Terminale S

Suites — Exercices

1. 1. Questions de cours au sujet des suites

Valider ou infirmer les propositions suivantes :

1. Si une suite u est croissante et majorée par 5 , alors elle converge vers 5.

2. Si une suite u est monotone et bornée , alors elle est convergente.

3. Si une suite u n'est pas convergente , alors elle n'est pas bornée.

4. Si deux suites ont la même limite, alors elles sont adjacentes.

5. Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont bornées.

6. Une suite convergente est bornée.

7. Une suite bornée est convergente.

8. Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.

9. Si $u_n - v_n$ tend vers 0 alors u_n et v_n ont la même limite.

10. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.

11. Si pour tout $n \geq 10$, $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^2}$ alors (u_n) converge vers 3.

1. 2. QCM divers, La Réunion 2005

4 points

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.

Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point. Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

a. $\left(\frac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ b. $\left(\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c. $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ d. $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leq v_n \leq w_n$, $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.

Alors :

a. $\lim_{n\to+\infty}(v_n) = 0$.

b. La suite (u_n) est minorée.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leq v_n \leq 1$.

d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

c. La suite (v_n) est majorée.

d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.

b. $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.

c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

1. 3. QCM, Antilles remplt 2007

4 points

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions quatre propositions sont faites dont une seule est exacte. Pour chaque question donner sans justification une réponse sur votre copie. Si la réponse est bonne elle rapporte 0,75 points, si elle est mauvaise elle coûte 0,25 points, si vous ne répondez pas vous gagnez 0 point… En cas de total négatif votre ardoise est effacée !

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme néperien. Si $v_0 = \ln a$, alors :

a. $u_0 = \frac{1}{a} + 1$ b. $u_0 = \frac{1}{1+a}$ c. $u_0 = -a + 1$ d. $u_0 = e^{-a} + 1$

2. Si v est strictement croissante, alors :

a. u est strictement décroissante et majorée par 2

b. u est strictement croissante et minorée par 1

c. u est strictement croissante et majorée par 2

d. u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$ alors :

a. u converge vers 2

b. u diverge vers $+\infty$

c. u converge vers 1

d. u converge vers un réel L tel que $L > 1$

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1 + e^{-2}$

b. u est minorée par $1 + e^{-2}$

c. u est majorée par $1 + e^{2}$

d. u est minorée par $1 + e^{2}$

Partie B

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\ln(u_n) + v_n > 0$.

1. 4. ROC+VF justifié, France 2010, 5 pts

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n > u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante etmajorée converge ; toute suite décroissante etminorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a. $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \frac{1}{n}$;

c. $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$.

3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$. Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

1. 5. VF justifié, Polynésie, nov 2010, 3 pts

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_0 = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$t_{n+1}=t_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n=\frac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que : pour tout entier naturel n,

$$u_n \le w_n \le v_n .$$

Proposition 2 : Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle [0 ; 1].

Proposition 3 : Si $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$ alors $f=g$ sur l'intervalle [0 ; 1].

1. 6. Raisonnement par récurrence 1

1. On note $1\times 2\times 3\times ....\times n=n!$ (et on lit « factorielle » n).

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n\ge 1$, on a : $n!\ge 2^{n-1}$.

2. Démontrez que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n}-2^n$ est un multiple de 7 ; n désigne un entier supérieur à 1.

3. Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

a. Pour tout entier naturel n, $2^n \ge n$.

b. Pour tout entier naturel n, $2^{2n+1}+3^{2n+1}$ est un multiple de 5.

c. Pour tout entier n différent de 1, $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.

1. 7. Raisonnement par récurrence 2

1. Rappeler la valeur de $S_n=1+2+3+...+n$.

2. On appelle S'_n la somme $S'_n=1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)$.

a. Montrer par récurrence que pour tout n on a $S_n'=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

b. On cherche un polynôme P tel que $P(x+1)-P(x)=x(x+1)$: montrez que P est de degré 3.

Trouvez P.

c. En sommant sur toutes les valeurs entières de x depuis 1 jusqu'à n, vérifiez que $S'_n=P(n+1)-P(1)$. Retrouvez la formule du a.

d. Vérifiez que $S'_n=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^2$. Déduire des résultats précédents la valeur de $\sum_{k=1}^{n}k^2$ en fonction de n.

3. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

4. On cherche à généraliser les résultats précédents : p désigne un entier supérieur à 1, et on définit la somme :

$$S(n,p)=1\times 2\times ...\times p+2\times 3\times ...\times (p+1)+3\times 4\times ...(p+2)+...+n(n+1)....(n+p-1).$$

Montrer par récurrence **sur n** (p est supposé fixé) que $S(n,p)=\frac{n(n+1)(n+2)...(n+p)}{p+1}$.

Correction (partielle) :

1. b. Les termes de plus haut degré de $P(x)$ sont de la forme $ax^m+bx^{m-1}+\dots$, dans $P(x+1)=ax^m+amx^{m-1}+bx^{m-1}+\dots$; quand on les soustrait ils disparaissent et le premier terme non nul restant sera le terme amx^{m-1}

Comme $x(x+1)=x^2+x$ est de degré 2 il faut que P soit de degré 3.

On a alors $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ d'où $P(x+1)-P(x)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d-ax^3-bx^2-cx-d$, soit

$P(x+1)-P(x)=3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)$ d'où par identification :

$\begin{cases}3a=1\\3a+2b=1\\a+b+c=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{3}, b=0, c=-\frac{1}{3}$ d'où $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x+d$. On peut prendre ce qu'on veut pour d, par exemple 0… $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x=\frac{(x-1)x(x+1)}{3}$.

1. c. $\begin{cases}P(n+1)-P(n)=n(n+1)\\P(n)-P(n-1)=(n-1)n\\\dots\\P(2)-P(1)=2\times1\end{cases}\Rightarrow P(n+1)-P(1)=n(n+1)+\dots+2\times1=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

1. 8. Raisonnement par récurrence 3

« Le maître d'école s'appelait Büttner et il aimait rosser ses élèves. Il feignait d'être sévère et ascétique, et, en quelques rares occasions, l'expression de son visage révélait le plaisir qu'il prenait à les rouer de coups. […] Cela se passait dans le quartier le plus pauvre de Brunswick, aucun de ces enfants n'irait jamais à l'école secondaire, personne ici ne travaillerait autrement qu'avec ses mains. Gauss avait beau se taire et s'évertuer à répondre aussi lentement que les autres, il percevait la méfiance du maître. Il sentait que ce dernier n'attendait qu'une occasion de le frapper un peu plus fort que le reste du groupe. Et un beau jour, il lui fournit cette occasion.

Büttner leur avait demandé d'additionner tous les nombres de un à cent. Cela prendrait des heures et, même avec la meilleure bonne volonté du monde, ce n'était pas possible sans faire à un moment ou à un autre une erreur de calcul pour laquelle on pouvait alors être puni. […] Gauss ne réussit pas à se contrôler ce jour là et au bout de trois minutes il s'était retrouvé devant le pupitre du maître avec son ardoise.

Bon, dit Büttner, et il saisit le bâton. Qu'est-ce que c'est que ça ¿

Cinq mille cinquante.

Quoi ¿

Gauss se racla la gorge : c'était pourtant bien cela qu'il fallait faire, dit-il, additionner tous les nombres de un à cent. Cent plus un faisaient cent-un. Quatre-ving-dix-neuf plus deux faisaient cent-un. Quatre-ving-dix-huit plus trois faisaient cent-un. Toujours cent-un. On pouvait répéter l'opération cinquante fois. Donc : cinquante fois cent-un. »

Daniel Kehlmann, *Les arpenteurs du monde*, Actes Sud, 2006

1. La somme des n premiers entiers est $S_1=1+2+3+\dots+n=$ ¿¿¿. Démontrez-le par récurrence.

2. Calculez les sommes $u_1=1^3$, $u_2=1^3+2^3$, $u_3=1^3+2^3+3^3$, …, $u_{10}=1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+10^3$.

3. Voyez-vous une formule apparaître ¿

4. Essayez de démontrer la formule obtenue par récurrence.

1. 9. Géométrique 1

La population mondiale est de l'ordre de 5 milliards d'individus.

1. Si on admet un accroissement moyen de la population mondiale de 1,6 % par an, quelle sera la population mondiale dans vingt ans ?

