

1. 1. QCM	1	1. 13. Suite récurrente, France remplit 2007	14
1. 2. Fesic 2002 Exercice 10	1	1. 14. Barycentre 1, N. Calédonie 2005	16
1. 3. Fesic 2004 Exercice 9	2	1. 15. Barycentre 2, N. Calédonie 2004	17
1. 4. Fesic 2004 Exercice 10	2	1. 16. Une exponentielle, Pondicherry 2005	18
1. 5. Fesic 2004 Exercice 11	3	1. 17. Formule de Stirling	19
1. 6. Fesic 2004 Exercice 12	4	1. 18. Suites adjacentes, Antilles 2004	21
1. 7. QCM divers	5	1. 19. Suites adjacentes : calcul de la racine carrée	22
1. 8. ROC+exemples, France 2005	6	1. 20. Suites adjacentes : aire sous une courbe	24
1. 9. Récurrence 1, France 2004	7	1. 21. Suites adjacentes : le principe de la dichotomie	29
1. 10. Récurrence 2, Pondicherry 2004	8	1. 22. Ln et méthode de Newton-Raphson, Asie 2000	30
1. 11. Récurrence 3, Amérique du Nord 2005	8	1. 23. ROC+suite solution équation, Polynésie 2005	33
1. 12. Suite homographique, N. Calédonie 06/2008	12		

1. 1. QCM

Répondez par VRAI ou FAUX en JUSTIFIANT (sauf la question f. où il « suffit » de prouver).

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in]0 ; +\infty [$.

On note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Alors

a. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.

b. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 2$.

c. Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

d. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$.

e. Si $q = 2$, alors $S_4 = 15$.

f. Démontrer par récurrence que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$.

Correction

a. Vrai, b. Vrai, c. Vrai, d. Vrai, e. Faux.

1. 2. Fesic 2002 Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$$

On définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie.

Correction

a. **Faux** : Si la suite v_n est arithmétique, $v_{n+1} - v_n$ est constante :

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - 2u_{n+1} + u_n = -\frac{5}{3}u_{n+1} + \frac{5}{3}u_n = -\frac{5}{3}v_n ;$$

c'est donc faux, mais nous gagnons une information intéressante : $v_{n+1} = -\frac{5}{3}v_n + v_n = -\frac{2}{3}v_n$; v_n est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1 - 0 = 1$ d'où $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

b. **Vrai** : Recommençons :

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1} - u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = 0 \text{ donc c'est vrai. En plus on a } w_n = w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1.$$

c. **Vrai** : $\frac{3}{5}(w_n - v_n) = \frac{3}{5}\left(u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} + u_n\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}u_n\right) = u_n$. Ok !

d. **Faux** : Remplaçons pour calculer u_n : $u_n = \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ dont la limite est $\frac{3}{5}$.

1. 3. Fesic 2004 Exercice 9

Soient l un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes tous strictement positifs. Pour les questions a., b., c. on suppose que u_n converge vers l .

a. l est strictement positif.

b. Il existe n entier naturel tel que l soit une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.

c. La suite $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(l)$.

d. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \ln u_n$ et que $u_0 > u_1$. On ne suppose pas que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	F	V

a. Si l pouvait être négative, il existerait des termes de u_n négatifs à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

Par contre l peut être nulle : par exemple les suites q^n avec $0 < q < 1$ convergent vers 0.

b. La traduction de cette phrase est : il existe n tel que $|u_n - l| \leq 10^{-3}$; c'est la définition même d'une suite convergente : il existe N tel que pour tout $n > N$, $|u_n - l| \leq \epsilon$ où ϵ converge vers 0.

c. Supposons que u_n converge vers 0 alors la suite $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ « convergerait » vers $-\infty$. En fait cette suite divergerait.

d. La fonction \ln est croissante donc si $u_0 > u_1$ alors $\ln u_0 > \ln u_1 \Leftrightarrow u_1 > u_2$, etc. Par récurrence on a $u_n > u_{n+1}$ donc bien décroissante. Remarquez que si on avait $u_0 < u_1$ alors la suite aurait été croissante. En fait dans le cas d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante tout dépend de l'ordre des deux premiers termes.

1. 4. Fesic 2004 Exercice 10

On considère la suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$. Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n .

- a. La suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- b. Quel que soit n entier naturel, les triangles OM_nM_{n+1} sont rectangles.
- c. M_n appartient à l'axe des abscisses si et seulement si n est un multiple de 4.
- d. Pour tout n entier naturel, $z_n = \frac{e^{\frac{i n \pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	F	V	V	V

a. On a $\left| \frac{1+i}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Il nous faut calculer $(\overrightarrow{M_n O}, \overrightarrow{M_n M_{n+1}}) = \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{0 - z_n}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{2} - 1\right) = \arg\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, ainsi que

$(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Le dernier angle vaut donc bien $\frac{\pi}{2}$ (on aurait pu calculer un seul angle mais ç'aurait été moins amusant...).

c. On a évidemment $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i \pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\frac{i n \pi}{4}}$ donc M_n appartient à l'axe des abscisses

si $n \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = \frac{4k\pi}{\pi} = 4k$.

d. Avec la réponse au c. et en remarquant que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on retrouve bien $z_n = \frac{e^{\frac{i n \pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

1. 5. Fesic 2004 Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère dans ce repère les points $A(1; -1)$, $B(5; 3)$ et I le milieu de $[AB]$. Soit $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

* $G_0 = O$,

* Pour n entier naturel, G_{n+1} est le barycentre de $\{(G_n; 2), (A; 1), (B; 1)\}$.

On appelle $(x_n; y_n)$ les coordonnées de G_n .

a. G_1, G_2 et G_3 sont alignés.

b. Quel que soit n , G_{n+1} est l'image de G_n par l'homothétie de centre I et de rapport 2.

c. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = x_n - 3$ est une suite géométrique de premier terme -3 et de raison $\frac{1}{2}$.

d. Pour tout n , $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	V	F	V	V

a. En utilisant le barycentre partiel on a G_{n+1} barycentre de $\{(G_n; 2), (I; 2)\}$, soit le milieu de $[G_n I]$, tous les G_n sont donc alignés.

b. L'homothétie est bien de centre I mais de rapport 1/2. Les coordonnées de I sont (3 ; 2).

c. En utilisant la définition d'une homothétie : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, on a
$$\begin{cases} x_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(x_n - 3) \\ y_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(y_n - 2) \end{cases}$$
 d'où $u_n = x_n - 3$ est

géométrique de raison 1/2, de premier terme $u_0 = x_0 - 3 = -3$.

d. Avec ce qu'on a fait, $(x_n - 3) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow x_n = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. On peut compléter avec le calcul de y_n :

$y_n - 2 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow y_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Quand n tend vers l'infini x_n et y_n tendent respectivement vers 3 et 2, soit G_n tend vers I (ce qui était prévisible puisqu'à chaque itération on prend le milieu de $[G_n I]$).

1. 6. Fesic 2004 Exercice 12

On considère une droite graduée Δ d'origine O. On considère les suites de points $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies ainsi :

* $G_0 = O$,

* Pour n entier naturel, G_{n+1} est le barycentre de $\{(G_n ; 2), (H_n ; 3)\}$,

* H_0 a pour abscisse 1,

* Pour n entier naturel, H_{n+1} est le barycentre de $\{(G_n ; 3), (H_n ; 2)\}$.

On appelle g_n et h_n les abscisses respectives de G_n et H_n .

a. La suite $(g_n - h_n)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$.

b. La suite $(g_n + h_n)$ est une suite constante.

c. Les deux suites g_n et h_n convergent vers la même limite.

d. Les suites g_n et h_n sont adjacentes.

Correction

Question	a	b	c	d
Réponse	V	V	V	F

a. Il faut évidemment trouver les relations entre g_n et h_n .

G_{n+1} barycentre de $\{(G_n ; 2), (H_n ; 3)\}$ nous donne

$$2(g_{n+1} - g_n) + 3(g_{n+1} - h_n) = 0 \Leftrightarrow 5g_{n+1} = 2g_n + 3h_n \Leftrightarrow g_{n+1} = \frac{2}{5}g_n + \frac{3}{5}h_n ;$$

H_{n+1} barycentre de $\{(G_n ; 3), (H_n ; 2)\}$ nous donne

$$3(h_{n+1} - g_n) + 2(h_{n+1} - h_n) = 0 \Leftrightarrow 5h_{n+1} = 3g_n + 2h_n \Leftrightarrow h_{n+1} = \frac{3}{5}g_n + \frac{2}{5}h_n ;$$

d'où $g_{n+1} - h_{n+1} = \frac{2}{5}g_n + \frac{3}{5}h_n - \frac{3}{5}g_n - \frac{2}{5}h_n = -\frac{1}{5}(g_n - h_n)$.

On peut alors calculer $g_n - h_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^n (g_0 - h_0) = -\left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Quelle est la signification géométrique de ce résultat ?

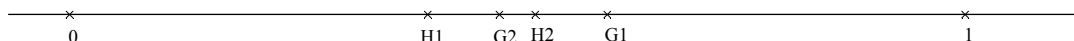
b. $g_{n+1} + h_{n+1} = \frac{5}{5}g_n + \frac{5}{5}h_n = g_n + h_n = \dots = g_0 + h_0 = 0 + 1 = 1$. Quelle est la signification géométrique de ce résultat ?

c. Des deux relations précédentes on tire un petit système : $\begin{cases} g_n - h_n = -(-1/5)^n \\ g_n + h_n = 1 \end{cases}$ d'où

$$\begin{cases} g_n = \frac{1}{2} \left(1 - (-1/5)^n \right) \\ h_n = \frac{1}{2} \left(1 + (-1/5)^n \right) \end{cases} \quad \text{qui convergent toutes les deux vers } \frac{1}{2}, \text{ soit le milieu de } [G_0H_0].$$

d. C'est du cours... la condition de monotonie des deux suites n'est pas respectée.

On voit bien qu'à chaque itération la distance $[G_nH_n]$ est divisée par 5.



1. 7. QCM divers

1. Pour tout réel x , e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a.	Pour tous les réels a et b strictement positifs, $(e^a)^{\ln b} = b^a$.
Affirmation 1. b.	Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$.
Affirmation 1. c.	La tangente en 1 à la courbe de la fonction exponentielle a pour équation $y = ex$.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I .

Affirmation 2. a.	Si f est continue sur I , alors f admet une seule primitive sur I .
Affirmation 2. b.	Si f n'est pas continue en a , alors f n'est pas dérivable en a .
Affirmation 2. c.	Si f n'est pas dérivable en a , alors la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite infinie en a .

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} .

Affirmation 3. a.	Si (u_n) est monotone décroissante et minorée et (v_n) est monotone croissante et majorée alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
Affirmation 3. b.	Si on a $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$ avec a et b dans l'intervalle $]0; 1[$ alors u_n converge.
Affirmation 3. c.	Si (u_n) converge, alors la suite $(\ln u_n)$ converge.
Affirmation 3. d.	Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$.

