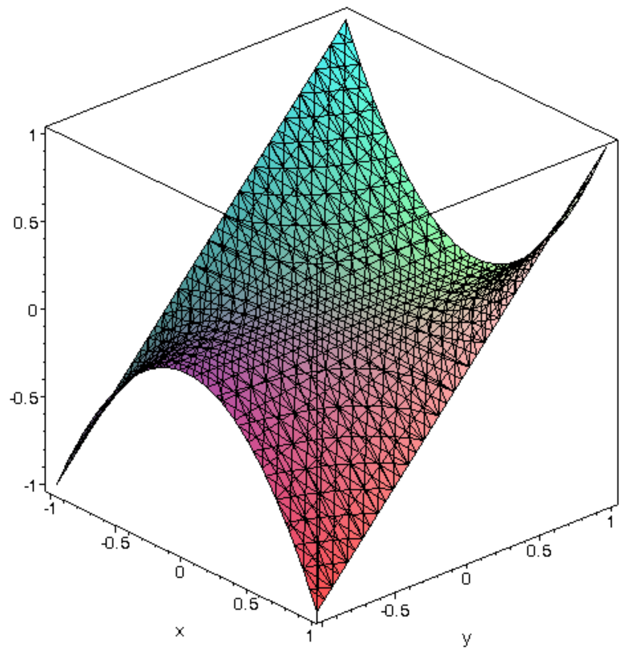
c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K;\vec{i},\vec{j})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface T :

$$(D)=\left\{M(x\,;y\,;z)\,/\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le x^2y\right\}.$$

a. Pour $0<k\le 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question 3. c. C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées (x ; y ; z) tels que : $y\ge \dfrac{k}{x^2}$ et $z=k$. Calculer en fonction de k, l'aire $S(k)$ exprim ée en unités d'aire, de cette surface.

b. On pose $S(0) = 1$. Calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D). On utilisera $V=\int_0^1 S(k)dk$.



10. Pondichéry, Juin 2004

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(0\,;5\,;5)$ et $B(0\,;0\,;10)$.

1. Dans cette question on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$, rapporté au repère $(0;\vec{j},\vec{k})$. On note (C) le cercle de centre B passant par A. Démontrer que la droite (OA) est tangente à (C).

2. On nomme (S) la sphère engendrée par la rotation du cercle (C) autour de l'axe (Oz) et (Γ) le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).

a. Démontrer que le cône (Γ) a pour équation $x^2+y^2=z^2$.

b. Déterminer l'intersection du cône (Γ) et de la sphère (S). Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône (Γ) par le plan P_1 d'équation $x = 1$. Dans P_1 l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection. Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

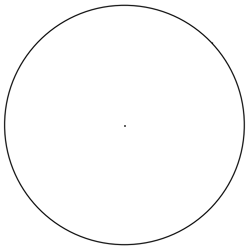


figure 1

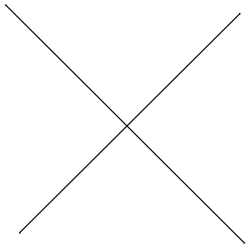


figure 2

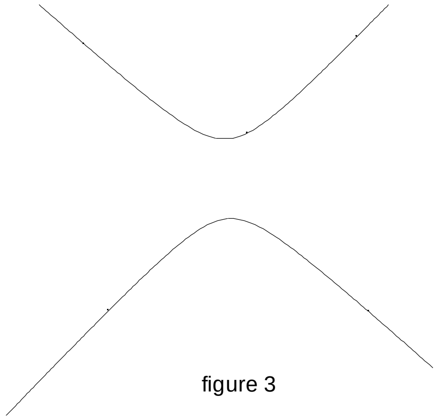


figure 3

4. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de (Γ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent être simultanément impairs.

11. Amérique du Sud, nov 2008

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées (0 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; 1 ; 0) et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t' \\ x = 1 - t', t' \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. Une équation de S

a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite D.

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D.

Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}\,;\,\dfrac{x-y}{2}\,;\,2-z\right)$.

En déduire MH^2 en fonction de x, y et z.

Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que :

$$MK^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + (2+z)^2,$$

relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface S

a. On coupe S par le plan (xOy). Déterminer la section obtenue.

b. On coupe S par un plan P parallèle au plan (xOy). Quelle est la nature de la section obtenue ?

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

12. Divers 1

On a tracé une portion de la surface S d'équation $z = y - \ln(x)$, définie pour $x > 0$, ainsi que les plans P_1 et P_5 d'équations respectives $x = 1$ et $x = 5$.