2. Dans combien d'années la population mondiale aura-t-elle doublé (en prenant le même taux annuel d'accroissement) ?

3. P_0 désigne la population d'un continent en 1939, P_n la population du même continent n années plus tard ; i désigne le taux d'accroissement annuel moyen de la population au cours de cette période. Montrer que $P_n = P_0(1+i)^n$.

Application numérique : en Europe la population était de 380 millions en 1939 et de 500 millions en 1989. Dans le même temps la population est passée en Amérique du Sud de 110 millions à 435 millions d'habitants. Calculer le taux d'accroissement annuel moyen sur cette période dans les deux cas.

1. 10. Géométrique 2 : des sous

1. On place un capital C à intérêts composés (les intérêst versés au bout d'un an sont intégrés au capital) pendant une durée de 2 ans. On souhaite récupérer son capital augmenté de 10 % au bout de ces deux ans. Quel doit être le taux d'intérêt annuel auquel est placé le capital ?

2. Même question mais la durée de placement est de 4 ans et on veut un capital augmenté de 20 %.

3. Proposez une formule générale de calcul.

1. 11. Nombres de Fermat

1. Pour tout entier naturel n, on note $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n > 1$, on a $F_0 \times F_1 \times F_2 ... \times F_n = F_{n+1} - 2$.

3. Montrer que la suite (F_n) est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

1. 12. Somme de termes

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $3^n \geq n^2(n-1)$.

2. On définit, pour $n \geq 1$, la suite (u_n) par $u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n}$.

a. Quel est le sens de variation de (u_n) ?

b. Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$. En déduire que, pour tout $k \geq 1$, $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$ puis un majorant de u_n. Que peut-on en conclure pour (u_n) ?

3. On définit pour $n \geq 1$ la suite (v_n) par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. En utilisant la question 1), montrer que (v_n) est décroissante. Quelle est la limite de $(v_n - u_n)$? Que peut-on en conclure pour (v_n) ?

1. 13. Les lettres de Gaston

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2000, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$.

1. Dans un repère de votre choix, représenter les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{3}{4}x + 200$, puis les premiers termes de la suite (u_n).

2. On pose pour tout n $v_n = u_n - 800$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de (u_n). Au bout de combien de temps a-t-on $u_n < 810$?

3. Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin .» « Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… » Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

4. La question a. est indépendante de ce qui précède

a. Si (x_n) est une suite croissante, on définit (y_n) par $y_n = \frac{x_0 + x_1 ... + x_n}{n+1}$. Montrer que (y_n) est croissante et que pour tout n on a $y_n \le x_n$. Que peut-on dire pour une suite (x_n) décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).

b. On appelle M_n la quantité de lettres qu'il y eu en moyenne sur le bureau de Gaston pendant les n premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres). Exprimer M_n en fonction de n. Quel est le sens de variation de (M_n). La suite (M_n) est-elle convergente ?

Généralisation : On considère une suite v donnée et la suite u dont le terme général u_n est la moyenne arithmétique : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.

A partir du calcul des premiers termes et d'une représentation graphique, on demande de conjecturer une expression de u_n en fonction de n, que l'on demande de démontrer.

1. 14. De Mesmaeker

Monsieur De Mesmaeker, grand patron bruxellois, propose à ses nouveaux employés les deux contrats suivants : dans tous les cas un salaire initial de 1500 € pour le premier mois, augmenté de 5 € chaque mois (contrat 1), ou augmenté de 0,3% tous les mois (contrat 2).

1. Soient u_n et v_n les salaires respectifs pour chaque contrat le $n^{\text{ième}}$ mois.

Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

2. Quel salaire gagnerait-on pour chaque contrat après un an passé dans l'entreprise ?

3. Comparer la totalité des sommes gagnée par quelqu'un qui resterait pendant 40 ans dans l'entreprise.

1. 15. Définition de la limite d'une suite

1. Soit une suite de terme général u_n. Que signifie : la suite (u_n) a pour limite $+\infty$?

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2+2}{n}$ pour $n \ge 1$.

a. Montrez qu'à partir d'un certain rang n_0, à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]10\,;\,+\infty[$.

b. Soit A un réel aussi grand que l'on veut (on peut supposer $A \ge 10$) ; montrez qu'à partir d'un certain rang n_0, à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A\,;\,+\infty[$.

c. En déduire à l'aide du 1. la limite de la suite (u_n).

d. Donnez une méthode pratique permettant d'obtenir cette limite sans avoir recours à la définition.

1. 16. STL France, Juin 2006

5 points

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal.

Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25% à chaque élévation de 100 m.

Pour tout entier naturel n, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude $100n$, exprimée en mètres. Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0 = 1\,013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.

2. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

b. En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $P_n = 1\,013 \times 0,9875^n$.

3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.

4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

1. 17. Suite récurrente 1

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. Injection unique

On effectue à l'instant 0 une injection de 10 ml de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. On note u_n la quantité de médicament restant dans le sang à la minute n.

a. Quelle est la nature de la suite u_n ? Quel est son sens de variation ? Quelle est sa limite ?

b. Donnez l'expression de u_n en fonction de n. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Cette durée dépend-elle de la quantité initiale ?

2. Injections répétées

Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 ml de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. On note v_n la quantité de médicament restant dans le sang à la minute n.

Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de la moitié de la dose initiale la machine réinjecte un peu de produit, soit k la quantité injectée exprimée en ml. Au bout de 30 minutes on arrête la machine.

a. Complétez la colonne $k = 1$ du tableau ci-dessous. Quelle est la quantité **totale** de produit injecté dans ce cas ?

b. Quelle constatation faites-vous sur la durée entre deux injections ? Justifiez.

c. On modélise la situation par la suite V_n définie par $V_{n+1} = (0,8)^p V_n + k$ avec $V_0 = 10$ et p entier. Quelle valeur doit-on donner à p ? On note a le nombre $0,8^p$.

On prend toujours $k = 1$ ml.

d. On représente les termes de la suite sur la figure de la page 4 de la manière suivante : on part à chaque fois de V_n sur l'axe des abscisses et on représente son image V_{n+1} sur l'axe vertical par l'intermédiaire de la droite d_k : $y = ax + k$. On renvoie alors V_{n+1} sur l'axe horizontal par l'intermédiaire de la droite ($y = x$) et ainsi de suite.

Tracez les premiers termes de la suite V_n. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur le comportement de V_n (sens de variation, majorant, minorant, limite) ?

e. Prouvez que V_n est décroissante. Soit α l'abscisse du point d'intersection entre les deux droites. Montrez que V_n est minorée par α.

f. On note W_n l'écart entre V_n et α. Quelle est la nature de W_n ?. Déduisez-en W_n en fonction de n et α puis V_n en fonction de n et α. Quelle est la limite de V_n ?