Correction

1. Pour tout réel x , e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a.	Vrai : $(e^a)^{\ln b} = (e^{\ln b})^a = b^a$.
-------------------	--

Affirmation 1. b.	Faux : $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b = \ln(ab)$.
Affirmation 1. c.	Vrai : en 1, la tangente est $y = e^1(x-1) + e^1 = ex - e + e = ex$.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I .

Affirmation 2. a.	Faux : Si f est continue sur I , alors f admet une infinité de primitives sur I , toutes différentes d'une constante.
Affirmation 2. b.	Vrai : Si f n'est pas continue en a , on n'a pas $f(a)$ et f n'est pas dérivable en a .
Affirmation 2. c.	Faux : pas forcément, on peut avoir des demi-tangentes.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} .

Affirmation 3. a.	Faux : il faudrait par exemple en plus que $v_n - u_n$ tende vers 0.
Affirmation 3. b.	Vrai : u_n est croissante, et si on fait la somme des inégalités $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$, on a $\sum_k a^k < u_{n+1} - u_0 < \sum_k b^k \Leftrightarrow \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + u_0 < u_{n+1} < \frac{1-b^{n+1}}{1-b} + u_0 < \frac{1}{1-b} + u_0$; donc u_n est bornée.
Affirmation 3. c.	Faux : Si (u_n) converge vers 0, alors la suite $(\ln u_n)$ diverge.
Affirmation 3. d.	Vrai : $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$.

1. 8. ROC+exemples, France 2005

4 points

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

PARTIE A : QUESTION DE COURS

On suppose connus les résultats suivants :

- (1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;
- (2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à \mathbb{N} , on a $u_n \leq v_n$;
- (3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

PARTIE B

On considère une suite (u_n) , définie sur \mathbb{N} dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Correction

PARTIE A : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

On a $u_n \leq v_n$ et (v_n) décroissante donc $u_n \leq v_n \leq \dots \leq v_0$ d'où (u_n) est majorée et converge vers l ; même chose pour (v_n) qui est décroissante et minorée par u_0 et converge vers l' .

Comme $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $l - l' = 0 \Rightarrow l = l'$.

Pour une première ROC la difficulté est raisonnable... Inutile de raconter sa vie non plus !

PARTIE B : (u_n) non nulle, $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente :

Faux : n'importe quelle suite convergente vers 0 ne marche pas, prendre par exemple $1/n$.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 :

Vrai : $2 \leq u_n \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{2}{2} \leq -\frac{2}{u_n} \Rightarrow -1 \leq v_n$.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante :

Faux ; $v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{u_{n+1}} - \frac{-2}{u_n} = \frac{-2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$; si (u_n) est décroissante, $u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow 0 \leq u_n - u_{n+1}$, le numérateur est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite (u_n) n'a que des termes positifs, (v_n) est décroissante.

est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite (u_n) n'a que des termes positifs, (v_n) est décroissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Faux : une suite peut être divergente sans tendre vers l'infini, par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge, de même évidemment que v_n .

Dans l'ensemble les questions ne sont pas trop compliquées, la fabrication de contre-exemples est une bonne activité qui permet la compréhension des phénomènes en jeu. Il est vrai que ne pas connaître les réponses est déstabilisant, mais les correcteurs feront certainement preuve de compréhension.

1. 9. Récurrence 1, France 2004

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Correction

1. $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ qui est évidemment positif. u_n est croissante.

2. a. Par récurrence : $u_0 = 1 > 0^2$, la propriété est vraie au rang 0. Au rang $n + 1$ il faut montrer que $u_{n+1} > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$; or si $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$ qui est évidemment supérieur à $n^2 + 2n + 1$. C'est fini.

- b. Comme et que n^2 tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend clairement vers $+\infty$.

3. On calcule les premières valeurs de u_n : $u_0 = 1, u_1 = 1 + 2 \cdot 0 + 3 = 4, u_2 = 4 + 2 \cdot 1 + 3 = 9, u_3 = 9 + 2 \cdot 2 + 3 = 16$.
On voit apparaître la suite des carrés des entiers avec un décalage d'un cran par rapport à l'indice ; il s'agit donc de montrer que $u_n = (n+1)^2$: encore une récurrence.

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2. \text{ C'est bon.}$$

1. 10. Récurrence 2, Pondicherry 2004

1. Soit la suite u définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3 . On exprimera chacun des termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie par $w_n = \frac{n}{n+1}$.

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel $n, u_n = w_n$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier n non nul par $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n . Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Correction

1. a. On a $u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{2-1/2} = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{1}{2-2/3} = \frac{3}{4}$.

b. On voit facilement que les termes de u_n sont ceux de $w_n = \frac{n}{n+1}$.

c. Par récurrence (ainsi que demandé) ; on vérifie au rang 0 : $u_0 = 0, w_0 = \frac{0}{1} = 0$, ok.

Supposons alors que $u_n = w_n$ et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$: ceci est équivalent à $\frac{1}{2-u_n} = \frac{n+1}{n+2}$, soit

$$2 - u_n = \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = 2 - \frac{n+2}{n+1} = \frac{2n+2-n-2}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \text{ Tout va bien.}$$

2. a. $v_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right), v_2 = \ln\left(\frac{2}{3}\right), v_3 = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

On peut utiliser $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$: $v_1 + v_2 + v_3 = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$ ou bien

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b : v_1 + v_2 + v_3 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \ln \frac{1}{4} = -\ln 4.$$

b. $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{n-1}{n} + \ln \frac{n}{n+1}$,

soit $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln(n-1) - \ln n + \ln n - \ln(n+1)$.

Tous les termes intermédiaires disparaissent ; on a donc $S_n = -\ln(n+1)$ qui tend évidemment vers $-\infty$.

1. 11. Récurrence 3, Amérique du Nord 2005

6 points

Le graphique ci-dessous sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$. Montrer que si $x \in [1 ; 2]$ alors $f(x) \in [1 ; 2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n),$$

$$v_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 1 \leq v_n \leq 2.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} \leq v_n.$$

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n, 1 \leq u_n \leq 2.$$

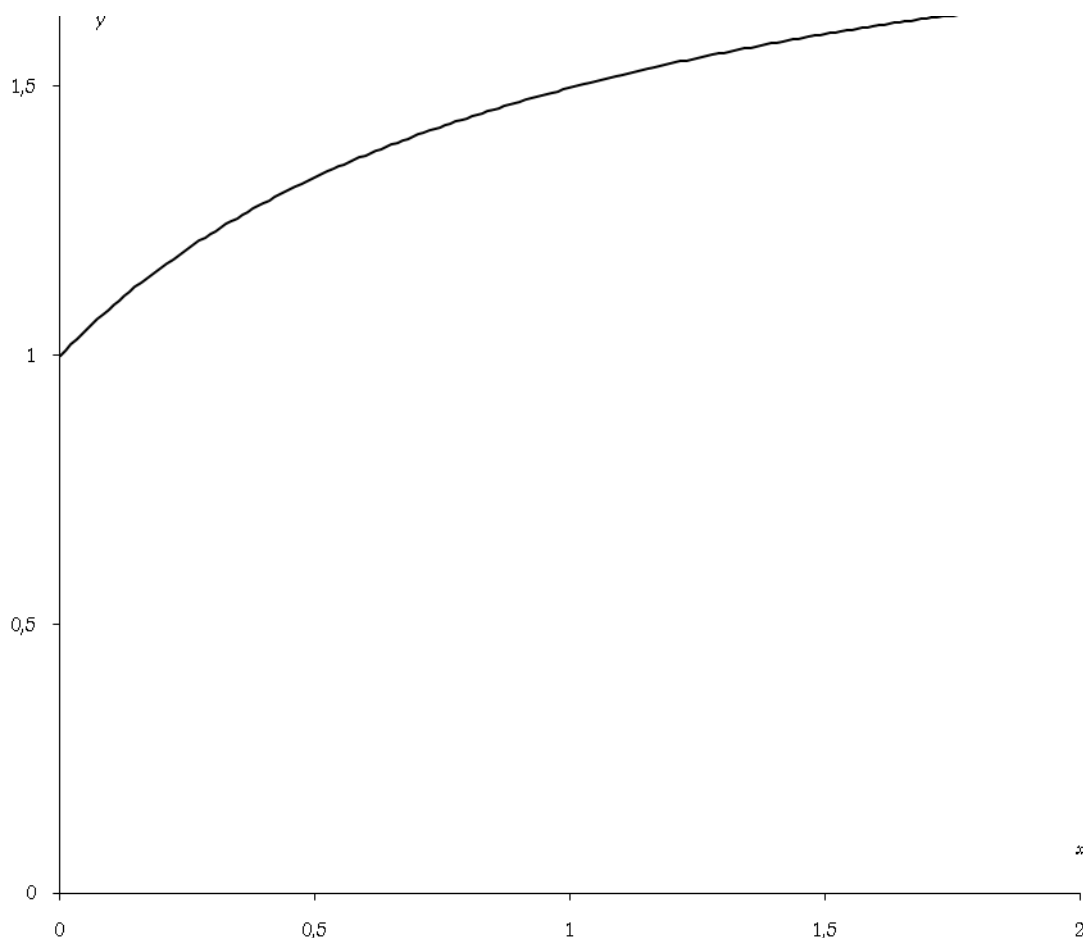
$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n \leq u_{n+1}.$$

c. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

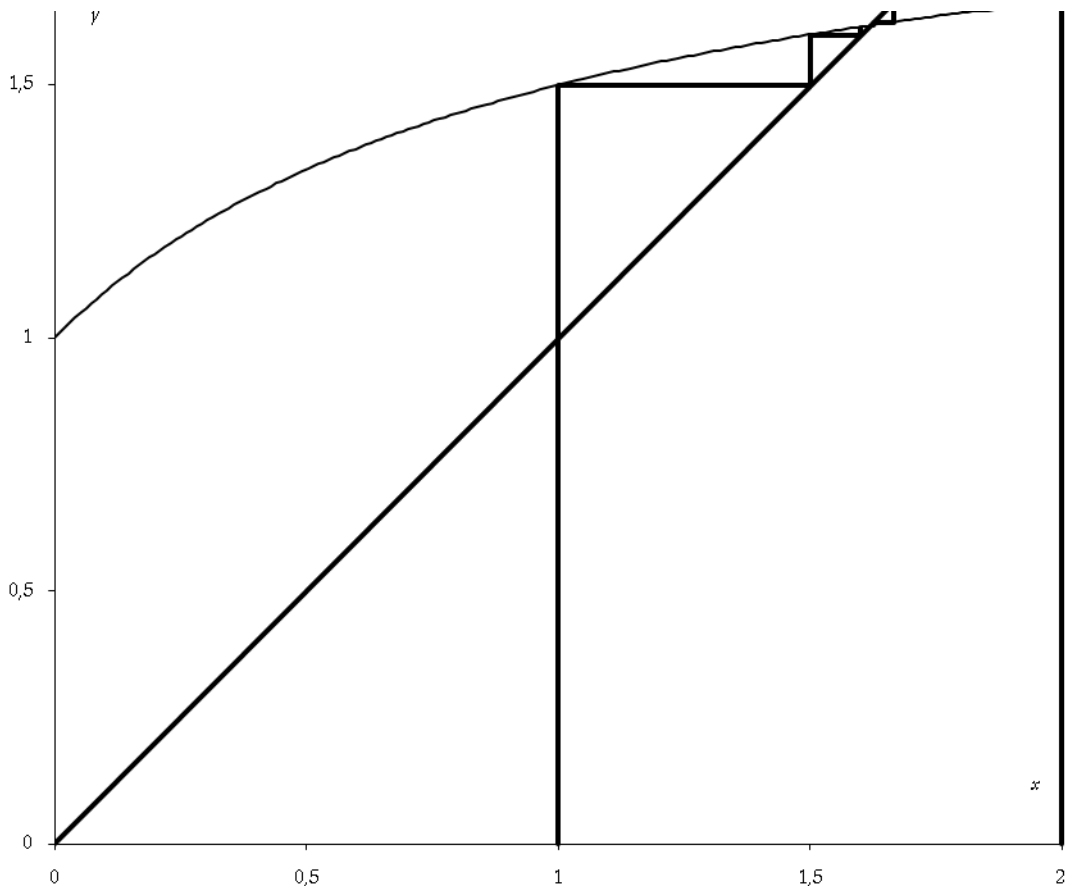
e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α . Déterminer la valeur exacte de α .



