Terminale S

Fonction Logarithmes **Exercices**

1. 1. Introduction de Ln

Une fonction f est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Elle vérifie $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ pour tout $x>0$ et $f(1)=0$.

Partie A

1. En se ramenant à la définition du nombre dérivé en a ($a > 0$), montrer que, pour h voisin de 0, on a :

$$f(a+h)\simeq\frac{h}{a}+f(a).$$

2. a. Déterminer alors une valeur approchée des images par f de 1,1 et 1,2.

b. Même question pour l'image de 0,9.

Partie B

1. a. Etudier les variations de f.

b. Etudier le signe de f.

2. On se propose d'étudier quelques propriétés algébriques de la fonction f :

a. Rappeler la formule donnant la dérivée de $f[u(x)]$.

b. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=f(ax)-f(x)$, a étant un réel strictement positif.

* En calculant $g'(x)$ montrer que g est une fonction constante que l'on déterminera.

* En déduire que la fonction f vérifie la propriété « l'image d'un produit de deux réels strictement positifs est égale à la somme des images de ces deux réels ».

c. Déduire de la propriété précédente les relations :

* $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ pour tout $x>0$.

* $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$ pour tous réels x_1 et x_2 strictement positifs.

* $f(x^n)=nf(x)$ pour tout $x>0$ et pour tout entier naturel n.

3. A est un réel strictement supérieur à 1 et n est un entier naturel non nul.

Montrer que si $x\geq A^n$ alors $f(x)\geq nf(A)$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis, à l'aide du changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$, déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4. Donner le tableau de variation complet de f.

<u>1. 2. STL France, Juin 2006</u>

10 points

<u>Partie A</u>

On considère la fonction f déflnie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$, $f(x)$ est égal à $\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$.

Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$, $f'(x)=\dfrac{-2+\ln x}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $-2+\ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$. En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. On note I le point d'intersection de C et de l'axe $(O\,;\vec{i})$. Déterminer les coordonnées du point I.

5. On note T la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 1. Déterminer une équation de la droite T.

6. Sur la feuille de papier millimétré, tracer, dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ la courbe C et la droite T.

On prendra 1 cm pour unité graphique sur l'axe $(O\,;\vec{i})$ et 5 cm pour unité graphique sur l'axe $(O\,;\vec{j})$.

<u>Partie B</u>

1. a. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$ par $g(x)=(\ln x)^2$. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$.

Calculer $g'(x)$.

b. En déduire une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$.

2. a. Calculer $J=\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ où f est la fonction définie dans la partie A.

b. Interpréter graphiquement l'intégrale J.

<u>1. 3. STL, France, sept. 2004</u>

11 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\ ;\ +\infty\ [$. Étudier son signe sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\ ;\ +\infty\ [$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

3. En déduire que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty\ [$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x+1$ estasymptote à la courbe C.

d. Étudier la position relative de C et Δ sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b. Vérifier que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty\ [$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

3. Dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C.

Partie C

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

2. Calculer l'intégrale $I = \int_1^e f(x)\,dx$ (on donnera la valeur exacte).

3. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

b. Déduire de la question 2. de la partie C. la valeur exacte de l'aire S de E en cm^2, puis en donner la valeur arrondie en cm^2, au mm^2 près.

1. 4. STL, France, juin 2005 (11 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $g(x) = \ln x - 2x^2 - 1$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty\ [$. Dresser le tableau de variations de la fonction g dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (aucune limite n'est demandée).

2. Déduire du 1. que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty\ [$.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $f(x) = 1 - 2x - \frac{\ln x}{x}$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit D la droite d'équation $y = 1 - 2x$.

a. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En utilisant la partie A déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la droite D et la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie C : Calcul d'une aire

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$.

2. On désigne par A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D, la courbe C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a. Hachurer sur le graphique la partie du plan définie ci-dessus.

b. Calculer la valeur exacte du nombre réel A.

1. 5. ROC+construction géo, La Réunion 2007

5 points

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. a. Donner l'équation réduite de la tangente T au point A à la courbe Γ.

b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de T avec l'axe des ordonnées.

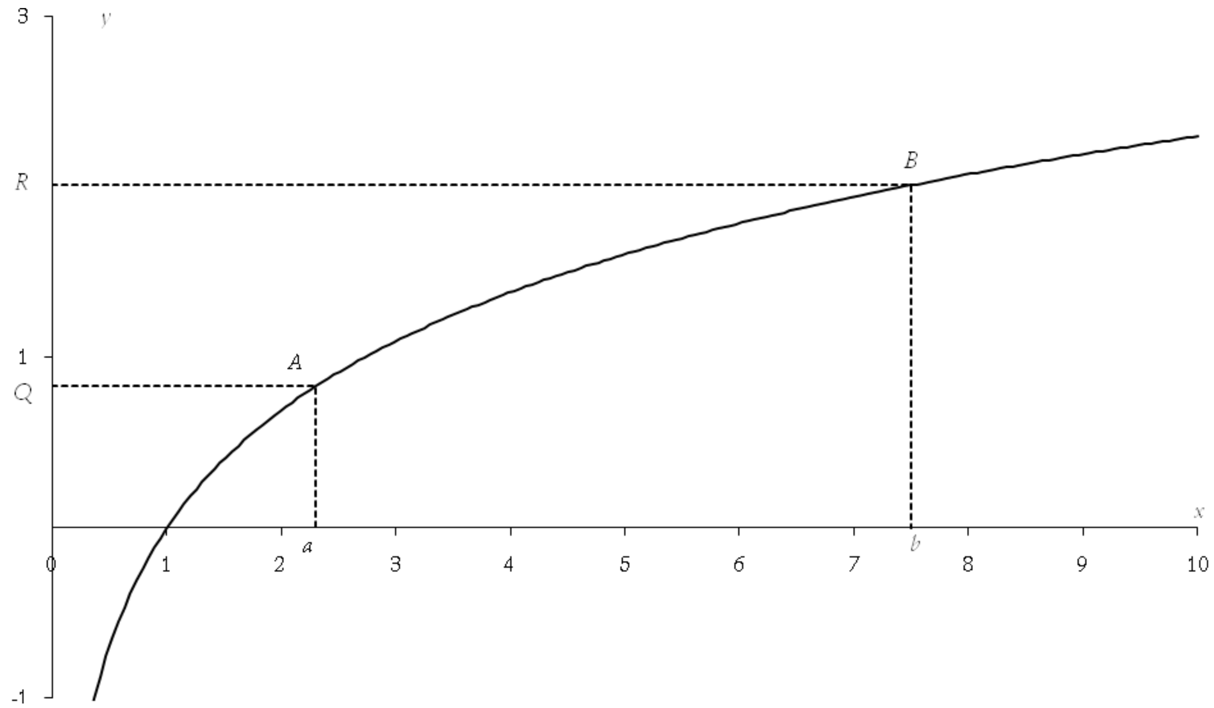
Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de T ; la réaliser sur la figure ci-dessous.

2. Restitution organisée de connaissances : on suppose connue la propriété

« Pour tout couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$. »

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\sqrt{m}=\dfrac{1}{2}\ln m$.