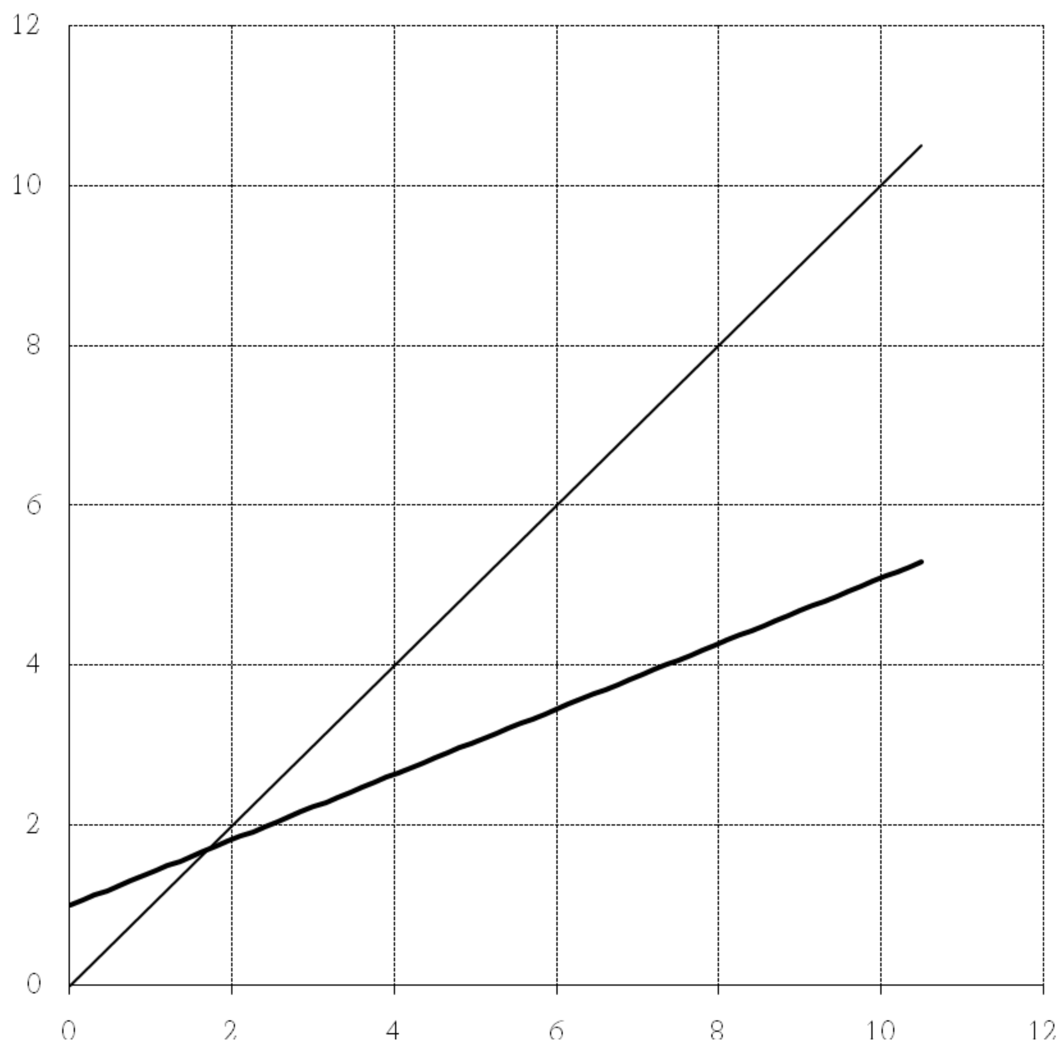
g. Que va-t-il se passer si on prend $V_0 = 1$ par exemple ?

h. Reprendre les questions d. à g. avec $k = 3$ par exemple.

Voir le fichier http://laroche.lycee.free.fr/TS/u(n+1)=f(u(n)).xls

n = temps	u_n	v_n, k = 4 ml	v_n, k = 3 ml	v_n, k = 2 ml	v_n, k = 1 ml
0	10,000	10,000	10,000	10,000	10,000
1	8,000	8,000	8,000	8,000	8,000
2	6,400	6,400	6,400	6,400	6,400
3	5,120	5,120	5,120	5,120	5,120
4	4,096	**8,096**	**7,096**	**6,096**	**5,096**

5	3,277	6,477			
6	2,621	5,181			
7	2,097	4,145			
8	1,678	**7,316**			
9	1,342	5,853			
10	1,074	4,682			
11	0,859	3,746			
12	0,687	**6,997**			
13	0,550	5,597			
14	0,440	4,478			
15	0,352	3,582			
16	0,281	**6,866**			
17	0,225	5,493			
18	0,180	4,394			
19	0,144	3,515			
20	0,115	**6,812**			
21	0,092	5,450			
22	0,074	4,360			
23	0,059	3,488			
24	0,047	**6,790**			
25	0,038	5,432			
26	0,030	4,346			
27	0,024	3,477			
28	0,019	**6,781**			
29	0,015	5,425			
30	0,012	4,340			



1. 18. Suite récurrente 2

On considère la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5. Donner les résultats sous la forme 2^α.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n et calculer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n > 3{,}96$?

1. 19. Suite récurrente 3, Pondicherry 2003

On considère la suite u_n définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$ où a est un réel donné avec $0 < a < 1$.

1. On suppose que $a = \dfrac{1}{8}$;

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative P de la fonction f : $f(x) = x(2 - x)$ ainsi que la droite d ($y = x$).

c. Utiliser d et P pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

2. On suppose dans cette question que a est quelconque ($0 < a < 1$).

a. Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que u_n est croissante.

c. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose de nouveau $a = \frac{1}{8}$ et on considére la suite $v_n = 1 - u_n$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.

1. 20. Suite récurrente 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = e$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln u_n$.

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, en déduire que v_n est le terme général d'une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. Donner l'expression de v_n en fonction de n. En déduire celle de u_n en fonction de n.

2. Pour tout entier naturel n on pose $\mathrm{S}_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $\mathrm{P}_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$.

a. Montrer que $\mathrm{P}_n = e^{\mathrm{S}_n}$.

b. Exprimer S_n en fonction de n.

c. En déduire l'expression de P_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (S_n) ; en déduire celle de la suite (P_n).

1. 21. Suite récurrente 5

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout n entier naturel.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Placer les points correspondants sur une droite graduée.
2. Démontrer que la suite (u_n) est bornée.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Que peut-on conjecturer pour la limite de la suite ?

1. 22. Suite récurrente 6

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ pour tout n entier naturel.

1. Donner les valeurs approchées à 10^{-3} près de u_1, u_2, …, u_{10}.
2. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 3$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. 23. Suite récurrente 7, Haddock

Le Capitaine Haddock a décidé de rationaliser sa consommation de Whisky. Il a un stock de 200 bouteilles, et chaque mois il consomme le quart de son stock, et rachète 10 bouteilles. On appelle u_n le nombre de bouteilles en stock au bout de n mois (ainsi $u_0 = 200$).

1. Montrer que, pour tout $n \neq 0$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 10$. Calculer u_1 et u_2.

2. On pose pour tout entier n : $v_n = u_n - 40$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

3. Quelle sera, à terme, la consommation mensuelle du Capitaine ? Au bout de combien de mois sera-t-elle inférieure à 12 bouteilles ?

1. 24. Suite récurrente 8, Antilles 2003

Partie A - Étude préliminaire d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$.

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.

En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. Étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.

4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.

5. Montrer que $e^{\alpha} = \frac{1}{2-\alpha}$.

Partie B - Étude d'une fonction *f* définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ et calcul intégral.

1. Montrer que $e^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les limites de la fonction *f* en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Calculer la dérivée f' de la fonction *f* puis, à l'aide des résultats de la partie A, construire le tableau des variations de *f*.

4. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie A s'annule.

5. Déterminer une primitive de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale : $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie C - Étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition Dg de la fonction *g* définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien. Prouver que la fonction *g* est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par *g* de l'intervalle I = [−2 ; 0] est incluse dans cet intervalle.

2. a. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.

Montrer que u_1 appartient à l'intervalle I = [−2 ; 0]. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction *g*, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$.

Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \le u_1 \le v_1 \le v_0 \le 0$.

Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction *g* sur l'intervalle [−2 ; 0], que pour tout entier naturel n strictement positif, on a : $-2 \le u_n \le v_n \le v_{n-1} \le 0$.

Préciser le sens de variation de la suite (v_n).

3. a. Soit m la fonction définie sur [0 ; $+\infty$ [par : $m(x) = x - \ln(1+x)$.

Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a $\ln(1+x) \leq x$.

b. Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\ln\left(1+\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right)$. En déduire que $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$.

Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2-v_n}$ et établir que : $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.

Prouver alors que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$.

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

4. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}.

1. 25. Suite récurrente 9, Syracuse

On considère la suite u_n définie par la donnée de son premier terme $u_0=p$ et par la relation :

$$\text{Si } u_n \text{ est pair, } u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n\ ; \text{ si } u_n \text{ est impair, } u_{n+1}=3u_n+1.$$

1. Que devient u_n pour p = 1, 2, 3, 7, 8, 11, 27, 28. Constatation(s) ?

2. On appelle **vol** de p le nombre $V(p)$ de termes de la suite u_n et **hauteur** de p le nombre $H(p)$, plus grand terme de la suite u_n. Déterminer $V(11)$ et $H(11)$.

2. Calculer de même V et H pour $p=2^k$, k entier. Donnez un autre exemple où le calcul est simple.

3. On suppose que la conjecture est vérifiée pour tous les nombres jusqu'à p. Que dire si $H(p+1)<p$?

4. Les nombres entiers peuvent être rangés dans quatre groupes : ceux de la forme $4k$, de la forme $4k+1$, de la forme $4k+2$ ou de la forme $4k+3$ avec k entier. Que pouvez-vous dire dans les trois premiers cas ?