Correction

1. $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante ; $f(1) = \frac{3}{2} > 1$ et $f(2) = \frac{5}{3} < 2$ donc si $x \in [1; 2]$, $f(x) \in [1; 2]$.

2. a. Visiblement la suite u_n est croissante, et converge vers le point d'intersection entre la courbe de f et la droite ($y = x$), soit environ 1,6 ; de même v_n semble décroissante et converger vers le même point.



b. Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ qui est bien dans l'intervalle $[1 ; 2]$; par ailleurs si $1 \leq v_n \leq 2$ alors comme f est croissante, $f(1) \leq f(v_n) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq v_{n+1} \leq 2$; la propriété est toujours vraie.

De même on a $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \leq v_0$; par ailleurs si $v_{n+1} \leq v_n \Rightarrow f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \Rightarrow v_{n+2} \leq v_{n+1}$, etc.

Remarquez que c'est $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \leq v_0$ qui entraîne tous les autres termes derrière avec la complicité de la croissance de f . Pour u_n c'est pratiquement pareil, sauf que $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2} > u_0$ et donc, etc.

c. On n'échappe pas au calcul :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2u_n v_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_n v_n - v_n - 2u_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

$v_{n+1} - u_{n+1}$ est du signe de $v_n - u_n$; comme $v_0 - u_0 = 2 - 1 > 0$, par récurrence on a $v_n - u_n \geq 0$; on a $v_n > 1 \Rightarrow v_n + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{v_n + 1} < \frac{1}{2}$ et pareil pour u_n donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (v_n - u_n) = \frac{1}{4} (v_n - u_n)$.

d. Encore une récurrence : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$; grâce à la relation précédente on a évidemment

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4} (v_n - u_n) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

e. Les suites u_n et v_n sont adjacentes car $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$; elles convergent bien vers une même limite α telle que

$$\alpha = f(\alpha) = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1} \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\ \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618 \end{cases}.$$

La limite est donc la première racine, soit $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. 12. Suite homographique, N. Calédonie 06/2008

5 points

On considère la fonction f définie sur $] -1 ; 6[$ par $f(x) = \frac{9}{6-x}$. On définit pour tout entier n la suite (U_n)

$$\text{par } \begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}.$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur ce graphique les points $M_0(U_0 ; 0)$, $M_1(U_1 ; 0)$, $M_2(U_2 ; 0)$, $M_3(U_3 ; 0)$ et $M_4(U_4 ; 0)$.

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2. a. Démontrer que si $x < 3$ on a alors $\frac{9}{6-x} < 3$. En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n .

b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n) .

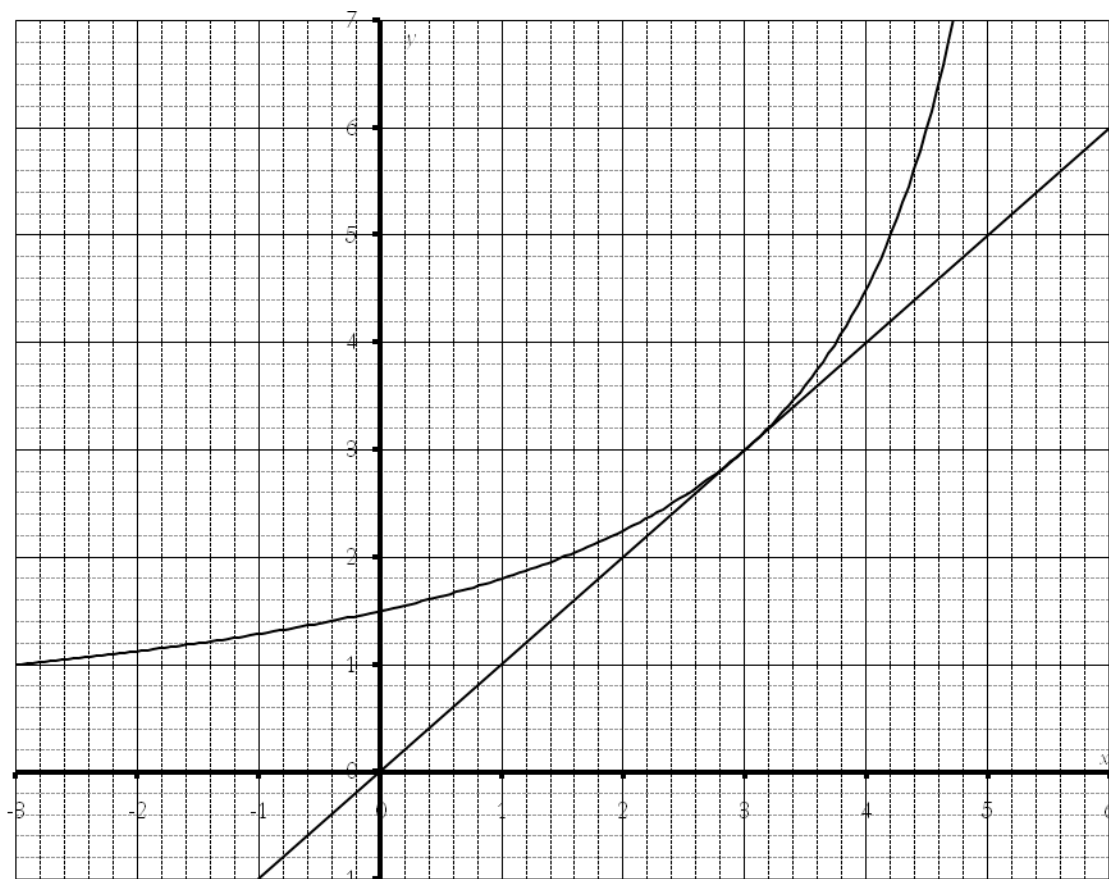
c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n .

a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

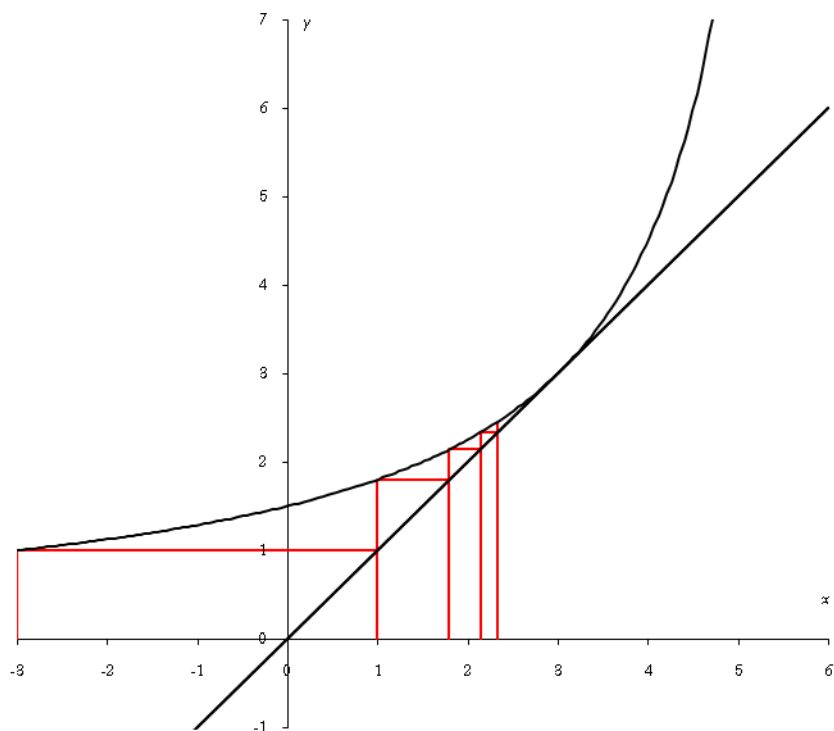
b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .

c. Calculer la limite de la suite (U_n) .



Correction

1. Voir la figure ci-dessous.



La suite semble croissante et converger vers le point $(3 ; 3)$, soit vers une limite égale à 3.

2. a. Si $x < 3$, $-x > -3 \Rightarrow 6 - x > 3 \Rightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{6-x} < 3$ (on aurait pu utiliser les variations de f).

Par récurrence on a alors : $U_0 < 3$ par définition ; si $U_n < 3$ alors $f(U_n) = \frac{9}{6-U_n} < 3$ et donc $U_{n+1} < 3$.

b. $U_{n+1} - U_n = \frac{9}{6-U_n} - U_n = \frac{U_n^2 - 6U_n + 9}{6-U_n} = \frac{(U_n - 3)^2}{6-U_n}$ qui est positif puisque $U_n < 6$.

La suite est croissante.

c. U_n est croissante et majorée, elle converge donc.