1. Montrer que P_1 et P_5 coupent S suivant deux droites parallèles D_1 et D_5.

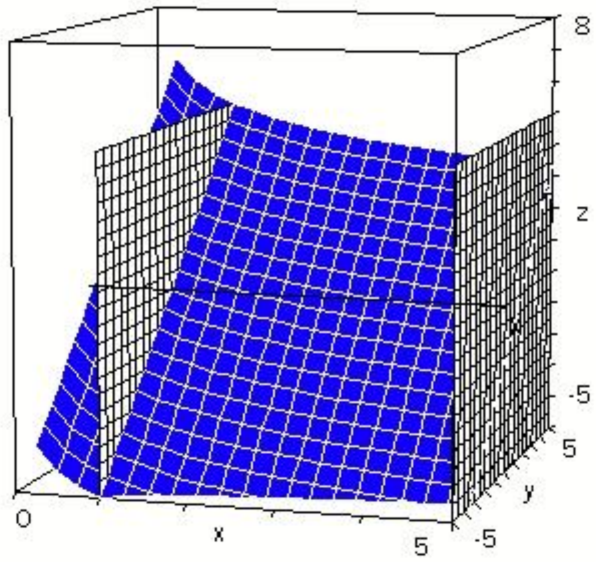
2. Montrer que le plan R d'équation $z = y$ coupe S suivant une des deux droites précédentes.

3. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Démontrer par récurrence l'inégalité suivante : $2^{n-1} > n$.

b. n étant un entier naturel non nul, on trace l'intersection C_n de S avec le plan P_n d'équation $x = n$. Montrer que C_n est une droite dont on donnera une représentation paramétrique.

c. C_n coupe le plan (xOy) en un point M_n. Montrer qu'on ne peut pas trouver d'entier naturel strictement supérieur à 2 tel que M_1, M_2 et M_n soient alignés.



13. Divers 2

1. Résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$.

2. Justifier le tableau de variations suivant de la fonction $g(t) = (1-t)\ln\dfrac{1-t}{2} + t\ln t\, g(t)$.

t	0	1/3	1
g	↘	$-\ln 3$	↗

3. Soit k un réel fixé, pris dans l'intervalle $]0 ; 1[$. Justifier le tableau de variations suivant de la fonction $f_k(x) = x\ln x + k\ln k + (1-x-k)\ln(1-x-k)$ où g est la fonction définie précédemment.

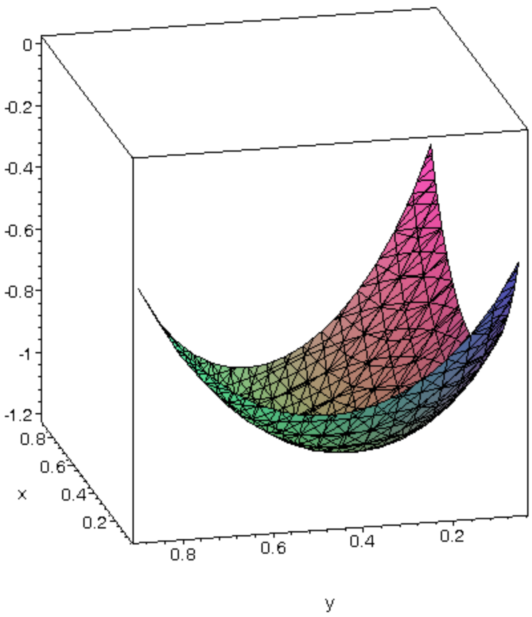
x	0	$\dfrac{1-k}{2}$	$1-k$
f_k	↘	$g(k)$	↗

4. Soit la surface S définie par l'équation suivante : $z = x\ln x + y\ln y + (1 - x - y)\ln(1 - x - y)$.

a. On projette orthogonalement cette surface sur le plan (xOy). Qu'obtient-on ?

b. Soit k un réel pris dans $]0 ; 1[$. Etablir que le point $M_k\left(\dfrac{1-k}{2} ; k ; (1-k)\ln\dfrac{1-k}{2} + k\ln k\right)$ est le point le plus bas de S dans le plan P_k d'équation $y = k$.

c. En déduire les coordonnées du point de S de côte minimale.



14. Bac C, Nancy, 1977

Soit E l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,. On appelle A, B, C, D les points de coordonnées $(1;-1;0)$, $(2;0;1)$, $(-1;1;0)$, $(-2;0;1)$.

Soient λ et μ des nombres réels ; on désigne par P le barycentre des points A et B affectés des coefficients $1-\lambda$ et λ et par Q celui des points C et D affectés des coefficients $1+\lambda$ et $-\lambda$.

Enfin on appelle G le barycentre du système $\left\{\left(P,\dfrac{1+\mu}{2}\right),\left(Q,\dfrac{1-\mu}{2}\right)\right\}$.

1. Calculer en fonction de λ les coordonnées de P et Q. Déterminer alors les coordonnées de G.

2. a. Le réel λ étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand μ varie est une droite (D_λ) on donnera une représentation paramétrique.

b. a. Le réel μ étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand λ varie est une droite (D_μ) on donnera une représentation paramétrique.

3. Montrer que l'ensemble S des points G obtenus quand (λ,μ) décrit $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points de E dont les coordonnées vérifient $x^2-y^2=4z$.

Déterminer l'intersection de S avec chacun des trois plans $x=0$, $z=0$ et $z=1$. Représenter les trois ensembles obtenus sur des figures séparées en rapportant chacun des plans considérés à un repère orthonormé simple.