Une page d'intro : http://membres.lycos.fr/ericmer/

1. 26. Suite récurrente 10, EFREI 2001

On se propose d'étudier une suite définie par une relation de récurrence. Les réels a, b et c étant donnés, la suite (u_n) est ici définie par :

$$\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=bu_n-\dfrac{1}{3c}(u_n)^3 \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

1. On choisit $b = c = 1$. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(t)=t-\dfrac{1}{3}t^3$ sur $[0\ ;+\infty[$.

Représenter le graphe de cette fonction. En déduire ensuite le graphe de f lorsque la variable parcourt la totalité de $\mathbb{R}$.

2. On suppose $b = c = 1$. À l'aide de la première bissectrice des axes tracés dans un repère sur lequel on reproduira le graphique précédent, définir des tracés qui permettent la détermination des quatre premiers termes de la suite précédente lorsque le premier terme est défini par a = 1. Quelle conclusion sur la suite vous suggèrent ces tracés ? À l'aide du même procédé, décrire ce qui se passe lorsque $a > 1$ (on ne demande pas une discussion complète).

3. On suppose encore : $a = b = c = 1$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que tous ses termes sont positifs. En déduire que la suite admet une limite et montrer que cette limite est nulle.

4. On suppose à présent que a = 6, b = 2, c = 18. Déterminer le graphe de la fonction g définie par $g(t)=2t-\dfrac{t^3}{54}$. Déterminer les solutions des équations $g(t) = t$ et $g(t) = 0$. En choisissant les unités des axes les plus grandes possibles, dessiner la partie du graphique correspondant au cas où la variable parcourt le segment $[0\ ;\ 11]$. Dessiner également la première bissectrice des axes et définir des tracés qui permettent la détermination des quatre premiers termes de la suite. Calculer ces quatre premiers termes. Quelles sont vos

remarques en ce qui concerne le comportement de cette suite ?

1. 27. Suite récurrente 11, homographique

Soit I l'intervalle [0 ; 1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$. Montrer que, pour tout n entier, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. a. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

c. Etablir la relation $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

e. Prouver que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$ et calculer l.

Deuxième méthode : On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

4. a. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

c. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite l.

1. 28. Suite récurrente 12, La Réunion 2006

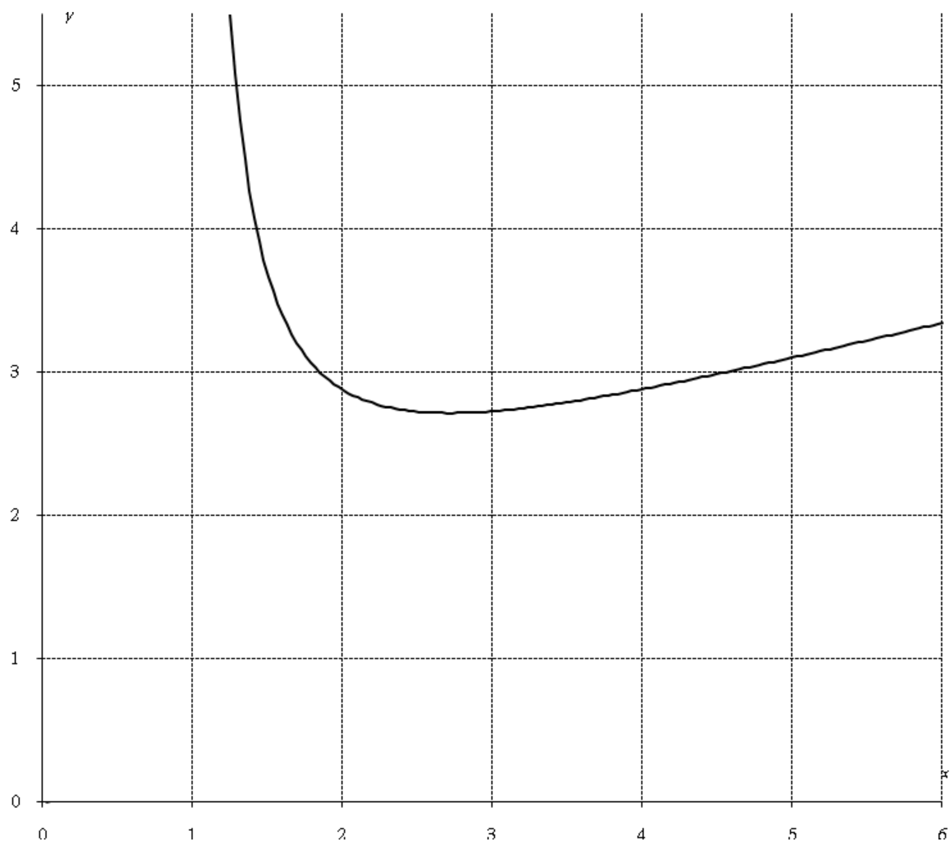
5 points

Partie A : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.



a. On a tracé la courbe représentative C de la fonction f sur la figure ci-dessus.

Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe C d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq e$ (on pourra utiliser la question 1. b.).

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel l de l'intervalle $[e\ ;\ +\infty[$.

<u>Partie B :</u> On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

1. En étudiant de deux manières la limite de la suite $[f(u_n)]$, démontrer que $f(l) = l$.

2. En déduire la valeur de l.

<u>1. 29. Suite récurrente 13, La Réunion 2007</u>

4 points

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite u.

2. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction h.

En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

<u>1. 30. Suites récurrentes 14, Polynésie 2008</u>

5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$. Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.

En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$ où α et β sont deux réels.

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E). Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$ u, =6,6.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{39}{7}(1,2) + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 8].

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \le v_n < v_{n-1} \le 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite l.

1. 31. Suite récurrente 15, Antilles 09/2008

4 points

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Partie B

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

1. 32. Suite récurrente 16, France 2009

4 points

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$: $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$.

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

1. 33. Suite récurrente 17, France 2009

5 points

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

c. Ci dessous sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.

À partir de u_0, en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2, u_3 et u_4.

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

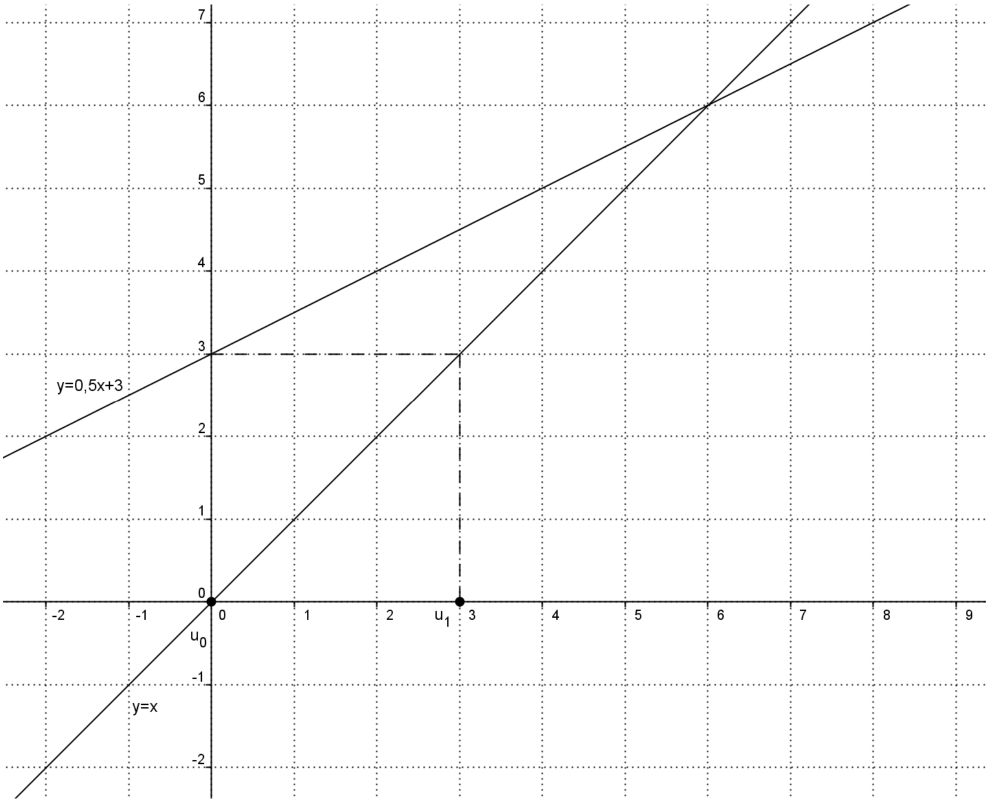
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 6$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit (w_n) la suite de premier terme w_0 et telle que, pour tout nombre entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$. On suppose que w_0 est strictement supérieur à 6. Les suites (u_n) et (w_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.