3. a. $V_n = \frac{1}{U_n - 3} \Leftrightarrow U_n - 3 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow U_n = 3 + \frac{1}{V_n}$; on a donc en remplaçant :

$$U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{6-3-\frac{1}{V_n}} \Leftrightarrow \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{3-\frac{1}{V_n}} - 3 = \frac{9V_n}{3V_n-1} - 3 = \frac{9V_n - 9V_n + 3}{3V_n-1} = \frac{3}{3V_n-1},$$

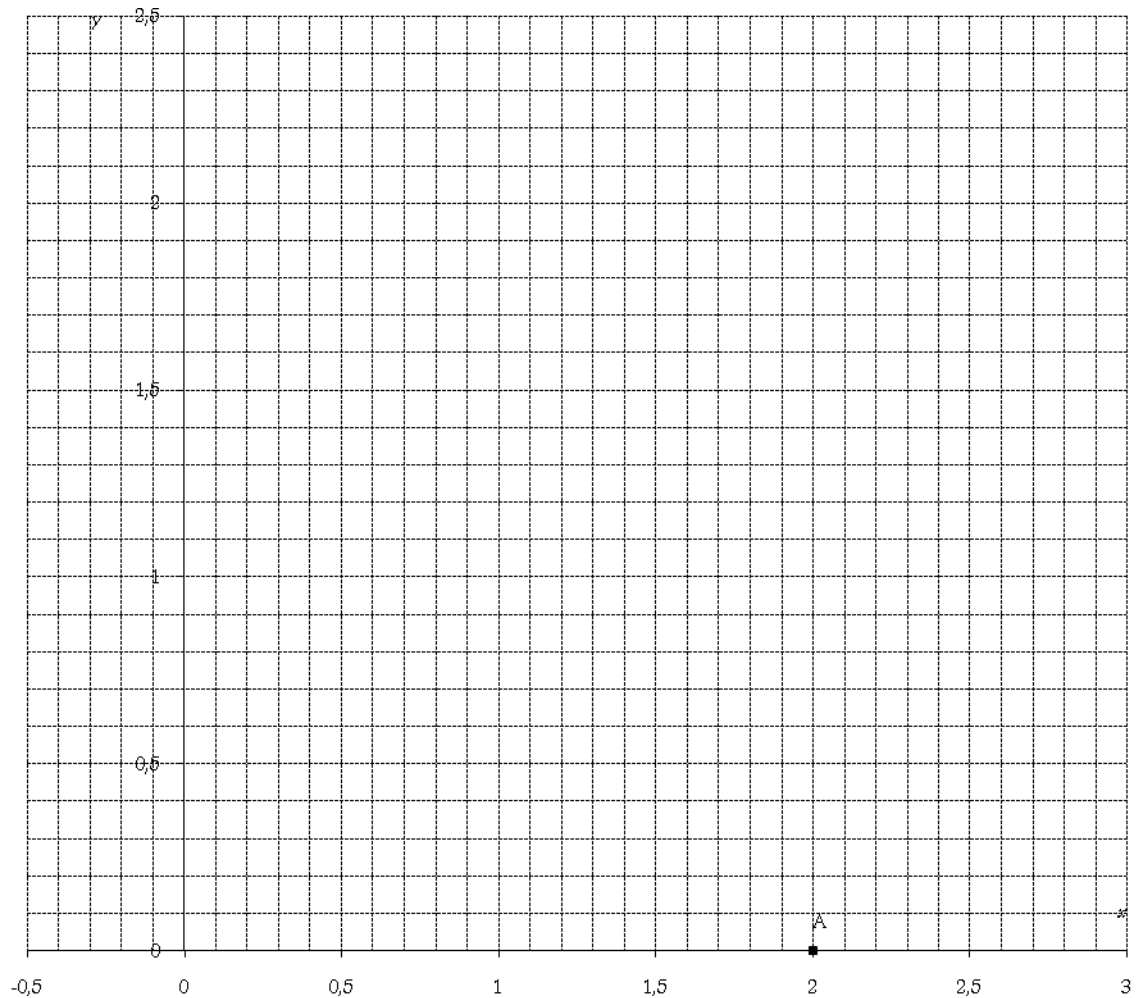
soit $V_{n+1} = \frac{3V_n-1}{3} = V_n - \frac{1}{3}$; (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. $V_0 = \frac{1}{U_0-3} = -\frac{1}{6}$ d'où $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = -\frac{1+2n}{6}$ et $U_n = 3 + \frac{1}{V_n} = 3 - \frac{6}{2n+1}$.

c. La limite de la suite (U_n) est alors bien évidemment 3...

1. 13. Suite récurrente, France remplit 2007

6 points



1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n .

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2 ; 0)$.

Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $l = \frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > \frac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$ c'est-à-dire que

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right).$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1,277 \dots 7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.

En utilisant le 2. a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

Correction

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

a. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .

b. Si la suite u est convergente alors sa limite l est telle que $l = \frac{1}{3}l + \frac{23}{27} \Leftrightarrow \frac{2}{3}l = \frac{23}{27} \Leftrightarrow l = \frac{23}{18}$.

c. Par récurrence : $u_0 = 2 > \frac{23}{18}$.

On suppose $u_n > \frac{23}{18}$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} > \frac{1}{3} \times \frac{23}{18} + \frac{23}{27} = \frac{23+46}{54} = \frac{69}{54} = \frac{23}{18}$ CQFD.

d. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27}$ qui est positif lorsque $-\frac{2}{3}u_n > -\frac{23}{27} \Leftrightarrow u_n < \frac{23}{18}$, ce qui est faux donc u_n est décroissante. La suite est décroissante, minorée elle converge donc vers $l = \frac{23}{18}$.

2. a. Somme des n premiers termes (de 2 à $n+1$ il y a n termes) d'une suite géométrique de premier terme

$$\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \text{ et de raison } \frac{1}{10} : \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{100} \left(\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \right) = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right).$$

b. $v_0 = 1,2$, $v_1 = v_0 + 0,07 = v_0 + 7 \frac{1}{10^2}$, $v_2 = v_1 + 0,007 = v_0 + 7 \frac{1}{10^2} + 7 \frac{1}{10^3}$, etc.

On a donc $v_n = 1,2 + 7 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} \right) = 1,2 + 7 \left[\frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) \right]$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0 et v_n tend vers $1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$.

3. u décroissante et minorée, v croissante et majorée (évident) ; elles ont même limite, elles sont adjacentes.

1. 14. Barycentre 1, N. Caledonie 2005

5 points

PARTIE A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points : A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n , A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $(A_0 ; \vec{i})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12} \overrightarrow{A_0B_0}$.

Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n . Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

PARTIE B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0 ; v_0 = 12 ; u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

- Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
- Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
- Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
- On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

PARTIE C

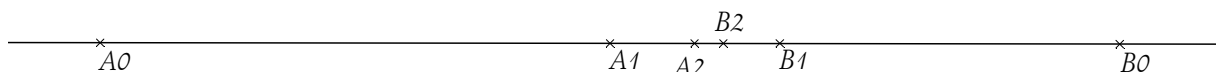
À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

PARTIE A

A_{n+1} milieu du segment $[A_n B_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1); (B_n, 2)\}$.

1.



Même quand n n'est pas très grand, les suites de points convergent vers un point qui semble être à peu près au milieu de $[A_2 B_2]$.

2. On a dans ce repère les abscisses suivantes : $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$.

Si u_n et v_n sont les abscisses des points A_n et B_n , on a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ car A_{n+1} est le milieu de $[A_n B_n]$ et

$$v_{n+1} = \frac{1 \cdot u_n + 2 \cdot v_n}{1 + 2} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ car } B_{n+1} \text{ est le barycentre de } \{(A_n, 1); (B_n, 2)\}.$$

PARTIE B

1. $w_n = v_n - u_n \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{v_n - u_n}{6}$ donc w_n est une suite

géométrique de raison $1/6$, donc convergente vers 0. Tous ses termes sont positifs car $w_n = w_0 \frac{1}{6^n} = \frac{12}{6^n}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n > 0$ donc (u_n) est croissante ;

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3} = -\frac{1}{3} w_n < 0 \text{ donc la suite } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

3. Comme $w_n > 0$, on a $u_n < v_n$ donc u_n est croissante majorée, v_n décroissante minorée, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et sont adjacentes car $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$; elles ont donc la même limite.

4. $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = 2 \frac{u_n + v_n}{2} + 3 \frac{u_n + 2v_n}{3} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n = \dots = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$.

PARTIE C

Comme u_n et v_n tendent vers la même limite l , en remplaçant dans t_n on a :

$$t_n = 2u_n + 3v_n = 36 \rightarrow 2l + 3l = 5l = 36 \Rightarrow l = \frac{36}{5}.$$

1. 15. Barycentre 2, N. Calédonie 2004

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2 .
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
 - a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .
3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
 - a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.
 - b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Correction

$$1. u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}, v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{15}{4}, u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}, v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{59}{16}.$$

$$2. a. w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n.$$

$$b. w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1 \text{ donc } w_n = 1 \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}; \text{ sa limite est évidemment } 0.$$

3. On a vu que $\frac{u_{n+1} - u_n}{2} = w_{n+1} > 0$ donc u_n est croissante ; par ailleurs $w_n = v_n - u_n > 0$ donc $u_n > v_n$;
 enfin $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} v_n - v_n = \frac{1}{2} (u_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n \right) = \frac{1}{4} (u_n - v_n) < 0$ donc v_n est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$ or c'est justement la limite de w_n . Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant...).

$$4. a. t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n + v_n}{2} + 2 \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n \right) = \frac{1}{3} (u_n + 2v_n) = t_n. \text{ On a donc}$$

$$t_n = \frac{1}{3} (u_0 + v_0) = \frac{7}{3}.$$

$$b. \text{ Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ ont même limite } l \text{ donc à l'infini, en remplaçant dans } t_n : \frac{7}{3} = \frac{1}{3} (l + 2l) \Rightarrow l = \frac{7}{3}.$$

1. 16. Une exponentielle, Pondicherry 2005

6 points

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1; +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction

1. On remplace, on simplifie et on a ce qui est demandé :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0,95 \frac{n^{10}}{2^n} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}} \leq 0,95 \frac{2^n \cdot 2}{2^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} \leq 1,9 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. a. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$; $f'(x) = 10 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^9 \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 10 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^9 < 0$ donc f est décroissante ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10} = 1^{10} = 1.$$

b. $f(1) = 2^{10}$ et f décroissante donc f est bijective de $[1; +\infty[$ vers $]1; 2^{10}]$; comme 1,9 est dans cet intervalle, il existe bien un unique réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. On a $f(15) \approx 1,9067$ et $f(16) \approx 1,8335$ d'où $16 - 1 = 15 \leq \alpha \leq 16$.

d. Lorsque $x \geq \alpha$, comme f est décroissante, on a : $f(x) \leq f(\alpha) = 1,9$, donc pour tous les n tels que

$$n \geq 16 \geq \alpha, \text{ on a } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} = f(n) \leq f(16) \leq f(\alpha) = 1,9.$$

3. a. D'après ce que nous venons de dire, la suite (u_n) est telle que $u_{n+1} \leq 0,95u_n$ à partir du rang 16 ; comme tous les termes sont évidemment positifs, la suite (u_n) est décroissante à partir de ce rang.

b. Décroissante et minorée par 0 donc convergente.

4. $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}$: on vérifie facilement au rang 16 car $0 \leq u_{16} \leq u_{16}$; quand on passe au rang suivant, on a $u_{n+1} \leq 0,95u_n \leq 0,95 \cdot 0,95^{n-16} u_{16} = 0,95^{(n+1)-16} u_{16}$, CQFD.