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure (on laissera les traits de construction apparents).



1. 6. ROC+ Étude, Antilles-Guyane, sept 2010, 7 pts

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que pour tout x de $]0\,;+\infty[$ on a : $\exp(\ln x)=x$.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

Le but du problème est l'étude de cette fonction et le calcul d'une aire.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1. Étudier les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative C

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

4. En déduire le sens de variation de *f* sur $\left]0\,;+\infty\right[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

5. Déterminer le point A de la courbeC en lequel la tangente T est parallèle à la droite D.

6. Dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ tracer les droites D et T et la courbe C.

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$.

2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$, $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe C. On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.

1. 7. ROC, Antilles 2006

3 points

1. Restitution organisée des connaissances.

Pré-requis :

– la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty\,[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$).

– $\ln(1) = 0$.

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x, $\ln(ax) = \ln(a)+\ln(x)$.

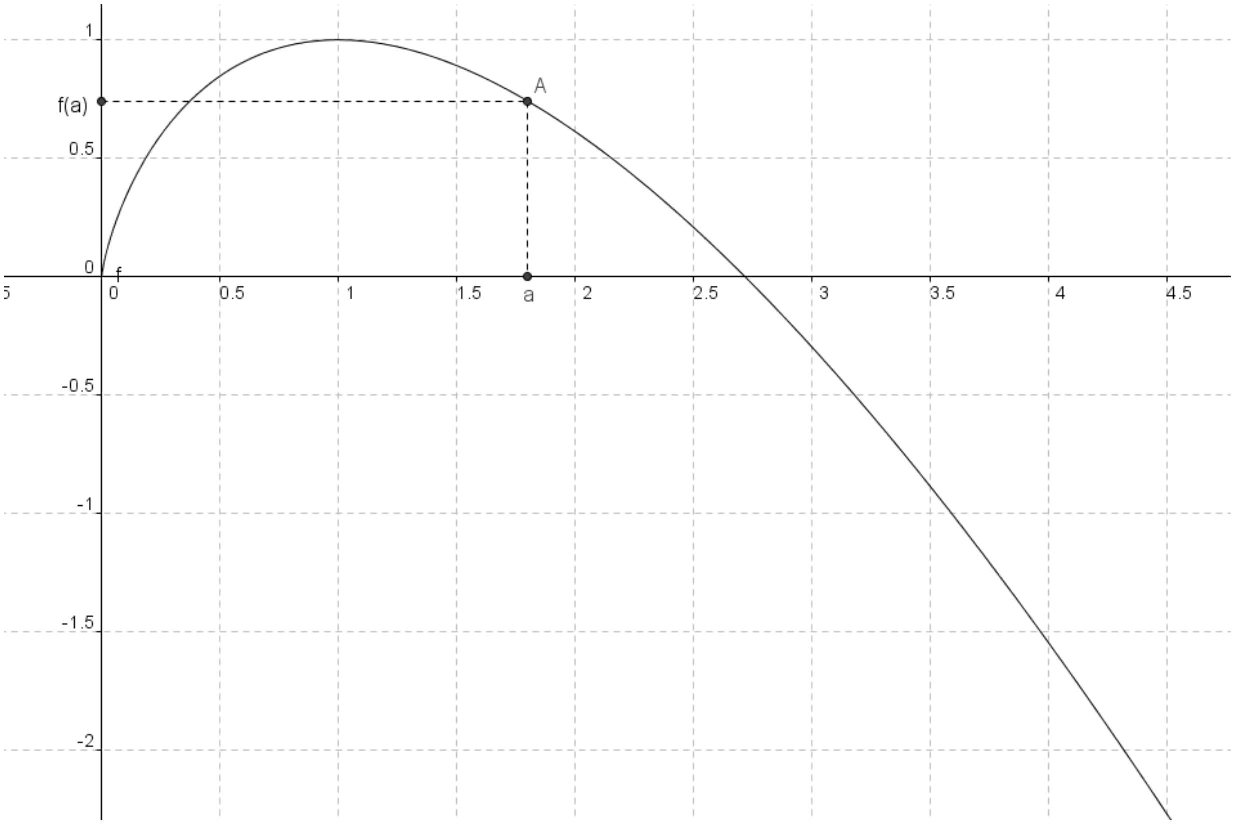
2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $\ln\dfrac{1}{b} = -\ln b$ et que $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$ pour tous réels strictement positifs a et b.

3. On donne $0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$ et $1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10$. En déduire des encadrements de $\ln 6$, $\ln\dfrac{1}{6}$ et $\ln\dfrac{3}{8}$.

1. 8. Étude+aire, France, sept. 2010, 6 pts

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = x(1-\ln x)$.

La courbe représentative C de la fonction *f* est donnée ci-dessous.



Partie I : Étude de la fonction *f*

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

3. Déterminer la dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_A) au point A de la courbe C d'abscisse a.

a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A_0, point d'intersection de la droite (T_A) et de l'axe des ordonnées.

b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_A). Construire la tangente (T_A) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$.

1. Justifier que $\mathcal{A}(a)=\int_a^e f(x)dx$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{A}(a)$ en fonction de a.

1. 9. Famille fonctions, La Réunion sept. 2010, 6 pts

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f_k(x)=\ln(x)-kx^2+1.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$. En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x)=\dfrac{1-2kx^2}{x}$.

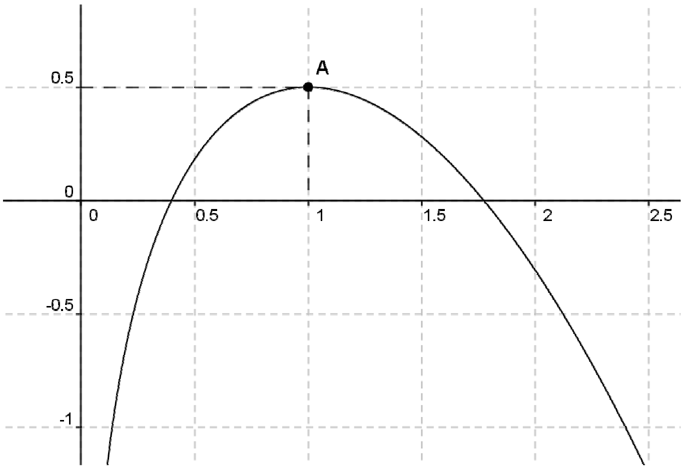
4. Pour un nombre réel k strictement positif on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f(x)$	||	$\nearrow$	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k.

Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k=\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln(x)\,dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

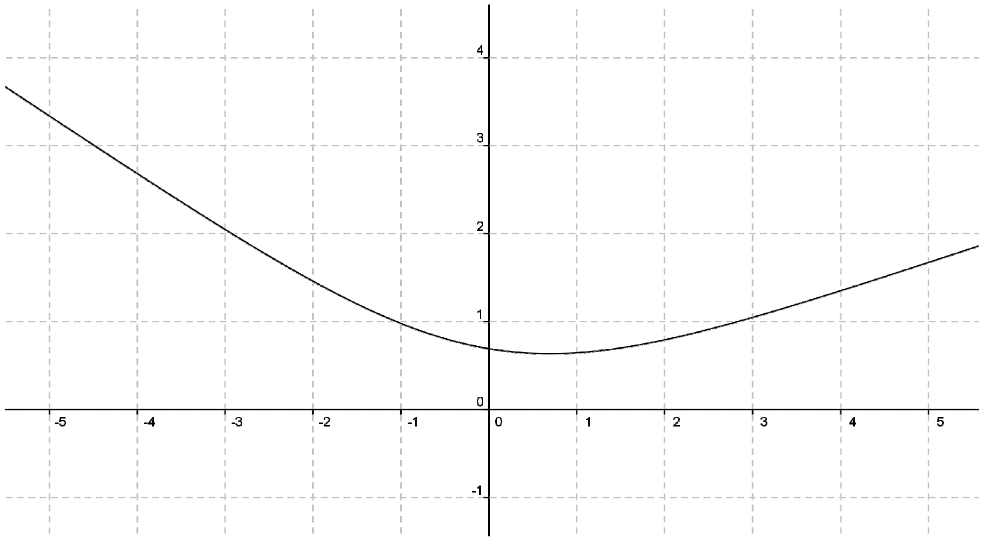
2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{1/2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. 10. Fonction+suite intégrales, Liban 2009

8 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\dfrac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette figure sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

c. Étudier les positions relatives de (D) et de (C).

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(e^x + 1\right) - \frac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3\left(e^x + 1\right)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln\left(1 + e^{-x}\right)dx$.

2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1 + e^{-x}\right) \le e^{-x}$. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \le 1$. La suite (d_n) est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).

On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

1. 11. ROC+tangente+suite, Liban 2008

6 points

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« *Une suite tend vers* $+\infty$ *si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* »

Démontrer le théorème suivant : Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$.

La courbe (C) représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

3. Tracer la droite (T) sur le graphique.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=1$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).

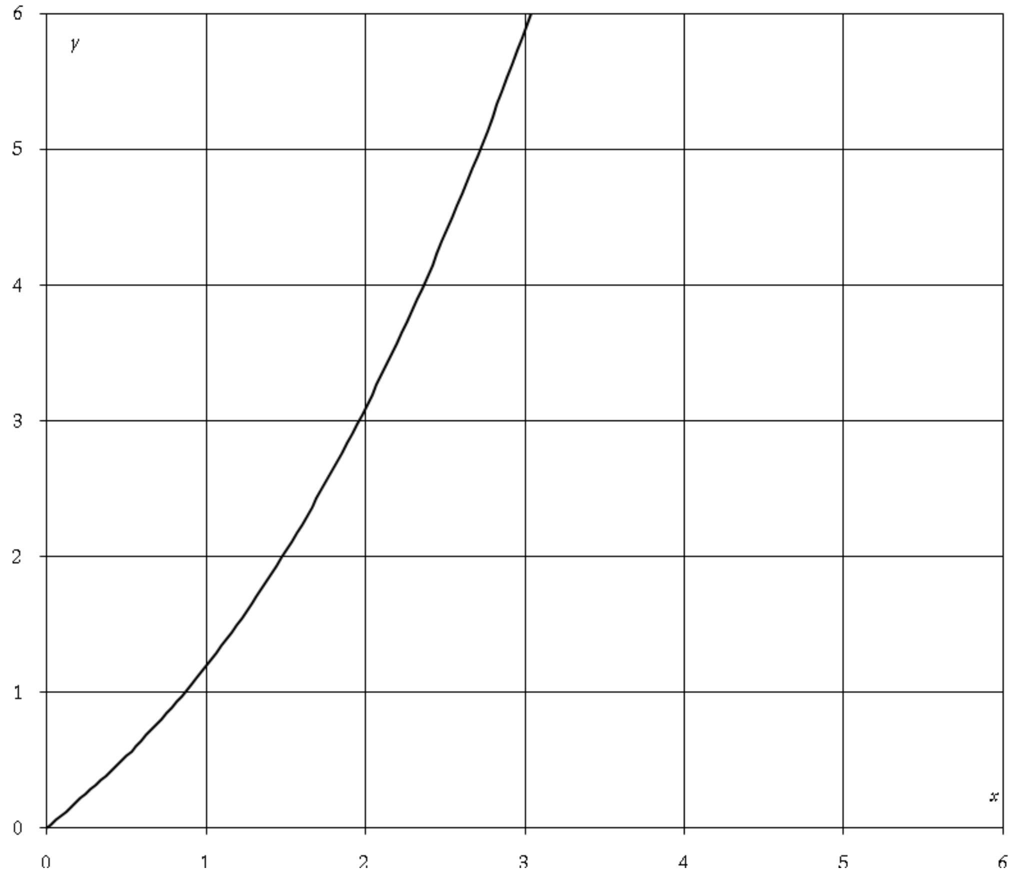
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque *n* tend vers $+\infty$?

3. a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).



1. 12. ROC+limite, Am. du Sud 11/2008

3 points

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, positive sur $[1\,;+\infty[$, et vérifie :

* $\ln 1 = 0$;

* pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;

* pour tout réel strictement positif x, $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$;

* $\ln(2) \approx 0{,}69$ à 10^{-2} près.

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}$.

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

1. 13. Equation+suite, Am. du Sud remplt 2007

6 points

1. On considère la fonction f_1 définie sur [0 ; $+\infty$ [par $f_1(x)=2x-2+\ln\left(x^2+1\right)$.

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur [0 ; $+\infty$ [par

$$f_n(x)=2x-2+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}.$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur [0 ; $+\infty$ [.

c. Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur [0 ; $+\infty$ [.

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0<\alpha_n<1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1})>0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n=1-\dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

1. 14. Logarithme+suite récurrente, France 2007

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$ par : $f(x)=x-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

La courbe C représentative de f est donnée sur la figure ci-dessous que l'on complétera.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe C

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$, on pose $N(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$.

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.