1\. 34. Suite récurrente 18, Pondicherry 2010, (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1\. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.

2\. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.

3\. Les droites de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 7+2u \\ y = 2+2u \\ z = -6-u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

4\. On considère les points : A de coordonnées $(-1\,;0\,;2)$, B de coordonnées $(1\,;4\,;0)$, et C de coordonnées $(3\,;-4\,;-2)$. Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.

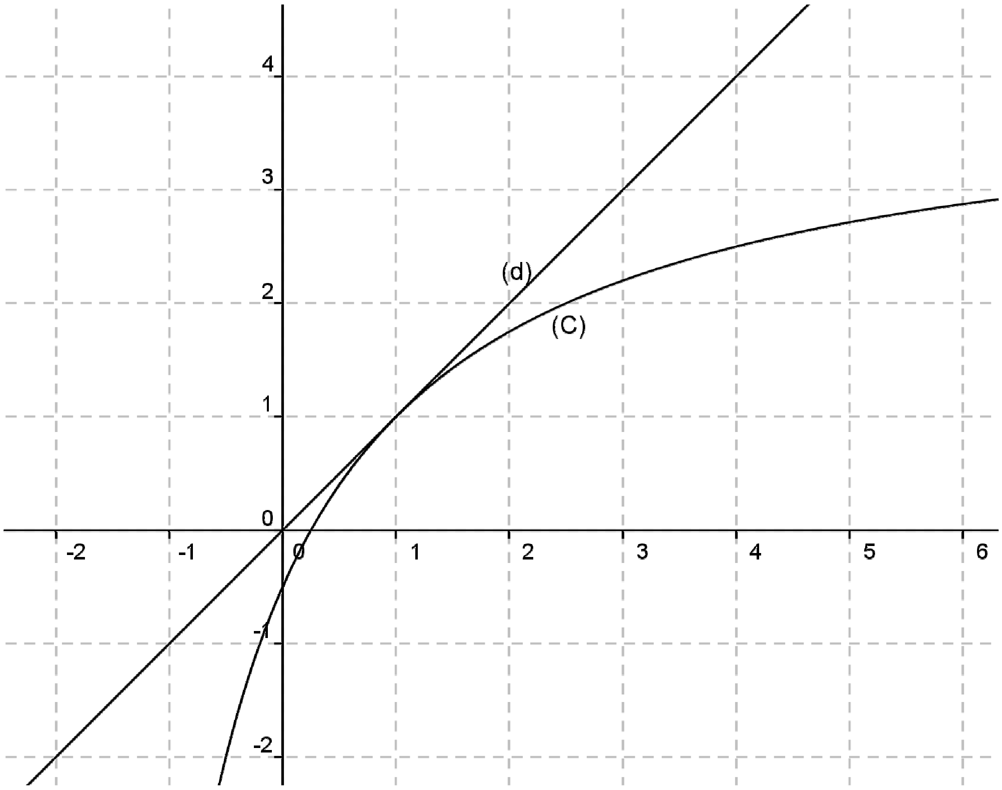
5\. On considère les points : A de coordonnées $(-1\,;1\,;3)$, B de coordonnées $(2\,;1\,;0)$ et C de coordonnées $(4\,;-1\,;5)$. On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

1\. 35. Suite homographique, France, sept. 2010, 5 pts

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative (C) de la fonction f ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.



1. a. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

1. 36. Suites récurrentes, Antilles-Guyane, sept 2010

5 pts

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n .$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

1. 37. Suite homographique, Centres étrangers 2010

5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de propriétés de la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha[$.

De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.

Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

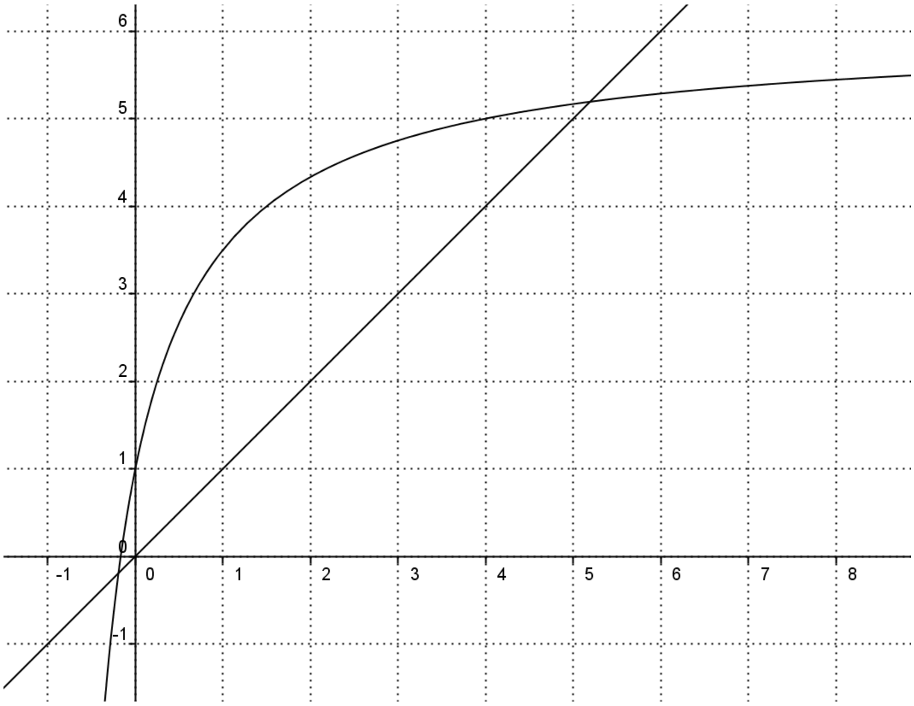
b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



1. 38. Équation+suite, Asie 2009

6 points

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α.

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.

En déduire un encadrement de α sous la forme $u \le \alpha \le v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

1. 39. exp(1), Antilles 2009

4 points

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty\,[$ par : $f(x) = x - \ln(1+x)$.

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \le x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \le 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

1. 40. Récurrente+conjecture, La Réunion 2008

5 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \ge 1$, $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}$.

1. a. Calculer u_1.

b. Les premières valeurs de u_n sont données ci-dessous :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	45	77	117	165	221	285	357	437	525	621

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$. Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question 1. b.

1. 41. Intégrale 1

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \ge 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \text{ et, pour } n \ge 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

1. a. Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0.

b. Calculer u_1.

2. a. Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on a : $1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$.

En déduire que, pour tout entier $n \ge 1$, on a : (1) $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le u_n \le \frac{1}{n+1}$. Déterminer la limite de (u_n).

3. Pour tout entier $n \ge 3$, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a. Vérifier que, pour tout entier $n \ge 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = \mathrm{I}_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que, pour tout entier $n \ge 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

b. En déduire que, pour tout entier $n \ge 3$, on a : (2) $(2n-1)u_n \le \sqrt{2}$.

c. À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

1. 42. Intégrale 2

Première partie

On considère la courbe (C) de la fonction inverse : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ pour $1 \le x \le 2$. On voudrait trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. On découpe l'intervalle [1 ; 2] en n intervalles de même amplitude.

1. Donner les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des bornes des intervalles.

2. Déterminer les images de ces valeurs par f.

3. En considérant les aires des n rectangles dont l'un des sommets est sur la courbe (C), déduire, en fonction de n, un encadrement de l'aire cherchée.

Deuxième partie

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n+i}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2\ \ n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{n+i}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2. Représenter les points correspondants sur une droite.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

4. Calculer $v_n - u_n$ et démontrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

5. Quelle conjecture peut-on faire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

6. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50} et v_{50} puis de u_{150} et v_{150}.

1. 43. Récurrence double

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1\ ; \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$

1. Montrer que la suite s_n définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite t_n définie par $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières la somme $t_0+t_1+...+t_n$).

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{8^n}$.