Comme $0,95 < 1$, $0,95^{n-16}$ tend vers 0 à l'infini ainsi que u_n grâce à nos amis les gendarmes.

1. 17. Formule de Stirling

Soit la suite (u_n) ($n > 0$) définie par : $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. Donner des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 à 10^{-2} près.

2. a. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$. En utilisant les variations de g ,

démontrer que pour tout t de $[0; 1]$ on a : $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$.

b. En déduire que pour tout $n > 0$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$ (on pourra poser $t = 1/n$).

3. a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$.

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a : $u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right)}$.

4. a. Par des considérations d'aire montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}.$$

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a : $u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Commentaire : on explore ici un moyen d'approcher $n!$: comme u_n tend vers 0, on peut se dire qu'en multipliant par quelque chose de la forme Kn^α la limite peut devenir 1. Ceci donnerait alors un équivalent de $n!$ de la forme

$Kn^\alpha \left(\frac{n}{e}\right)^n$. En l'occurrence ça marche, il s'agit de $(\sqrt{2\pi})n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi n} : n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Correction

1. $u_1 \approx 0,3679, u_2 \approx 0,2707, u_3 \approx 0,2240$.

2. a. $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$; $g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + \frac{t}{2} = \frac{2-2-2t+t+t^2}{2(1+t)} = \frac{t^2-t}{2(1+t)} = \frac{t(t-1)}{2(1+t)} < 0$ sur $[0; 1]$.

g est décroissante et $g(0) = \ln 1 - 0 + 0 = 0$ par conséquent $g(t) \leq g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$.

b. Posons $t = \frac{1}{n}$ dans la relation précédente : $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 - \frac{1}{4n}$ d'où

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \ln\left(e^{1 - \frac{1}{4n}}\right) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}.$$

3. a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n \cancel{e^{-n}} e^{-1}}{n^n \cancel{e^{-n}} n! \cancel{(n+1)}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \leq e^{1 - \frac{1}{4n}} e^{-1} = e^{-\frac{1}{4n}}$.

b. On a $u_{n+1} \leq e^{-\frac{1}{4n}} u_n \Rightarrow u_n \leq e^{-\frac{1}{4(n-1)}} u_{n-1} \Rightarrow u_{n-1} \leq e^{-\frac{1}{4(n-2)}} u_{n-2} \dots \Rightarrow u_2 \leq e^{-\frac{1}{4.1}} u_1 = e^{-\frac{1}{4.1}} e^{-1}$.

Par conséquent on a en effectuant les produits d'inégalités successifs :

$$u_n \leq e^{-\frac{1}{4(n-1)}} u_{n-1} \leq e^{-\frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4(n-2)}} u_{n-2} \leq \dots \leq e^{-\frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4(n-2)} - \dots - \frac{1}{4.1}} u_1 = e^{-\frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4(n-2)} - \dots - \frac{1}{4.1}} e^{-1},$$

$$\text{soit } u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right)}.$$

4. a. Cet argument est très classique. Entre deux valeurs entières consécutives, k et $k+1$, l'aire sous la courbe de $1/x$ est inférieure à l'aire du rectangle de largeur 1 et de hauteur $1/(k+1)$:

$$k \leq t \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

d'où en sommant sur tous ces rectangles :

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}.$$

b. On a donc $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \geq \ln n \Rightarrow -\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) \leq -\ln n$, soit

$$-1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) \leq -1 - \frac{1}{4} \ln n$$

et d'après l'inégalité du 3.b : $u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln n}$.

La suite (u_n) est positive et la partie droite tend vers $\exp(-\infty)$, soit 0. Donc la suite tend vers 0.

1. 18. Suites adjacentes, Antilles 2004

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1, b_0 = 7$ et
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}.$$

Soit D une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$. Pour tout n de \mathbb{N} , on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 .

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimez u_n en fonction de n .

3. Comparez a_n et b_n . Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) . Interprétez géométriquement ces résultats.

4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = b_n - a_n$ pour tout entier n . Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu I.

6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

Corrigé

1. Les points ont pour abscisse :

$$a_1 = \frac{1}{3}(2+7) = 3 ; b_1 = \frac{1}{3}(1+14) = 5 ; a_2 = \frac{1}{3}(6+5) = \frac{11}{3} ; b_2 = \frac{1}{3}(3+10) = \frac{13}{3}.$$

2. (u_n) est géométrique : on a $u_n = b_n - a_n$ d'où

$$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - \frac{1}{3}(2a_n + b_n) = \frac{1}{3}(b_n - a_n) = \frac{1}{3}u_n.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 7 - 1 = 6$. Finalement on a $u_n = 6 \times \frac{1}{3^n}$.

3. Comparons a_n et b_n et cherchons les variations de ces suites :

$$b_n - a_n = u_n = \frac{6}{3^n} > 0 \text{ donc } b_n > a_n.$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = -\frac{1}{3}(b_n - a_n) = -\frac{1}{3}u_n < 0 \text{ donc } (b_n) \text{ est décroissante.}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n) = \frac{1}{3}u_n > 0 \text{ donc } (a_n) \text{ est croissante.}$$

Graphiquement cela se traduit par le fait que la suite des points A_n avance vers la droite alors que la suite des points B_n se déplace vers la gauche mais les points A_n demeurent en permanence à gauche des points B_n .

4. Montrons que (a_n) et (b_n) sont adjacentes : (b_n) est décroissante, (a_n) est croissante, $\lim(b_n - a_n) = \lim(6 \frac{1}{3^n}) = 0$ car la limite d'une suite géométrique de raison r telle que $|r| < 1$ est 0, donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. $v_n = a_n + b_n$ donc $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) + \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) = a_n + b_n = v_n$ donc (v_n) est constante : le milieu du segment $[A_n B_n]$ est I_n d'abscisse $i_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_n}{2} = \frac{v_0}{2}$ car (v_n) est constante donc le milieu de $[A_n B_n]$ est constant et est la point I d'abscisse 4 car $v_0 = 1 + 7 = 8$.

6. Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante et $b_n > a_n$ donc

$$1 = a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0 = 7 ;$$

(a_n) est croissante et majorée par 7 donc (a_n) converge.

(b_n) est décroissante et minorée par 1 donc (b_n) converge.

De plus ces deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite L .

En utilisant la suite constante (v_n) telle que $v_n = a_n + b_n = 8$ et par passage à la limite : $\lim a_n + \lim b_n = 8$ donc $L + L = 8$ donc $L = 4$.

Géométriquement, cela se traduit par le fait que les suites de points (A_n) et (B_n) vont se rapprocher du point $I(4)$, l'une par la gauche, l'autre par la droite.

1. 19. Suites adjacentes : calcul de la racine carrée

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer $v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3$ et v_3 . Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.

2. Justifier par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3. a. Démontrer que quel que soit n de \mathbb{N} , $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c. Conclure que quel que soit n on a $u_n - v_n \geq 0$.

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

5. a. Démontrer que quel que soit n de \mathbb{N}^* , $u_n \geq \frac{21}{8}$.

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

7. Justifier que u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

8. Proposez une méthode générale pour trouver une valeur approchée de \sqrt{a} où a est un réel quelconque positif.

Cette méthode est celle utilisée par le mathématicien grec Héron (1^{er} siècle) pour déterminer une approximation des racines carrées.

Correction

$$1. v_0 = \frac{7}{u_0} = \frac{7}{3} ; u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3 + \frac{7}{3}}{2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} ; v_1 = \frac{7}{u_1} = \frac{7}{\frac{8}{3}} = \frac{21}{8} ; u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{21}{8}}{2} = \frac{64 + 63}{48} = \frac{127}{48} ;$$

$$v_2 = \frac{7}{u_2} = \frac{7}{\frac{127}{48}} = \frac{336}{127} ; u_3 = \frac{u_2 + v_2}{2} = \frac{\frac{127}{48} + \frac{336}{127}}{2} = \frac{32257}{12192} \approx 2,64575 ; v_3 = \frac{7}{u_3} = \frac{7}{\frac{32257}{12192}} = \frac{85344}{32257} \approx 2,64575 .$$

Il semble que les suites tendent vers 2,64575... et que la convergence soit très rapide.

2. $P_n : u_n > 0$ et $v_n > 0$.

$P_0 : u_0 = 3 > 0$ et $v_0 = 7/3 > 0 : P_0$ est vérifiée.

Supposons P_n vraie : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$ puisque u_n et v_n sont positifs, et bien sûr il en résulte que

$v_{n+1} = \frac{7}{u_{n+1}} > 0$. On a bien, quel que soit n de \mathbb{N} , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

$$3. a. (u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2 \Leftrightarrow (u_n + v_n)^2 - (u_n - v_n)^2 = 28 \Leftrightarrow 2(2u_n v_n) = 28 \Leftrightarrow u_n v_n = 7 \Leftrightarrow v_n = \frac{7}{u_n} .$$

$$3. b. \frac{1}{4u_{n+1}} (u_n - v_n)^2 = \frac{1}{4u_{n+1}} \left((u_n + v_n)^2 - 28 \right) = \frac{1}{u_{n+1}} \left(\frac{(u_n + v_n)^2}{4} - 7 \right)$$

$$= \frac{1}{u_{n+1}} (u_{n+1}^2 - 7) = u_{n+1} - \frac{7}{u_{n+1}} = u_{n+1} - v_{n+1} .$$

3. c. De l'égalité précédente, on conclut que $u_{n+1} - v_{n+1}$ est strictement positif quel que soit n , c'est-à-dire en remplaçant $n+1$ par n , on a $u_n - v_n$ positif pour $n \geq 1$. Il faut vérifier que l'inégalité est aussi vraie pour $n = 0$: $u_0 - v_0 = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} > 0$. On a bien $u_n - v_n > 0$ ou encore $u_n > v_n$.

4. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} < 0$ car $v_n - u_n < 0$; $v_{n+1} - v_n = \frac{7}{u_{n+1}} - \frac{7}{u_n} = \frac{7(u_n - u_{n+1})}{u_{n+1}u_n} > 0$ car $u_{n+1} - u_n < 0$ et $u_n > 0$ quel que soit n . La suite (u_n) est bien décroissante et la suite (v_n) est croissante.

5. a. On sait que $u_n > v_n$ or la suite v_n est croissante, donc $v_n > v_1$, on a donc : $u_n > v_n > v_1 = \frac{21}{8}$.

5. b. Par équivalence :

$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10} (u_n - v_n)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4u_{n+1}} (u_n - v_n)^2 \leq \frac{1}{10} (u_n - v_n)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4u_{n+1}} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 4u_{n+1} \geq 10 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq \frac{5}{2}$. Or on sait que $u_n > \frac{21}{8} > \frac{5}{2}$ d'où le résultat.

5.c. On veut montrer par récurrence la propriété $P_n : u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

Vérifions $P_0 : u_0 - v_0 = \frac{2}{3} < \frac{1}{10^{2^0 - 1}} = 1$, ok.