3. Soit D la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x\in[0\,;4]$, alors $f(x)\in[0\,;4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

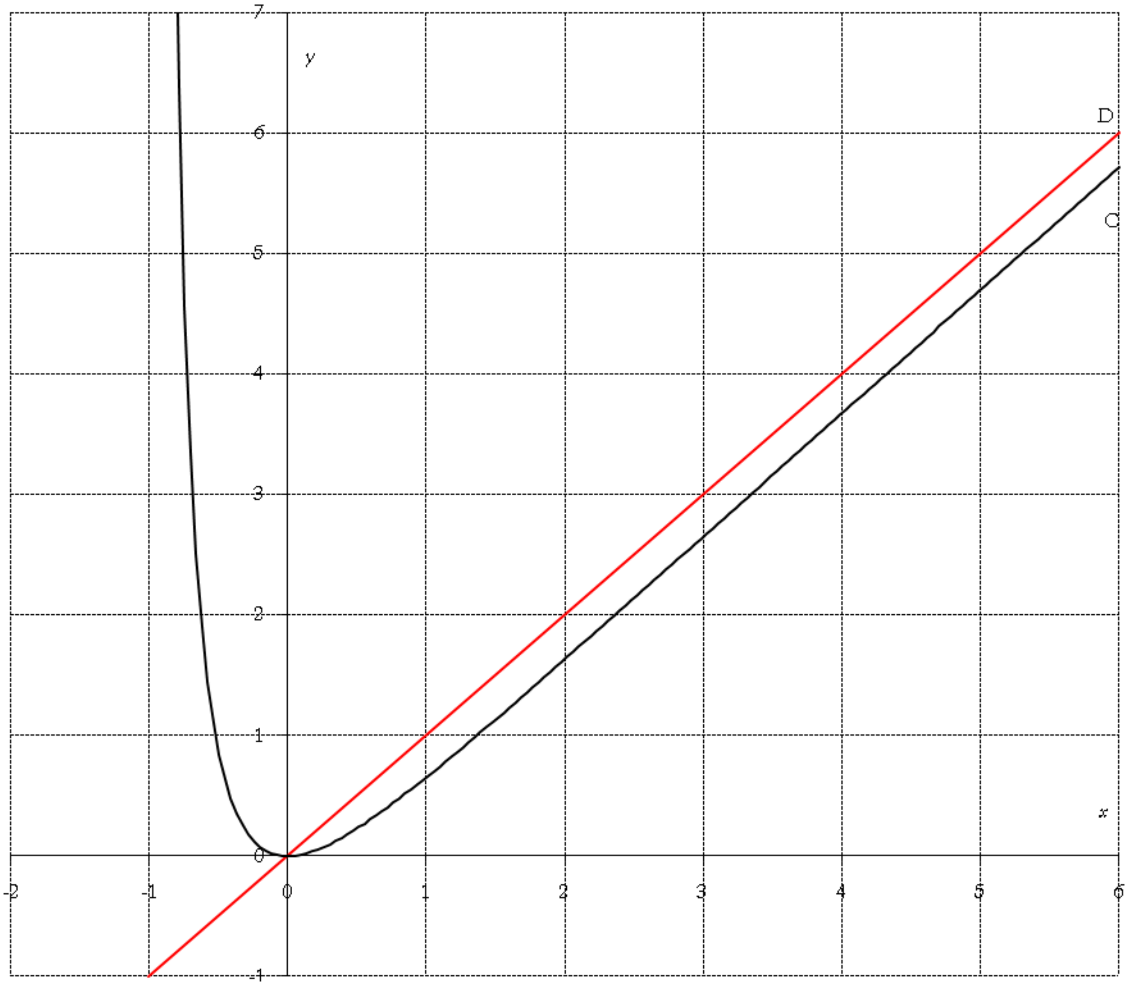
a. Sur le graphique, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points de C d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n\in[0\,;4]$.

c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par l sa limite.

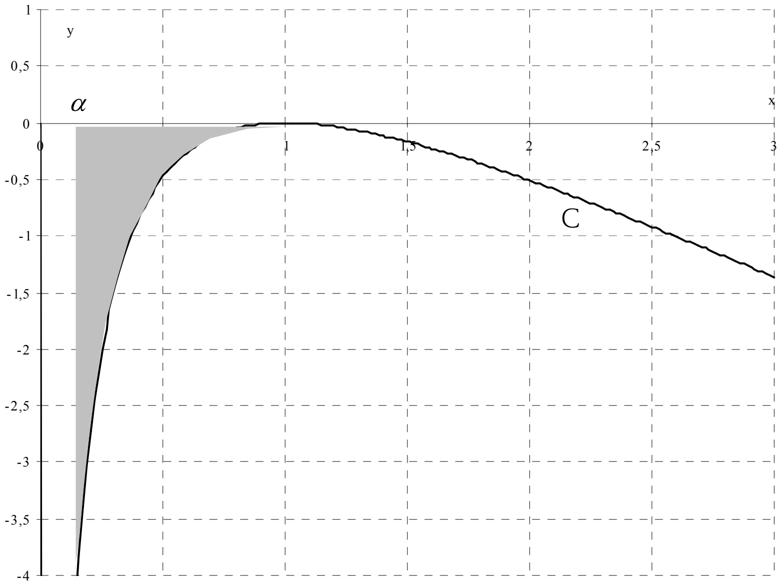
e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de *l*.



1. 15. Logarithme + suite, Polynésie, nov 2004

9 points

La courbe C donné ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty\,[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$.



1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ est du signe de $N(x)=-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]$.

b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0<x<1$ et $x>1$.

c. En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ et les coordonnées du point de C d'ordonnée maximale.

2. On note $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0\ ;\ 1[$.

a. Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\ ;\ 2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1.$$

a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\ ;\ 2]$, la double inégalité : $0\le\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\le 1$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\ ;\ 2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.

b. Déterminer la valeur exacte de l.

1. 16. Logarithme, Polynésie, sept 2003

10 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$ par : $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left(3-2\ln x\right) \text{ si } x>0 \end{cases}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. a. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Étudier la dérivabilité de f en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

3. Étudier le sens de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty\ [$, puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse $x=1$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty\ [$.

a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Étudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

b. Étudier le sens de variations de g. En déduire la position de la courbe C par rapport à la tangente D.

3. Construire la courbe C et la tangente D (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. n est un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire A_n exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe C, la tangente D et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} A_n$ et interpréter le résultat obtenu.

1. 17. Distance point-courbe, Liban 2010, 6 pts

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0\,;+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;+\infty[$. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on note :

* Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;

* A le point de coordonnées (0 ; 2) ;

* M le point de Γ d'abscisse x, x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;+\infty[$.

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

1. 18. Tangentes, N. Calédonie, mars 2003

10 points

PARTIE I

Sur la figure ci-dessous est tracée dans un repère orthogonal la courbe (C) représentative de la fonction f où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Les points A, B, C et D sont les points de la courbe (C) d'abscisses respectives 1, $\sqrt{e}$, e et $e\sqrt{e}$; de plus, A appartient à l'axe des abscisses. La droite (T) est la tangente à (C) au point D.