1. 44. Suites adjacentes 1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=1-10^{-n}$ et $v_n=1+10^{-n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Donner les valeurs de u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Quelle est leur limite ?
4. Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est 0,9999… ?

1. 45. Suites adjacentes 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n=\sum\limits_{p=1}^{p=n}\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$,

et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Soit l leur limite. Donner un entier n_0 pour lequel l'encadrement de l par u_{n_0} et v_{n_0} est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.
3. Donner à la calculatrice une valeur approchée de u_{n_0} et v_{n_0}. Est-il possible que l soit égal à $\dfrac{\pi^2}{6}$?

1. 46. Suites adjacentes 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{4}\end{cases},\text{ et }\begin{cases}v_0=2\\ v_{n+1}=\dfrac{3v_n+1}{4}\end{cases}\text{ pour tout entier naturel } n.$$

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives

$$y=\frac{3x+1}{4}\text{ et } y=x.$$

1. En utilisant ces deux droites, placer sur l'axe des abscisses les réels u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3.
2. Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et donner leur limite.

1. 47. Suites adjacentes 5 : Bac C, N. Calédonie 1986

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_1=12$, $v_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$, $v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}$

1. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $w_n=u_n-v_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
3. Pour tout entier $n\geq 1$, démontrer que $u_n\geq v_n$. En déduire que $u_1\geq u_n\geq v_n\geq v_1$.
4. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $t_n=3u_n+8v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite constante.
5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis les limites de (u_n) et (v_n).

1. 48. Suites adjacentes 6 : étude d'un nombre

Définition et étude d'un nombre à l'aide de deux suites adjacentes

A. Préambule : quelques propriétés de la factorielle

n est un entier naturel non nul. On note $n!$ (et on lit « factorielle n ») le produit $n(n-1)\times \ldots \times 2\times 1$.

On convient de plus que $0!=1$.

1. Calculer 2!, 3!, 4!, 5!

2. Simplifier $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ puis $\dfrac{n!}{n}$.

3. Vérifier que $\dfrac{2}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1-n}{(n+1)!}$.

4. Justifier que le nombre $n!\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$ est un entier.

5. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{x^n}{n!}$. Calculer $h'(x)$ et vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

B. Etude du nombre e

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \text{ et } v_n=u_n+\frac{1}{n!}.$$

1. Etude des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$

a. Calculer $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

c. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ? L'est-elle à partir d'un certain rang ?

d. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

e. On note l leur limite commune. Déterminer un encadrement de l d'amplitude 10^{-3}.

2. On suppose que l est rationnel, c'est à dire qu'il existe deux entiers naturels p et n vérifiant $l=\dfrac{p}{n}$.

a. Est-il possible que $n = 1$?

b. Justifier l'encadrement : $u_n<\dfrac{p}{n}<u_n+\dfrac{1}{n!}$.

c. En déduire que $0<p(n-1)!-n!\,u_n<1$.

d. Justifier que le nombre $N=p(n-1)!-n!\,u_n$ est un entier. Qu'en conclut-on ?

3. Où l'on retrouve l'exponentielle

a. Quel autre nombre déjà rencontré vérifie l'inégalité établie à la question B. 1. e. ?

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on définit la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x)=\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$.

Montrer que pour tout $x\in[0\,;1]$, $f'(x)=-\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

c. Etablir le tableau de variation de f sur [0 ; 1].

d. Calculer $f(0)$. Montrer que $f(1)=\dfrac{u_n}{e}$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n<e$.

4. Pour n entier fixé ($n\geq 2$), on définit la fonction g sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$g(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+2\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}.$$

a. Montrer que pour tout $x\in[0\ ;\ 1]$, $g'(x)=(n-2x)\dfrac{x^{n-1}}{n!}e^{-x}$.

b. Etablir le tableau de variation de g sur [0 ; 1].

c. Calculer $g(0)$. Montrer que $g(1)=\dfrac{v_n}{e}$. En déduire que pour tout $n\geq 2$: $u_n<e<v_n$.

Conclure : quel est le nombre l défini en B. 1. e. ¿

1. 49. Suites adj. 7 : constante d'Euler, Antilles 2005

6 points

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\ ;\ 1]$: $\dfrac{1}{n}-\dfrac{x}{n^2}\leq\dfrac{1}{x+n}\leq\dfrac{1}{n}$.

2. a. Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+n}dx$.

b. Déduire en utilisant 1., que : pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\leq\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ puis que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\leq\dfrac{1}{n}$.

3. On appelle U la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par : $U(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$.

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser 2. b.)

4. On désigne par V la suite de terme général : $V(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$.

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.

Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

1. 50. Suite et ln, Antilles-Guyane

7 points

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=x-x\ln x$.

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ et que $g'(x)=-\ln x$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{e^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

a. le sens de variation de la suite (u_n) ;

b. la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $v_n=\ln(u_n)$.

a. Montrer que $v_n=n-n\ln n$.

b. En utilisant la Partie A, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

1. 51. Exp+sensibilité calcul, Liban 2005

8 points

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$.

1. Montrer que la fonction $f : t \to (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \to (1-t)e^t$ sur [0 ; 1]. En déduire la valeur de u_1.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R).

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par la deuxième calculatrice
1	7,1828182845 E-01	7,1828182846 E-01
2	4,3656365691 E-01	4,3656365692 E-01
3	3,0969097075 E-01	3,0969097076 E-01
4	2,3876388301 E-01	2,3876388304 E-01
5	1,9381941508 E-01	1,9381941520 E-01
6	1,6291649051 E-01	1,6291649120 E-01
7	1,40415433581 E-01	1,4041543840 E-01
8	1,2332346869 E-01	1,2332350720 E-01
9	1,0991121828 E-01	1,0991156480 E-01
10	9,9112182825 E-02	9,9115648000 E-02
11	9,0234011080 E-02	9,0272128000 E-02
12	8,2808132963 E-02	8,3265536000 E-02
13	7,6505728522 E-02	8,2451968000 E-02
14	7,1080199309 E-02	1,5432755200 E-01
15	6,6202989636 E-02	1,31491328006 E+00
16	5,9247834186 E-02	2,0038612480 E+01
17	7,2131811612 E-02	3,3965641216 E+02
18	−8,7016273909 E-02	6,1128154189 E+03
19	−1,7533092042 E-02	1,1614249296 E+05
20	−3,5166184085 E-02	2,3228488592 E+06
21	−7,3858986580 E-02	4,8779825043 E+07
22	−1,6249077047 E-02	1,0731561499 E+09
23	−3,7372887209 E-02	2,4682591448 E+10
24	−8,9694930302 E-02	5,923821947 E+11

25	−2,242372585 E-02	1,4809554869 E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition : pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n,

$$(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e.$$

b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n) : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par : $v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$$

où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$)

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

1. 52. Suites adj.+barycentre, Antilles 2006

5 points

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\,;\vec{u})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

1. Sur le graphique placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n.

Montrer que : $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$. On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).

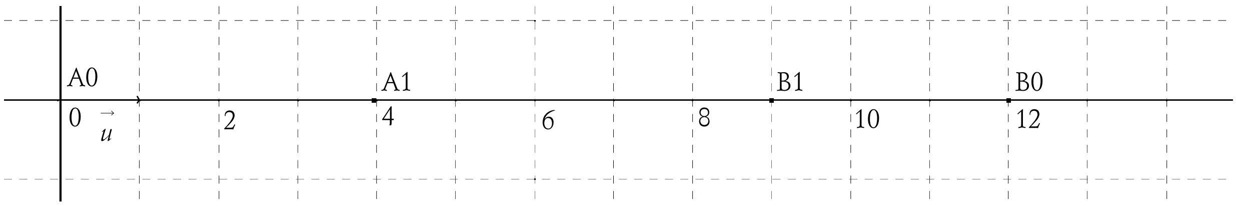
b. Étudier les variations de la suite (b_n).

3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3a_n + 4b_n$. Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).



1. 53. Exp+sol équation, N. Calédonie 2002

10 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (Unités graphiques : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I=\int_{-3}^{0} xe^{-\frac{x}{2}}dx$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples (x, y) tels que $0 \le y \le f(x)$ et $x \le 0$.

5. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2<\alpha<-\frac{3}{2}$.

b. Plus généralement, déterminer graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=3e^{\frac{x}{2}}-3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$.