Démontrons P_{n+1} :

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10} (u_n - v_n)^2 \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10^{2^n - 1}} \right)^2 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{\left(10^{2^n - 1} \right)^2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^{(2^n - 1) \times 2}} = \frac{1}{10 \times 10^{2^n \times 2} \times 10^{-2}} = \frac{1}{10^{2^{n+1} - 1}} .$$

5. d. On a $0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$ et on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^{2^n - 1}} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ (gendarmes).

6. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes vers la même limite l . Celle-ci vérifie la relation $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{7}{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n} \Leftrightarrow l = \frac{7}{l} \Leftrightarrow l^2 = 7$; or $l > 0$ donc $l = \sqrt{7}$.

7. $u_3 - v_3 \leq \frac{1}{10^{2^3 - 1}} = \frac{1}{10^{8 - 1}} = 10^{-7}$: la rapidité de la convergence est impressionnante puisqu'à chaque

itération on gagne un facteur environ $10^{-2^{n+1}}$. En fait on double le nombre de décimales à chaque coup...

On se trouve en présence d'une convergence dite *quadratique*.

8. Pour trouver \sqrt{a} , il suffit de faire la même chose avec $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \frac{a}{u_n}$ puisque si (u_n) et (v_n)

sont adjacentes, elles ont même limite l telle que $l = \frac{a}{l} \Leftrightarrow l^2 = a$. Les démonstrations précédentes peuvent se faire de manière identique, ça marche bien.

L'algorithme présenté ici débouche sur bon nombre de problèmes dont certains sont très actuels : on l'utilise par exemple pour calculer les décimales de π , c'est l'algorithme de Brent et Salamin. Il s'agit essentiellement de l'algorithme de la *moyenne arithmético-géométrique* étudié par Lagrange puis par Gauss au 19^{ème} siècle.

1. 20. Suites adjacentes : aire sous une courbe

Etude de l'aire sous une courbe à l'aide de suites

Objectifs :

Comprendre comment on peut encadrer l'aire sous une courbe par deux suites, comprendre les notations associées, savoir écrire le terme général des suites, prouver qu'elles ont l'aire comme limite commune (l'existence de l'aire est ici admise).

Application à deux exemples.

Remarques :

L'énoncé ci-dessous est un peu long pour être proposé tel quel à une classe. Par contre, il est possible d'en exploiter des parties avec des élèves sous la forme d'un TP encadré et commenté (surtout pour les notations) par le professeur .

f est une fonction continue monotone positive définie sur $[0 ; 1]$ et (C) est la courbe représentant f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$.

On s'intéresse à l'aire \mathbf{A} du domaine \mathbf{D} délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour approcher \mathbf{A} , on utilise les suites u et v définies ainsi :

- le segment $[OA]$ est partagé en n segments de même longueur ($n \geq 1$) ;

- conformément aux figures ci-dessous, on construit :

* les n rectangles $R_k, 0 \leq k \leq n-1$ situés sous la courbe (C) , ayant comme base un des segments de la subdivision et un sommet sur la courbe (C) ;

* les n rectangles $S_k, 0 \leq k \leq n-1$ contenant la courbe (C) , ayant comme base un des segments de la subdivision et un sommet sur la courbe (C) ;

- u_n est la somme des aires des n rectangles $R_k, 0 \leq k \leq n-1$;

- v_n est la somme des aires des n rectangles S_k , $0 \leq k \leq n-1$;

La monotonie de f assure que : $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$.

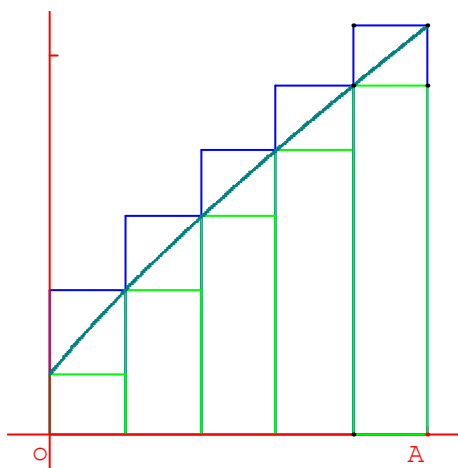


Figure 1

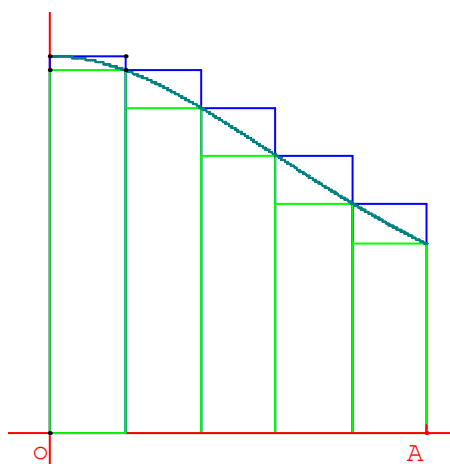


Figure 2

Partie A - Etude des notations

1. On note $A_0 = O$ et A_1, A_2, \dots, A_n les points de $[OA]$ correspondant à sa subdivision en n segments de même longueur.

a. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus où $n = 5$, placer les points A_k pour $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

b. On reprend n quelconque. Quel point de la suite est confondu avec A ?

c. Quelle est la longueur d'un segment $[A_k A_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$?

d. Quelle est l'abscisse du point A_k , $k \in \{0, 1, \dots, n\}$?

2. On note $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ les points de (C) d'abscisses respectives $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$.

a. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus où $n = 5$, placer les points B_k pour $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

On reprend n quelconque. Quelles sont les coordonnées de B_k , $k \in \{0, 1, \dots, n\}$?

3. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus :

a. Indiquer les rectangles R_k et S_k pour $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$.

b. Colorier la surface correspondant à l'aire u_n .

c. Dans une couleur différente de celle du b. colorier la surface correspondant à $v_n - u_n$.

Partie B - Etude des suites u et v

1. Dans cette question, on suppose que f est croissante sur $[0 ; 1]$ (figure 1).

a. Prouver que $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$ (on pourra par exemple « empiler » tous les petits rectangles coloriés pour $v_n - u_n$).

b. Quelle est la hauteur du rectangle R_k pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$?

c. Quelle est l'aire du rectangle R_k ? En déduire une écriture de u_n .

2. Dans cette question, on suppose que f est décroissante sur $[0 ; 1]$ (figure 2).

a. Prouver que $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1))$.

- b. Quelle est la hauteur du rectangle S_k pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$?
- c. Donner une écriture de v_n .
3. Prouver que les suites u et v convergent vers \mathbf{A} (on pourra encadrer $\mathbf{A} - u_n$, puis $\mathbf{A} - v_n$ à l'aide de l'inégalité $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$).

Partie C – Un exemple où f est décroissante

f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

- Faire une figure dans le cas $n = 5$. Placer (C), les points A_k et B_k pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, ainsi que les rectangles R_k et S_k pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- A l'aide de la question B. 2. c. vérifier que pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$.
- A l'aide de la question B. 2. a. en déduire que $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.
- Pour quelle valeur minimale de n , u_n et v_n donnent-ils un encadrement de \mathbf{A} d'amplitude 0,01 ? Calculer les u_n et v_n correspondants à l'aide d'une calculatrice programmable ou d'un logiciel.

Partie D – Un exemple où f est croissante

f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x^2$ et (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

- Faire une figure dans le cas $n = 5$. Placer (C), les points A_k et B_k pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, ainsi que les rectangles R_k et S_k pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- Prouver que l'aire du rectangle R_k est égale à $\frac{k^2}{n^3}$.
- Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2)$.
- A l'aide de l'égalité

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ pour } n \geq 1,$$

prouver que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

En déduire la limite de la suite u .

- A l'aide de la question B. 1. a. exprimer v_n en fonction de u_n et en déduire la limite de la suite v .
- Conclure : quelle est l'aire \mathbf{A} ?

Correction

A. 1. $A = A_n$; $A_k A_{k+1} = \frac{1}{n}$; abscisse de $A_k = \frac{k}{n}$.

2. Coordonnées de $B_k : \left(\frac{k}{n}; f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$.

B. 1. $v_n - u_n$ est la somme des aires des petits rectangles coloriés sur la figure. En « empilant » ces rectangles, on obtient un rectangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f(1) - f(0)$. Donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$.

$$\text{Hauteur de } R_k = f\left(\frac{k}{n}\right); \text{ aire de } R_k = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right). u_n = \text{aire de } R_0 + \text{aire de } R_1 + \dots + \text{aire de } R_{n-1} = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

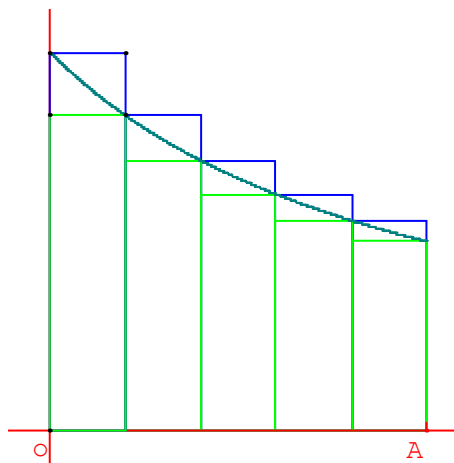
2. En « empilant » les rectangles correspondant à $v_n - u_n$, on obtient un rectangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f(0) - f(1)$. Donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1))$.

$$\text{Hauteur de } S_k = f\left(\frac{k}{n}\right); \text{ aire de } S_k = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right). v_n = \text{aire de } S_0 + \text{aire de } S_1 + \dots + \text{aire de } S_{n-1} = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3. $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$ donc $0 \leq \mathbf{A} - u_n \leq v_n - u_n$ et $u_n - v_n \leq \mathbf{A} - v_n \leq 0$.

Or $|v_n - u_n| = \frac{1}{n}|f(0) - f(1)|$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - v_n| = 0$. Par conséquent, d'après le « théorème des gendarmes », $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{A} - u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{A} - v_n = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \mathbf{A}$.

C. 1.



2. Aire de $S_k = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} = \frac{1}{k+n}$ donc $v_n = \text{aire de } S_0 + \text{aire de } S_1 + \dots + \text{aire de } S_{n-1} =$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n-2} + \frac{1}{n+n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}.$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n}.$$

$$\text{Donc } u_n = v_n - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

3. $v_n - u_n = \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n} = 0,01$ pour $n = 50$.

Excel donne $u_{50} \simeq 0,688172179$ et $v_{50} \simeq 0,698172179$.

Remarques

* Evidemment $\mathbf{A} = \ln 2$, mais deux sommes de n termes (u_n et v_n) ne donnent un encadrement de \mathbf{A} que d'amplitude $\frac{1}{2n}$. Ce n'est pas très efficace (croissance très lente de la série harmonique) pour calculer $\ln 2$.