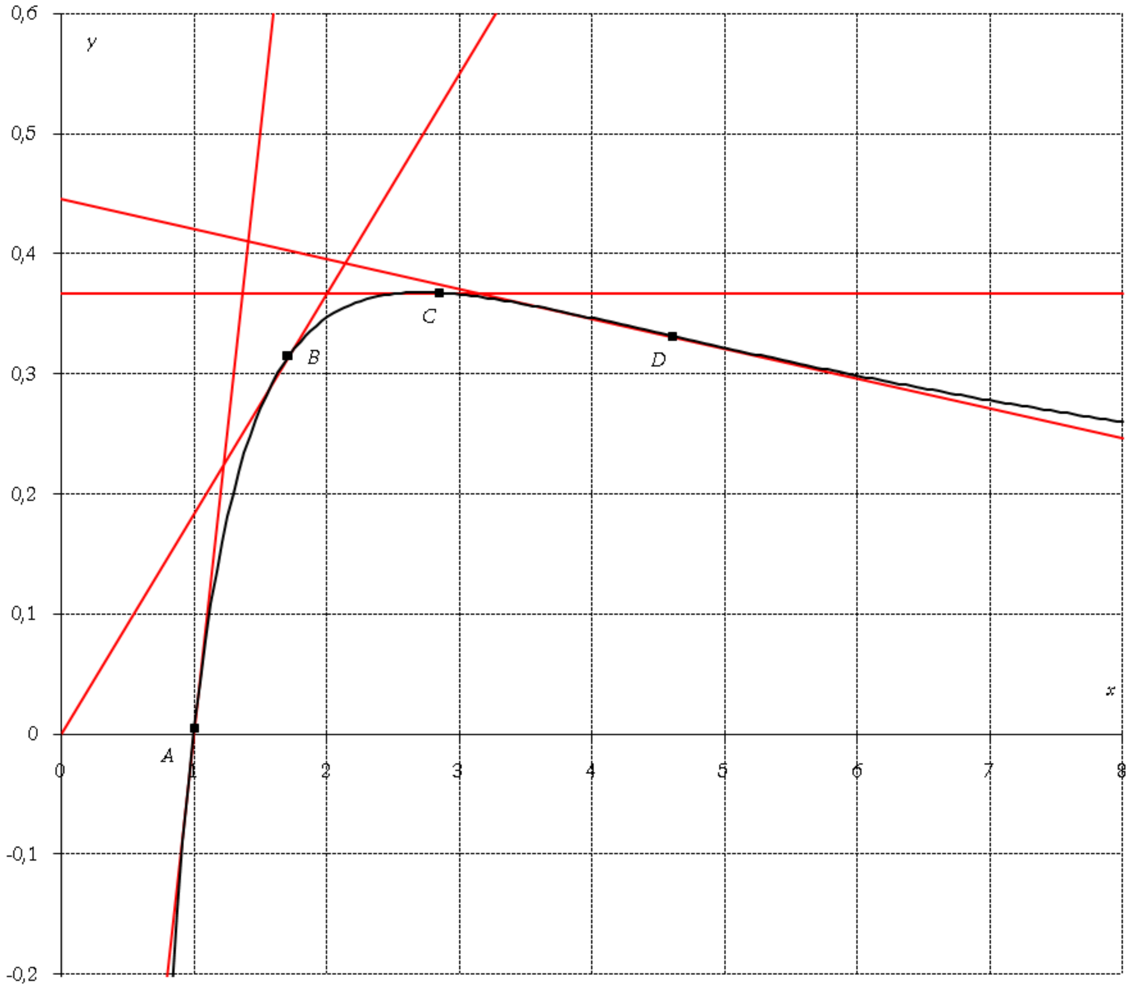
1. Dans cette question, on ne demande qu'une observation graphique.

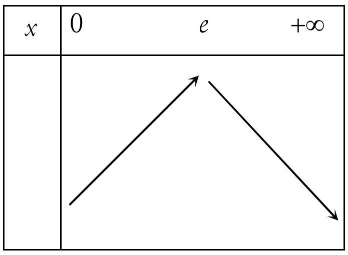
Avec la précision permise par ce graphique :

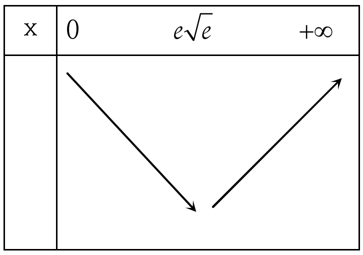
a. Donner une estimation à 5.10^{-2} près des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (C) aux points A, B, C et D.

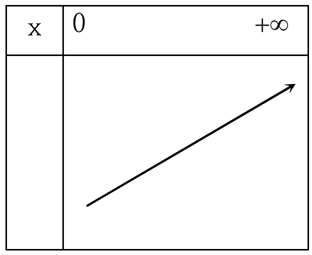
b. Préciser combien la courbe (C) admet de tangentes horizontales, de tangentes passant par l'origine, de tangentes de coefficient directeur 1. Pour chacune de ces tangentes, donner l'abscisse du point de contact avec la courbe (C).

c. Choisir le seul tableau pouvant décrire les variations de la **fonction dérivée** de f. Justifier ce choix.









2. On admet que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

a. Étudier les variations de g. Cela corrobore-t-il votre choix dans la question 1. c. ?

b. Déterminer les limites de g en 0, puis en $+\infty$.

c. Calculer $g(1)$, $g\left(e\sqrt{e}\right)$; puis démontrer que l'équation $g(x) = 1$ n'a qu'une seule solution. Quelle observation de la question 1. b. a-t-on démontrée ?

d. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1-\ln t}{t^2}\,dt$. Calculer $f(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Partie II

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

1. Étudier les variations de f, préciser ses limites en 0 puis en $+\infty$.

2. On cherche à justifier les observations de la question I. 1. concernant les tangentes à la courbe (C) qui sont horizontales, qui ont un coefficient directeur égal à 1 ou qui passent par le point O origine du repère.

Démontrer que, dans chacun de ces cas, une seule tangente vérifie la condition donnée, préciser les abscisses des points de contact correspondants (on pourra utiliser les résultats démontrés dans la partie I. 2. c. et préciser ces points.

3. Étude de la tangente (T) à la courbe (C) au point D (le point D a pour abscisse $e\sqrt{e}$).

a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point D est $y=\dfrac{-x+4e\sqrt{e}}{2e^3}$.

b. Montrer que le signe de $\varphi(x)=2e^3\ln x+x^2-4\left(e\sqrt{e}\right)x$ détermine la position de la courbe (C) par rapport à cette tangente.

c. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. À partir des variations de φ, déterminer la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

Partie III Calcul d'aires

1. Démontrer que les abscisses des points A, B et C sont les trois premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison. Vérifier que l'abscisse de D est le quatrième terme de cette suite.

2. Soit x_0 un nombre réel strictement supérieur à 1 et E le point de la courbe (C) d'abscisse x_0. On considère les droites d_A, d_B, d_C, d_D et d_E parallèles à l'axe des ordonnées et passant respectivement par A, B, C, D et E.

On note U_1 l'aire de la partie du plan limite par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d_A et d_C ;

U_2 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d_B et d_D et

U_3 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d_C et d_E.

a. Calculer U_1, puis U_2.

b. Déterminer x_0 pour que U_1, U_2 et U_3 soient les trois premiers termes d'une suite arithmétique. Quelle remarque peut-on faire sur l'abscisse du point E ?

1. 19. Tangente+intégrale, La Réunion 2008

5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Sa courbe représentative (C), construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés ci-dessous.

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.