2. Soit φ' et φ'' les dérivées première et seconde de la fonction φ.

a. Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi(\alpha)=\frac{\alpha+3}{2}$.

b. Étudier le sens de variation de $\varphi'(x)$, puis celui de $\varphi(x)$.

c. On se place désormais dans l'intervalle I= $[-2\,;\,\alpha]$.

3. Montrer que, pour tout x appartenant I :

a. $\varphi(x)$ appartient à I.

b. $\frac{1}{2}\le\varphi'(x)\le\frac{3}{4}$.

c. En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0\le\frac{1}{2}(\alpha-x)\le\varphi(\alpha)-\varphi(x)\le\frac{3}{4}(\alpha-x).$$

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.

b. Justifier que, pour tout entier n, $0 \le \alpha - u_{n+1} \le \frac{3}{4}(\alpha - u_n)$ puis que $0 \le \alpha - u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d. Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\frac{3}{4}\right)^p \le 10^{-2}$. Donner une approximation décimale à 10^{-2} près de u_p, à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.

1. 54. Encadrement d'intégrale, Polynésie 2004

5 points

On considère la suite (I_n), $n \in \mathbb{N}$, définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$.

1. a. Déterminer le sens de variation de cette suite.

b. Montrer que (I_n), est une suite positive.

c. Montrer que pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a $\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \le \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur [0 ; 1] par : $f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$.

a. Étudier le sens de variation et le signe de f.

b. En déduire le sens de variation de g sur [0 ; 1].

c. Établir, pour tout x appartenant à [0 ; 1], l'encadrement : $1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à [0 ; 1].

e. Établir l'encadrement : $\frac{2}{3(n+2)} \le I_n \le \frac{23}{30(n+1)}$.

f. Donner une valeur de p telle que $I_p \le 10^{-2}$.

1. 55. Puissances et factorielles, Liban 2004

4 points

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\frac{k^n}{n!} \le \frac{k^k}{k!}$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k, $\frac{x^n}{n!} \le \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$.

c. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

2. a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\frac{n^{n-1}}{n!} \ge 1$ (on pourra écrire $\frac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

1. 56. Sommes et fonction ln, C. étrangers 2005

7 points

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\ln(1+x)-x \text{ et } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x\geq 0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_1=\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n\geq 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ et $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}$

À l'aide de la première partie, montrer que : $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq \ln u_n\leq S_n$.

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n).

a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n\leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Montrer alors que $\frac{5}{6}\leq \ln l\leq 1$ et en déduire, un encadrement de l.

1. 57. Indice de Gini, C. étrangers 2004

9 points

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;

(2) f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;

(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $f(x) \leq x$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal R$=(O\ ;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 10 cm.

I. Étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $g(x)=xe^{x-1}$.

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).

2. Montrer que $g(x)-x=\frac{x}{e}\left(e^x-e\right)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).

3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère R.

II. Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \int_0^1 [x - f(x)]\,dx$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.

3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_n(x) = \dfrac{2x^n}{1+x}$ où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

a. On pose $I_n = \int_0^1 [x - f_n(x)]\,dx$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

b. Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle [0 ; 1] ; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c. Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], $0 \leq \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^n$.

d. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n+1}$.

e. Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

1. 58. Accroissements finis, Asie 2004

8 points

I. Étude d'une fonction *f*

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \ln(1+2x)$.

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle I.

b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle [1 ; 2].

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.

4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; \beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0 ; \beta[$.

II. Étude d'une suite récurrente

On appelle (u_n), $n \geq 0$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0 ; \beta[$.

2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

III. Recherche de la limite de la suite (u_n)

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.

2. Recherche de la limite de la suite (u_n) :

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, $\int_{u_0}^{\beta} f'(t)dt \leq \dfrac{2}{3}(\beta - u_n)$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(\beta - u_n)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leq \beta - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

1. 59. Suite récurrente+intégrale, N. Caledonie 2005

5 points

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 2 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1. a. Calculer u_2, u_3 et u_4.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1.$$

c. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

3. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

1. 60. Suite+intégrale, Polynésie 2010, 7 pts

La figure qui suit l'exercice sera complétée.

Partie A

1. On considère la fonction g définie sur $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

a. *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1 ; +\infty[$ une unique solution notée α.

b. Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)$.

On désigne par (C) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

a. En utilisant la courbe (C), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (H) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$.

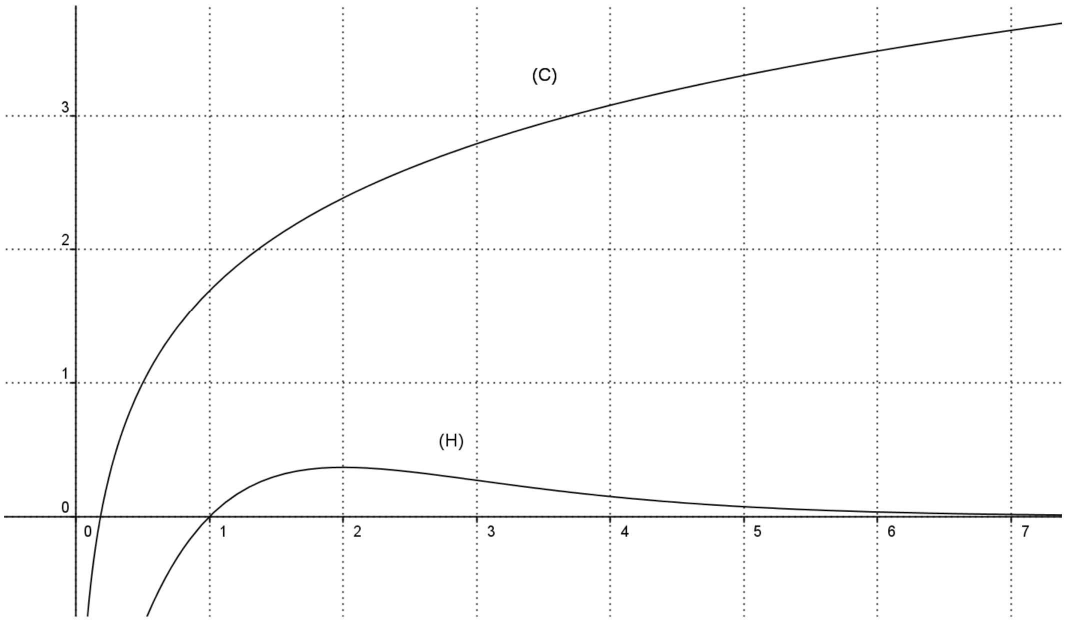
a. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $F(x)=-xe^{1-x}+1$.

c. Démontrer que sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x)+1=x$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (H), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=a$.

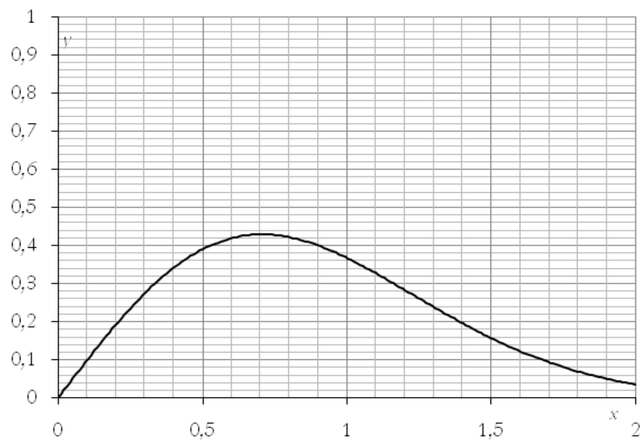
Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.



1. 61. Exp+intégrale+suite, Pondicherry 2009

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=xe^{-x^2}$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. On pourra écrire, pour x différent de 0, $f(x)=\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{e^{x^2}}$.

b. Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites

d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1 : $f(n+1) \le u_n \le f(n)$.

b. Quel est le sens de variation de la suite (u_n), $n > 2$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

1. 62. Intégrale+suite+calcul de exp(2), Asie 2005

7 points

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \ge 1$, l'intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$.

1. Calculer I_1.

2. Établir que pour tout entier naturel $n \ge 1$, $0 \le I_n \le \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \ge 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \ge 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \ge 3$, $u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \ge 3$, $0 \le u_n \le u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que : $e^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$.

1. 63. Intégrale et suite, Amérique du Nord 2004

8 points

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n)\ \ y'+y=\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x)=h(x)e^{-x}.$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel, $h'(x)=\dfrac{x^n}{n!}$.