* En fait, les suites u et v sont adjacentes, mais il est assez pénible de prouver que u est croissante et que v est décroissante :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{2(n+1)-1} + \frac{1}{2(n+1)} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) =$$

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.$$

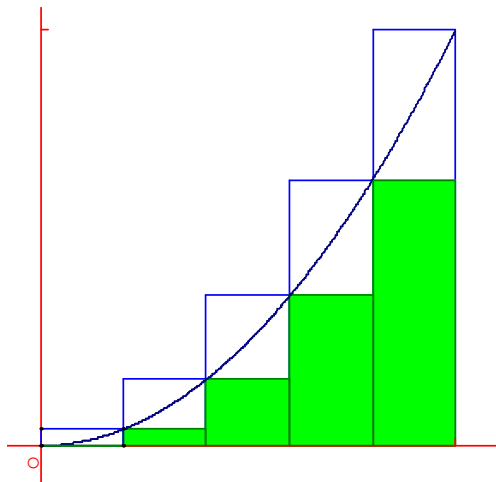
$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)-2} + \frac{1}{2(n+1)-1} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} \right) =$$

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} \right) =$$

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{(2n+1) + 2n - 2(2n+1)}{2n(2n+1)} = -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0.$$

C'est donc long et nous avons vu que le seul intérêt de prouver que les suites sont adjacentes est que cela permettrait d'établir l'existence de l'aire.

D. 1.



2. Aire de $R_k = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^3}$.

3. $u_n = \text{aire de } R_0 + \text{aire de } R_1 + \dots + \text{aire de } R_{n-1} = \frac{0^2}{n^3} + \frac{1^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2)$.

4. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \geq 1$. Donc

$$u_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1) \times n \times (2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$.

Pour tout $n \geq 1$, $v_n - u_n = \frac{1}{n} (f(1) - f(0)) = \frac{1}{n}$, donc $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

6. Comme $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$, on en déduit $\mathbf{A} = \frac{1}{3}$.

Remarque

Ici aussi, les deux suites u et v sont adjacentes. Pour le démontrer, il faudrait établir que u est croissante et que v est décroissante.

C'est faisable car pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3n^2 + n - 1}{6n^2(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{-3n^2 - 5n - 1}{6n^2(n+1)^2} < 0$, mais les calculs sont difficiles. De plus, ici, c'est tout à fait inutile car la convergence des suites u et v vers un même nombre est immédiate et prouve donc l'existence de l'aire, dont on obtient en plus la valeur exacte.

1. 21. Suites adjacentes : le principe de la dichotomie

Le principe de la dichotomie

* On admet la propriété des suites adjacentes : Si u est une suite croissante et v une suite décroissante telles que $(v - u)$ converge vers 0, alors u et v convergent vers une même limite l .

On en déduit que l est l'unique réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$.

* Méthode de dichotomie :

I_0 est un intervalle fermé borné. On le partage en deux intervalles fermés de longueurs égales I et Γ .

On choisit l'un d'entre eux noté I_1 , sur lequel on effectue à nouveau cette opération.

On construit ainsi par récurrence une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles.

* Il s'agit de prouver qu'il existe un unique réel appartenant à tous les intervalles I_n .

Preuve :

On définit deux suites a et b :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = [a_n ; b_n]$ (avec $a_n \leq b_n$), $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $I_n' = [a_n ; c_n]$ et $I_n'' = [c_n ; b_n]$.

Si on choisit $I_{n+1} = I_n'$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, sinon on choisit $I_{n+1} = I_n''$, et donc $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On prouve que les deux suites a et b sont adjacentes :

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$, donc la suite $(b - a)$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. Elle converge donc vers 0.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, donc $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Par conséquent, a est croissante et b est décroissante.

* Les deux suites a et b sont donc adjacentes.

Conséquences :

Les deux suites a et b convergent vers une limite commune l et l est l'unique nombre réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$, c'est à dire $l \in I_n$.

Démonstration du théorème de la convergence monotone à l'aide de la méthode de dichotomie :

* On a déjà prouvé que si une suite d'intervalles $I_n = [a_n ; b_n]$ a été construite par dichotomie, les deux suites a et b convergent vers un même réel l .

* Il s'agit de démontrer que toute suite croissante majorée est convergente.

Preuve

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée par un réel M . On construit par récurrence la suite d'intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ainsi :

* $I_0 = [u_0 ; M]$;

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = [a_n ; b_n]$, $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $I'_n = [a_n ; c_n]$ et $I''_n = [c_n ; b_n]$. Si I''_n contient un terme de la suite u , alors $I_{n+1} = I''_n$ sinon $I_{n+1} = I'_n$.

La suite d'intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant été construite par dichotomie, les deux suites a et b convergent vers un même réel l .

Par récurrence, chaque intervalle I_n contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_n :

* $I_0 = [u_0 ; M]$ contient tous les termes de la suite u à partir du rang $0 = p_0$.

* Supposons que I_n contienne tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_n . Alors :

- ou bien I''_n contient un terme u_p de u , donc $I_{n+1} = I''_n$; comme u est croissante, I'_n contient au plus les termes u_n pour $n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Donc I_{n+1} contient les mêmes termes de u que I_n , sauf peut-être certains des p premiers, et par conséquent contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_{n+1} ;

- ou bien I''_n ne contient pas de terme de u , donc $I_{n+1} = I'_n$. Dans ce cas, I_{n+1} contient les mêmes termes de u que I_n , donc tous à partir du rang $p_n = p_{n+1}$.

* Par conséquent, chaque intervalle I_n contient tous les termes de u à partir d'un certain rang p_n .

On maintenant prouve que la suite u converge vers l :

Soit I un intervalle ouvert contenant l .

Comme $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, il existe un rang N pour lequel a_N et b_N sont dans I , donc $I_N \subset I$.

Or I_N contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang p_N . A partir de ce rang, tous les termes de la suite u sont aussi dans I . Donc la suite u converge vers l .

1. 22. Ln et méthode de Newton-Raphson, Asie 2000

11 points

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de (C).

2. Étudier le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ une solution unique, notée α .

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Donner, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

4. Tracer la courbe (C).

Partie B : Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 1.

2. a. Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par : $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$. Calculer $\varphi'(x)$.

En déduire le sens de variation de φ , puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$.

c. En déduire la position relative de (C) et de (D).

3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe (C) et la tangente (D).

a. Hachurer ce domaine.

b. Soit A son aire, en cm^2 . Écrire la valeur exacte de A comme expression polynomiale du second degré en α .

Partie C : Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$. On note M_0 le point de (C) d'abscisse x_0 .

1. a. Donner une équation de la tangente (T_0) à (C) en M_0 , en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

b. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses.

Écrire x_1 en fonction de x_0 , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2. On considère la fonction h définie sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$ par : $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0) = x_1$).

a. Montrer que $h'(x) = \frac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$.

c. En déduire que h est strictement croissante sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d. En écrivant $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$. En déduire que $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$ $h(x)$ appartient à $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$.

b. On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n .

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Correction

Partie A : Étude d'une fonction $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

1. Limite de f en 0 : on écrit $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$ d'où la limite est $-\infty$. En $+\infty$ $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 donc f tend vers 1.

2. $f'(x) = \frac{1-x-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$ qui est positif lorsque $x \leq e$. $f(e) = 1 + \frac{1}{e}$.

3. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; 1 \right]$ f est croissante vers l'intervalle $\left[1 - \frac{1}{e}; 1 \right]$ qui contient 0 : $f(x) = 0$ a donc une solution unique α . La machine donne 0,567 comme valeur approchée de α .

Comme f est croissante, $f(x) \leq 0$ lorsque $x \leq \alpha$ et $f(x) \geq 0$ lorsque $x \geq \alpha$.

Partie B : Calcul d'aire

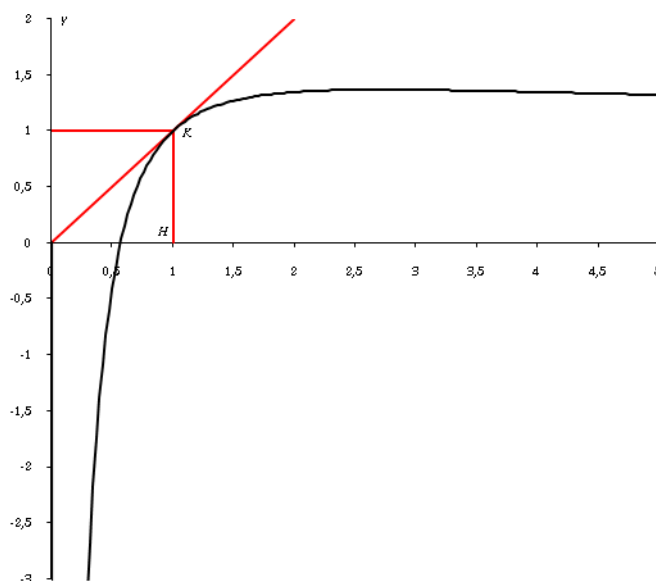
1. (D) $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1 + 1 = x$.

2. a. $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$; $\varphi'(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x} = \frac{1+x-2x^2}{x} = \frac{(-2x-1)(x-1)}{x}$: positif lorsque $x \leq 1$, négatif sinon. $\varphi(1) = 0$ donc $\varphi(x) \leq \varphi(1) = 0$.

b. $f(x) - x = 1 + \frac{\ln x}{x} - x = \frac{x + \ln x - x^2}{x} = \frac{\varphi(x)}{x}$.

c. La position relative de (C) et de (D) est donnée par le signe de $f(x) - x$ donc (C) est toujours en dessous de (D).

3. a.



b. Il faut d'abord calculer l'intégrale

$$I = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 \left(1 + \frac{1}{x} \ln x \right) dx = \left[x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\alpha}^1 = 1 - \alpha - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 ; \text{ comme } f(\alpha) = 0, \text{ on a}$$

$\ln(\alpha) = -\alpha$ d'où en remplaçant : $I = 1 - \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2$. Par ailleurs il faut soustraire cette intégrale à l'aire du triangle OKH qui vaut $\frac{1}{2}$, et multiplier le tout par l'unité d'aire, soit 25 cm².

Finalement $A = 25 \left(\frac{1}{2} - 1 + \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) = \frac{25}{2} (\alpha^2 + 2\alpha - 1)$.

Partie C : Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{e} ; \alpha \right]$. On note M_0 le point de (C) d'abscisse x_0 .

1. a. (T₀) : $f'(x_0) = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}$; $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = x f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

b. Lorsqu'on fait $y = 0$ dans l'équation précédente, on trouve

$$0 = x f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1.$$

2. On considère la fonction h définie sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$ par : $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0) = x_1$).

$$a. h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow h'(x) = 1 - \frac{f'(x) \times f'(x) - f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{[f'(x)]^2 - [f'(x)]^2 + f''(x) \times f(x)}{f''(x) \times f(x)},$$

$$\text{soit } h'(x) = \frac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}.$$

$$b. f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}. \quad -3 + 2 \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

donc sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$, $f''(x) < 0$.

c. f est également négative sur cet intervalle donc h' est positive et h est croissante.

$$\text{On a } h(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha \text{ et } x_1 = h(x_0).$$

Comme $x_0 < \alpha$ et que h est croissante, on a donc bien $h(x_0) < h(\alpha) \Leftrightarrow x_1 < \alpha$.

d. $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ est positive sur $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$ car f' est positive et f est négative.