Enoncer puis démontrer ces propriétés.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans î 'évaluation.*

Existe-t-il des tangentes à la courbe (C) qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

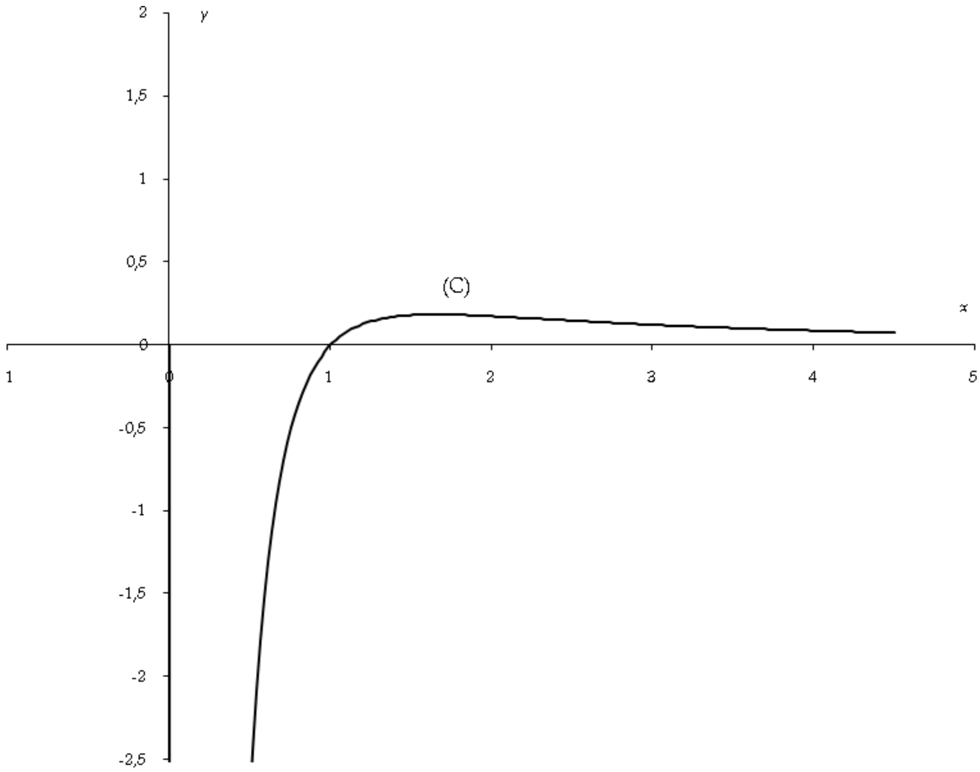
1. a. Que représente f pour la fonction g ?

b. En déduire le sens de variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x)=1-\frac{\ln x+1}{x}$

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.



x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

1. 20. Logarithme, France, sept 2002

11 points

Partie A

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $e^{2x}-1>0$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{e^{2x}-1}$.

a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

b. Calculer $g'(x)$. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont la courbe représentative C dans un repère orthogonal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ est donnée ci-dessous avec sa tangente au point d'abscisse e.

On admet l'égalité suivante : $f(x)=2x\left(a(\ln x)^2+b\ln x+c\right)$ où a, b et c désignent trois réels.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

2. À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, $f'\left(\sqrt{e}\right)$, $f'(e)$.

3. En déduire l'égalité : $f(x)=2x\left(2(\ln x)^2-3\ln x+2\right)$ pour tout $x\in\,]0\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer la limite de f en 0. On pourra poser $t=-\ln x$ et vérifier pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$ l'égalité : $f(t)=2e^{-t}\left(2t^2+3t+2\right)$.

5. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

6. Montrer pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$ l'égalité : $f'(x)=2(\ln x+1)(2\ln x-1)$.

7. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

Partie C

1. Tracer, dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessus, la courbe représentative Γ de la fonction g étudiée en partie A.

2. a. Montrer que pour tout $x>0$, on a $g(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}-1$.

b. Calculer, et exprimer en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe Γ et

les droites d'équation $x=\frac{1}{4}$ et $x = 2$.

3. Soit φ la fonction définie sur [0,1 ; 0,3] par : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

a. Montrer que, pour tout x appartenant [0,1 ; 0,3], on a : $\varphi'(x) > 0$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur [0,1 ; 0,3] et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie D

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

2. On définit la fonction h sur $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression suivante : $h = g\circ f$.

a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de h.

b. Déterminer le sens de variation de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. Montrer que $h(\alpha) = g\circ g(\alpha)$. Déterminer une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-4} près.

1. 21. Logarithme et intégrale, Antilles, sept 2002

12 points

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f(0)=0, f(1)=0, \\ f(x)=(\ln x)\times\ln(1-x),\ x\in]0\,;1[. \end{cases}$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, ainsi que le résultat suivant : pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

b. En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. Montrer que pour tout $x\in\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, $f\left(\frac{1}{2}-x\right)=f\left(\frac{1}{2}+x\right)$. Que peut-on en conclure pour C ?

3. Soit φ la fonction définie sur]0 ; 1[par : $\varphi(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur]0 ; 1[.

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs a_1 et a_2 sur]0 ; 1[(on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur]0 ; 1[.

c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur]0 ; 1[.

4. a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur]0 ; 1[.

b. Donner le tableau de variations de f.

c. Montrer que, pour tout x de]0 ; 1[, les inégalités suivantes sont vraies : $0<(\ln x)\times\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$.

d. Tracer C.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

Pour $t\in\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, on pose : $I_1(t)=\int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x\,dx$, $I_2(t)=\int_t^{\frac{1}{2}} x^2\ln x\,dx$, $I(t)=\int_t^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

1. a. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :

$$I_1(t)=-\frac{\ln 2}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}t^2\ln t+\frac{t^2}{4}\;;\; I_2(t)=-\frac{\ln 2}{24}-\frac{1}{72}-\frac{1}{3}t^3\ln t+\frac{t^3}{9}.$$

b. Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.

2. Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ par : $g(x)=-\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)$ et $h(x)=g(x)-\frac{1}{2}x^2$.

a. Étudier sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction $x\mapsto\ln(1-x)-g(x)$.

b. En déduire que, pour tout x de $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, $\ln(1-x)\leq g(x)$.

c. Par un procédé analogue,montrer que pour tout x de $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, $\ln(1-x)\geq h(x)$.

d. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$.

3. a. Montrer que $-I_1(t)-\frac{1}{2}I_2(t)\leq I(t)\leq -I_1(t)-I_2(t)$.

b. En supposant que $I(t)$ admet une limite note l quand t tend vers 0, donner un encadrement de l.

<u>1. 22. ROC+fonction+aire, Centres étrangers 2008</u>

7 points

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$.

II. Étude d'une fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $u(x)=x^3-1+2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction f.

3. Éléments graphiques et tracés.

a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe (C).

b. Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ).

c. Tracer la courbe (C) et la droite (Δ).

III. Calculs d'aires

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$.

b. Déterminer la limite l de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que $l = A\left(\frac{1}{e}\right)$.

1. 23. ln+intégrale, Liban 2007

6 points

Soient *f* et *g* les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

On note C et C' les courbes représentatives respectives de *f* et *g* dans un repère orthogonal. Les courbes C et C' sont données ci-dessous.

1. a. Étudier le signe de $\ln x(1 - \ln x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire la position relative des deux courbes C et C' sur $]0\,;+\infty[$.