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation : (F) $y' + y = 0$.

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=e$ (on rappelle que par convention $0! = 1$).

1. On pose, pour tout x réel, $f_0(x)=e^{-x}$, $f_1(x)=xe^{-x}$.

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la Partie I, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$: $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ (on ne cherchera pas à calculer I_n).

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle [0 ; 1], l'encadrement : $0\leq f_n(x)\leq\dfrac{x^n}{n!}$. En déduire que $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{(n+1)!}$0, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k-I_{k-1}=-\dfrac{1}{k!}e^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que : $I_n=1-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{e^{-1}}{k!}$.

d. En déduire finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=e$.

1. 64. Intégrale et suite, N. Calédonie 2004

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+e^{-x}-2e^{-2x}$ et C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Soit Ie polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 1+X-2X^2$. Étudier Ie signe de $P(X)$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe C ?

3. Vérifier que $f(x)=e^{-2x}\left(e^{2x}+e^{x}-2\right)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.

4. a. Soit f' la fonction dérivee de la fonction f, calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x)$ a Ie même signe que $(4-e^{x})$, puis étudier Ie signe de $f'(x)$.

c. Dresser Ie tableau de variations de f. On montrera que Ie maximum est un nombre rationnel.

5. a. Démontrer que la courbe C et la droite D d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport a la droite D.

6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point A.

7. Tracer les droites D et T, puis la courbe C.

Partie B : Étude d'une suite

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe C, l'axe des ordonnées et la droite D.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\int_{n-1+\ln 2}^{n+\ln 2}\left[f(x)-1\right]dx$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs.

b. Donner une interprétation géométrique de (u_n).

3. a. En utilisant Ie sens de variation de f, montrer que, pour tout $n \geq 2$:

si $x \in [(n-1)+\ln 2\,;\, n+\ln 2]$ alors $f(n+\ln 2)-1 \leq f(x)-1 \leq f[(n-1)+\ln 2]-1$.

b. En déduire que, pour tout n, $n \geq 2$, on a : $f(n+\ln 2)-1 \leq u_n \leq f[(n-1)+\ln 2]-1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. Soit la suite (S_n) définie pour $n > 0$, par $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.

a. Écrire S_n à l'aide d'une intégrale.

b. Interpréter géométriquement S_n.

c. Calculer S_n et déterminer la limite de la suite (S_n).

1. 65. Intégrale et suite, Am. du Sud 2003

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^{x}$.

3. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{e^{x}}$ et $h(x)=\dfrac{1}{2e^{x}}$.

Sur la figure ci-dessous sont tracées les courbes représentatives de g et h, notées respectivement C_1 et C_2.

a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

b. Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, C_1, et C_2 ? Tracer Γ sur l'annexe, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

1. Justifier l'existence de (I_n), et donner une interprétation géométrique de (I_n).

2. a. Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.

b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente et determiner sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \int_0^n f(x)dx$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 4. a., démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right) \leq J_n \leq 1-e^{-n} \leq 1 ..$$

2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.

3. On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant : « Si u_n, v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $a \leq b \leq c$ ».

Donner un encadrement de L.

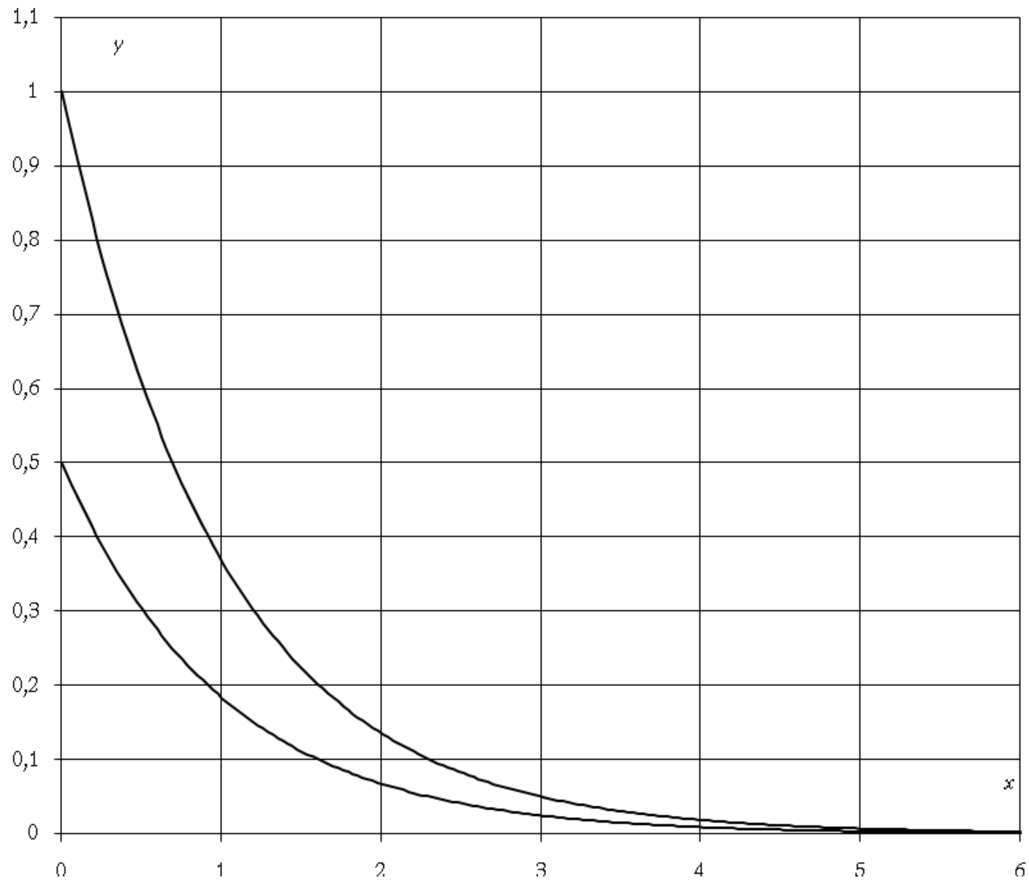
4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \frac{\pi}{4}$.

On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

a. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x}{\left(e^x\right)^2+1}$.

b. Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(e^x)$.

c. En déduire la valeur exacte de L.



1. 66. Intégrale et suite, ESME-SUDRIA 2001

On considère les suites de termes généraux $u_n = \int_1^2 \left(\frac{(\ln t)^n}{t} \right) dt$ et $v_n = (\ln 2)^n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$.
3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = 0$

1. 67. Intégrale et suite, EFREI 2001

On considère les intégrales I_n dépendant de l'entier n définies par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{(1+e^x)^2} dx$.

1. Trouver les dérivées de $\ln(1+e^x)$ et de $(1+e^x)^{-1}$.
2. Calculer $I_0 + I_1$. Calculer ensuite I_0 et en déduire I_1.
3. Calculer, en utilisant encore une simplification sous le signe « intégrale », le nombre $I_1 + I_2$ et en déduire I_2.
4. En remarquant que l'on peut écrire $e^{3x} = e^x(e^x - 1)(e^x + 1) + e^x$, calculer le nombre $I_2 + I_3$ et en déduire I_3.

5. Démontrer, lorsque n est impair, la formule $\frac{u^n+1}{1+u}=P(u)$ où P est le polynôme de degré $n-1$ défini par $P(u)=1-u+u^2-u^3+\ldots+(-1)^{n-1}u^{n-1}$.

En déduire une primitive de la fonction $u\mapsto\frac{u^n}{1+u}$ s'exprimant à l'aide d'un polynôme $P_1(u)$ que l'on définira et d'une fonction logarithme.

Montrer que $J_n = I_n + I_{n+1}$ peut se mettre sous la forme $J_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$

En utilisant ce qui précède, déterminer, lorsque n est impair, la valeur de J_n en utilisant les nombres $P_1(e)$, $P_1(1)$ et un logarithme.

6. Déterminer de même un polynôme $Q(u)$ tel que, n étant pair, $Q(u)=\frac{u^n-1}{1+u}$. En déduire dans ce cas la valeur de $J_n = I_n + I_{n+1}$ à l'aide d'un certain polynôme à définir et d'un logarithme.

7. Décrire une méthode permettant la détermination de proche en proche des intégrales I_n. Calculer I_4.