Enfin on a $\frac{1}{e} < x_0$ et $h(x_0) - x_0 = x_1 - x_0 > 0 \Rightarrow x_1 > x_0$, soit $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. a. Nous venons de montrer que pour un x_0 dans $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$ alors $x_1 = h(x_0)$ est dans $\left] \frac{1}{e}; \alpha \right]$. C'est ok.

b. Par récurrence : $x_2 = h(x_1)$ est alors tel que $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < x_2 < \alpha$, etc. Le raisonnement fait en x_0 est le même à n'importe quel rang.

Donc la suite (x_n) est strictement croissante. Comme elle est majorée par α , elle converge. Il faudrait encore montrer qu'elle converge vers α , ce que l'on voit en faisant le calcul : la rapidité de convergence est même spectaculaire.

n	x_n	n	x_n
0	0,36787944117144200000	4	0,56714261155675600000
1	0,48415152013885700000	5	0,56714329040871200000
2	0,55183615060547200000	6	0,56714329040978400000
3	0,56660294853210500000	7	0,56714329040978400000

Cette méthode est très performante ; elle fut inventée par Newton et améliorée par J. Raphson quelques années plus tard. C'est celle que l'on utilise en général dans les logiciels de calcul.

1. 23. ROC+suite solution équation, Polynésie 2005

7 points

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
- b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty [$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty [$.
On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n , $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
- b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Placer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
- c. Préciser la valeur de α_1 .
- d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
- b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty [$ par $h(x) = \ln x - x + 1$.
En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ .
- c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,
 $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite (α_n) .

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0 ; +\infty [$ et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur \mathbb{N} une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

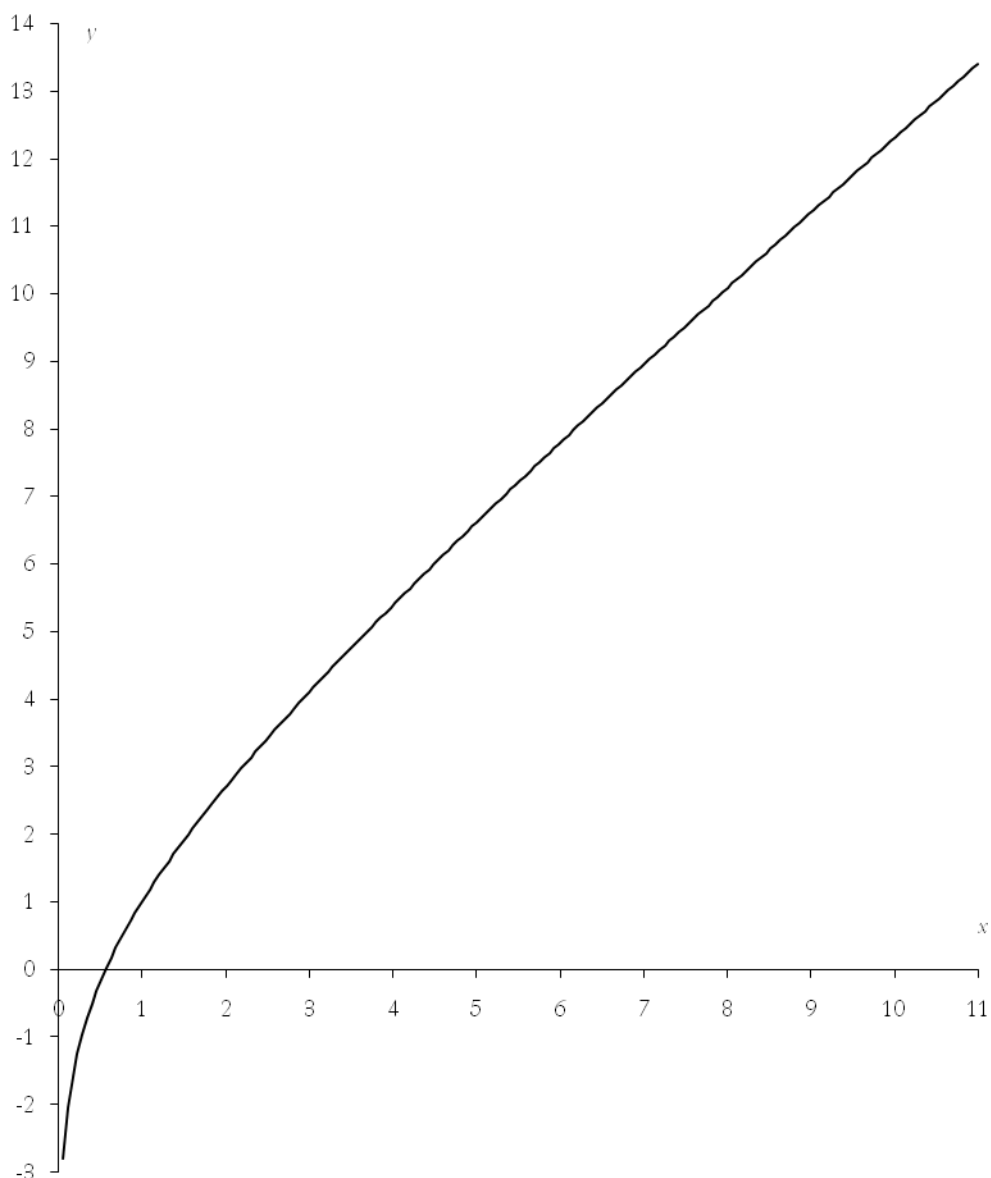
Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Page annexe



Correction

Partie A $f(x) = x + \ln x$.

1. a. En $+\infty$ les deux termes tendent vers $+\infty$ donc f tend vers $+\infty$; en 0^+ $\ln x$ tend vers $-\infty$ donc f également.

b. x est croissante, \ln est croissante, la somme de deux fonctions croissantes est croissante. Sinon on a facilement $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$.

2. a. f est continue, monotone croissante de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} ; elle est donc bijective et toutes les valeurs n entières sont atteintes. A chaque n correspond donc un unique antécédent α_n avec $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. On part des valeurs entières 1, 2, 3, 4 et 5 sur l'axe des ordonnées et on trace.

c. α_1 : $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$; cette équation a l'unique solution 1 : $1 + \ln 1 = 1$.

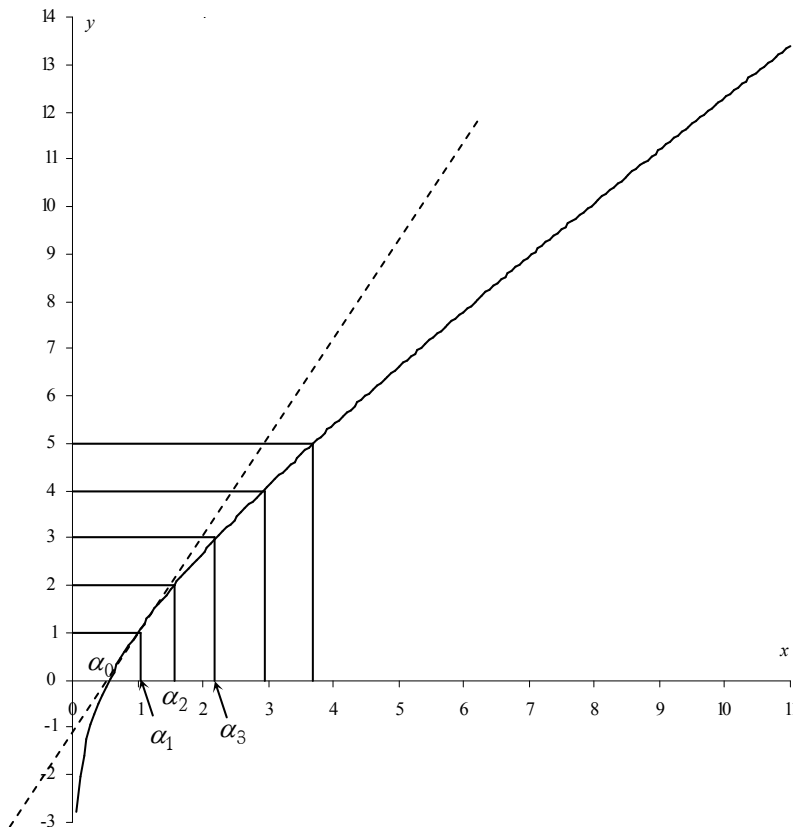
d. Comme f est croissante et que $n+1 > n$, alors les antécédents α_n et α_{n+1} sont rangés dans le même ordre : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \Leftrightarrow f(\alpha_n) \leq f(\alpha_{n+1}) \Leftrightarrow n \leq n+1$.

3. a. $f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ et $f(1) = 1$ d'où l'équation de $\Delta : y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

b. $h(x) = \ln x - x + 1$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ est positif lorsque $x < 1$, négatif lorsque $x > 1$. On a $h(1) = 0$ donc h est croissante avant 1, décroissante après 1 d'où $h(x) \leq h(1) = 0$. La position de Γ par rapport à Δ est donnée par le signe de $f(x) - (2x - 1) = x + \ln x - 2x + 1 = \ln x - x + 1 = h(x)$, donc Γ est toujours en dessous de Δ .

c. Comme $h(x) \leq 0$ pour $x > 1$, ceci est valable pour $\alpha_n : f(\alpha_n) - 2\alpha_n + 1 \leq 0 \Leftrightarrow n - 2\alpha_n + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_n \geq \frac{n+1}{2}$.

4. Comme n tend vers $+\infty$, $\frac{n+1}{2}$ également et α_n également.



Partie B

g continue, strictement croissante sur $]0 ; +\infty [$ et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

1. Démonstration de cours : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Démonstration par l'absurde : si (u_n) est croissante non majorée et qu'elle tend vers une limite L , alors il arriverait un moment (une valeur N de n) où $u_N < L - \varepsilon$ où ε est un réel positif choisi arbitrairement (aussi petit qu'on le veut) ; si le terme suivant est supérieur à $L - \varepsilon$, la suite ne converge pas vers L et si le terme suivant reste inférieur à L , la suite est majorée. Dans les deux cas il y a contradiction.

Démonstration directe : si (u_n) est non majorée, pour tout A réel il existe une valeur N de n pour laquelle $u_N \geq A$; comme (u_n) est croissante, pour toutes les valeurs de n supérieures à N , on a $u_n \geq A$. La définition précédente est respectée, (u_n) tend bien vers $+\infty$.

2. La suite (β_n) est croissante pour les mêmes raisons que (α_n) ; comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et que $g(\beta_n) = n$, les termes β_n sont comme x et tendent donc vers l'infini.

De manière plus élégante on peut considérer que g est bijective et a une application réciproque g^{-1} qui est telle que $\lim_{y \rightarrow +\infty} g^{-1}(y) = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.