2. Pour *x* appartenant à $]0\,;+\infty[$, *M* est le point de C d'abscisse *x* et *N* est le point de C' demême abscisse.

a. Soit *h* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$. Étudier les variations de la fonction *h* sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire que sur l'intervalle [1 ; *e*], la valeur maximale de la distance *MN* est obtenue pour $x = \sqrt{e}$.

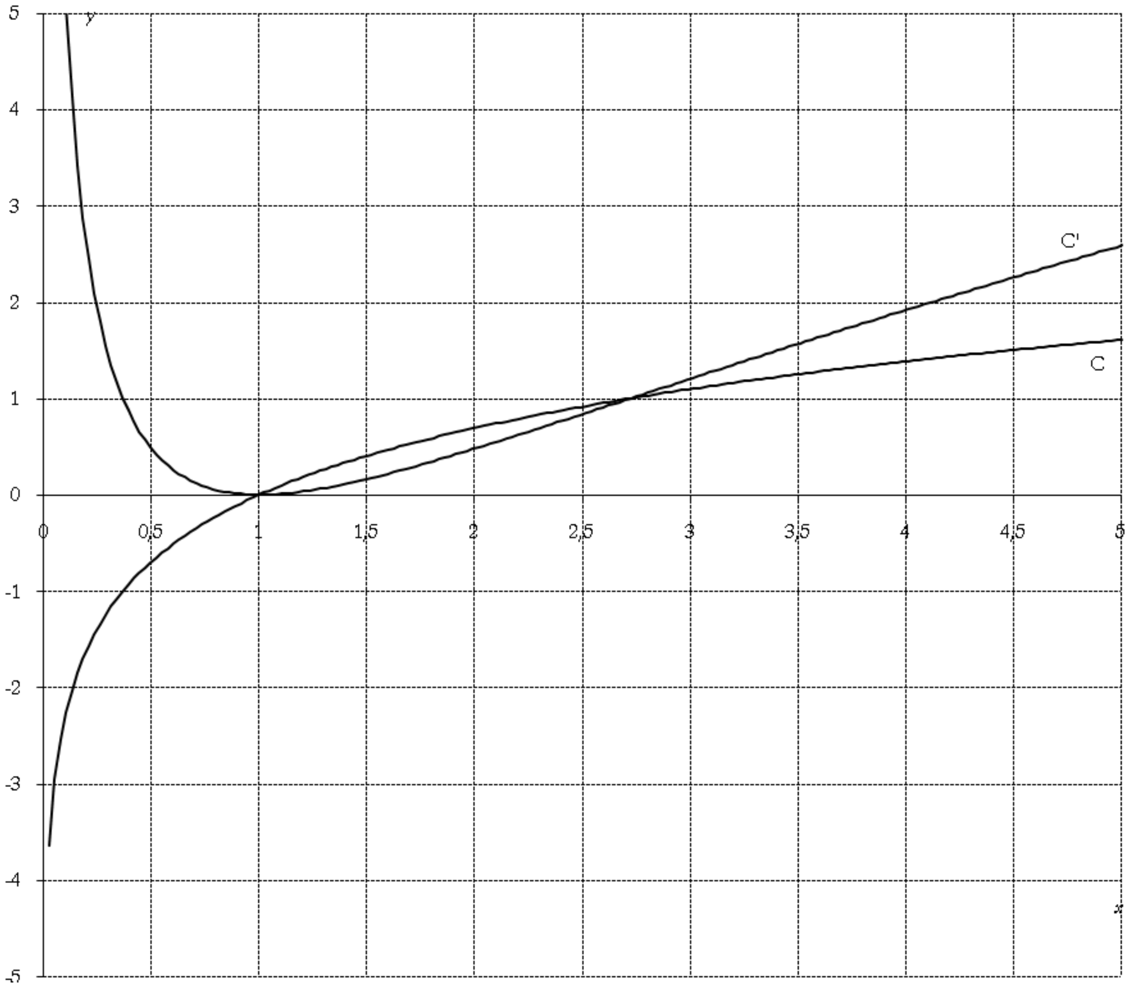
c. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

d. En déduire que, sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$, il existe deux réels *a* et *b* ($a < b$) pour lesquels la distance *MN* est égale à 1.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x dx$.

b. Vérifier que la fonction$G$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction *g* sur $]0\,;+\infty[$.

c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes C, C' et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Déterminer l'aire A en unités d'aire de cette partie du plan.



1. 24. Logarithme et calcul d'aire, Antilles, sept 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2.$$

On note (C) sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

1. a. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\,;\,+\infty\,[$ par : $\varphi(x)=f(x)-\left(4e^{-\frac{5}{4}}x-\frac{41}{8}\right)$.

a. Montrer que $\varphi'(x)=\dfrac{4\ln x-1}{x}-4e^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\varphi''(x)$.

b. Étudier le sens de variation de φ' sur $]0\ ;\ +\infty\ [$. En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty\ [$, on a $\varphi'(x) \le 0$.

c. Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$. En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

5. Tracer la courbe (C) et la droite (T). (Unité graphique : 2 cm).

Partie B - Calcul d'une aire

1. Vérifier que la fonction h, définie par $h(x) = x\ln x - x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

2. On pose $I_1 = \int_{e^{-1}}^{e^{3/2}} \ln x dx$ et $I_2 = \int_{e^{-1}}^{e^{3/2}} (\ln x)^2\, dx$.

a. Calculer I_1.

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_2 = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - 5e^{-1}$.

c. Calculer $\int_{e^{-1}}^{e^{3/2}} f(x)dx$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $e^{-1} \le x \le e^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \le y \le 0$.

1. 25. Logarithme et exponentielle

On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$ et sa courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - 1$.

b. En déduire qu'il existe un réel unique a tel que : $ae^a = 1$. Donner un encadrement de a d'amplitude 10^{-3}.

c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. a. Déterminer les limites de f aux bornes de $]0, +\infty[$.

b. Calculer la fonction dérivée f' *de* f et étudier son signe sur $]0\,;+\infty[$ en utilisant la question 1. Dresser le tableau des variations de f.

c. Montrer que f admet un minimum m égal à $a + a^{-1}$. Justifier que : $2{,}32 \le m \le 2{,}34$.

3. Donner une équation de la tangente T à C en son point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de T et de l'axe des ordonnées.

4. Tracer C et T.

1. 26. Logarithme et 2^{nd} degré

On désigne par a un réel de l'intervalle $]0\,;\pi[$ et on considère la famille de fonctions numériques f_a définies par

$$f_a(x) = \ln\left(x^2 - 2x\cos a + 1)\right).$$

On appelle C_a la représentation graphique de fa dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrez que l'ensemble de définition de f_a est $\mathbb{R}$.

2. Déterminez les limites de f_a en $+\infty$ et $-\infty$.

3. Montrez que la droite d'équation $x = \cos a$ est axe de symétrie de C_a.

4. a et a' étant deux réels distincts, montrez que C_a et $C_{a'}$ sont sécantes en un unique point que l'on précisera.

5. Calculez $f_a'(x)$ et déduisez-en son sens de variation.

6. Donnez l'allure des courbes C_a .

1\. 27. Logarithme et valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $D=\mathbb{R}-\{3\}$ par $f(x)=(x+1)\ln|x-3|$ où ln désigne la fonction logarithme népérien. C est la courbereprésentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 1 cm).

1\. a. Vérifier que si $x\in D$ alors $f'(x)=\dfrac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|$.

b. Pour x appartenant à D, calculer $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f. En déduire les variations de f'.

c. Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3.

2\. a. Montrer que f' s'annule sur $]-\infty\,;3[$ pour une seule valeur α . Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;3[$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]3\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.

2\. Etudier les limites de f aux bornes de D. Préciser les asymptotes éventuelles à C.

3\. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C et de l'axe des abcisses.

4\. Tracer la courbe C.

1\. 28. Logarithme et équa diff

Première partie

On considère la fonction numérique f définie sur $[0\,;\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x\ln\dfrac{x+2}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1\. a. Montrer que f est continue en 0.

b. f est-elle dérivable en 0 ?

c. On pose $h=\dfrac{2}{x}$ avec $(x>0)$. trouver la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

2\. a. Pour $x>0$ calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et vérifier que $f''(x)=-\dfrac{4}{x(x+2)^2}$.

b. Etudier le sens de variation de $f'(x)$ et trouver la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de $f(x)$.

3\. On appelle C la courbe représentative de $f(x)$ (unités : 4 cm). Tracer C en indiquant la tangente en O et au point A d'abcisse 2.

4\. Soit u la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{2x}{x+2}$ et H sa représentation graphique dans le même repère que C.

a. Dresser le tableau de variation de u et vérifier que pour tout $x>0$ on a $f(x)-u(x)=xf'(x)$.

En déduire la position relative de C et H. Tracer H en indiquant le point B d'abcisse 2.

b. λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à C au point d'abcisse λ rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée $u(\lambda)$. En déduire à l'aide du tracé de H la construction de la tangente à C au point d'abcisse λ. Indiquer la construction ainsi de la tangente à C au point A.

Deuxième partie

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g, définies et dérivables sur $]0,+\infty[$ et possédant la propriété suivante P : $g(x)-xg'(x)=\dfrac{2x}{x+2}$. g étant définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ on pose $G(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

1. Montrer que g possède la propriété P si et seulement si $G'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$.

2. En déduire l'ensemble (E).

1. 29. Logarithme et radical

1. La fonction g est définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$.

En utilisant les variations de g, déterminer son signe suivant les valeurs de x.

2. La fonction numérique f est définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$.

a. Démonstration de cours : démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ (en $+\infty$, on pourra poser $X=\sqrt{x}$).

c. Utiliser la question 1. pour déterminer le sens de variation de f.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que Δ est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. Construire C et Δ.

1. 30. Logarithme et primitives

Partie A

Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. On appellera C sa courbe représentative.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$. Étudier la limite de f en 0. Étudier les variations de f ; en dresser le tableau de variations.

2. Déterminer la valeur de x telle que $f(x) = 0$. Écrire l'équation de la tangente T à C en ce point.

3. Tracer C et T.

Partie B

1. Montrer qu'une primitive de $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est $x\mapsto\frac{(\ln x)^2}{2}$. En déduire l'ensemble des primitives F de f.

2. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$. Cette primitive sera appelée F_1.

Déduire de la partie A le sens de variation de F_1 ; déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, dresser le tableau de variations et donner les intersections de la courbe représentative de F_1 avec $x'Ox$. Représenter graphiquement F_1.

3. On appelle F_2 la primitive de f qui prend la valeur 0,5 pour $x = 1$. Donner l'expression de F_2.

Expliquer la construction de la courbe représentative de F_2 à partir de celle de F_1. Tracer la courbe représentative de F_2.

1. 31. Logarithme+ acc finis

Le but de ce problème est d'étudier, dans un premier temps (partie A), la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\text{ pour } x>0 \text{ et } f(0)=\frac{1}{2},$$

puis (partie B) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 cm. On désigne par C la représentation graphique de f.

I. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

1. a. Étudier le sens de variation de g.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0\ ;+\infty\ [$.

2. Montrer que, pour tout x de $[2\ ;\ 3]$, on a $g(x)<\dfrac{1}{2}$.

II. Etude de f

1. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $x=\dfrac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en 0.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.

3. Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f'(x)=g(x)$).

4. a. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=2$ (on pourra utiliser le résultat : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$).

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer dans le repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ, la courbe C et la droite D d'équation $y = x$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

1. Soit la fonction h définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que, pour tout x de I, $h'(x) < 0$.

On remarquera que $h'(x) = g(x) - 1$.

2. En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I ; on note α cette solution.

3. Montrer que, pour tout x de I, $0 < f'(x) < \dfrac{1}{2}$.

4. En déduire que, pour tout x de I, $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à I.

a. Établir les inégalités suivantes :

(1) pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$,

(2) pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

c. Déterminer n_0 entier naturel tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

En déduire alors une approximation de α à 10^{-3} près.

1. 32. Logarithme+irrationnelle+intégrales+acc finis

Soit f, définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty\ [$ par $f(x)=(1-x)\sqrt{x}$; C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty\ [$ par : $\begin{cases} g(x) = -x\ln x \text{ pour } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ représentée par la courbe C_g dans le même repère.

Partie A

1. Etudier les variations des deux fonctions *f* et *g*, déterminer leurs limites en 0 et $+\infty$.

2. La fonction g est elle-dérivable en 0 ?

3. Tracer les courbes C_f et C_g.

Partie B

On s'intéresse à la différence $f(x) - g(x)$ et on se propose d'en étudier le signe. À cet effet, on pose, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty\ [$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-g(x)}{x}$.

1. Quelle information apporte le fait de connaître le signe de $\varphi(x)$?

2. Vérifier que : $\varphi(x) = \ln x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Calculer la fonction dérivée φ' de φ et vérifier que $\varphi'(x) = -\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x\sqrt{x}}$.

Quel est le sens de variation de φ sur $]0\ ;\ +\infty\ [$? (L'étude des limites de φ aux bornes de son domaine de définition n'est pas demandée).

3. En déduire le signe de φ. Quelles conclusions en tirez-vous ?

4. Est-ce que les courbes C_f et C_g ont même tangente au point de contact ?

5. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que $|\varphi(x)| \le 10^{-1}$ pour tout x de l'intervalle $[\alpha\ ;\beta]$. Donner des valeurs approchées de α et β à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de la distance verticale entre les courbes C_f et C_g, soit $|f(x)-g(x)|$, sur l'intervalle $[\alpha\ ;\beta]$.

Partie C : Calcul d'intégrales

Pour tout réel a de l'intervalle $]0\ ;1]$ on pose :

$$\mathrm{I}(a) = \int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{J}(a) = \int_a^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

1. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}(a)$ en fonction de a. À cet effet, on pourra remarquer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{J}(a)$ en fonction de a.

3. a. Calculer : $\lim\limits_{a\to 0}(\mathrm{I}(a)-\mathrm{J}(a))$ [on admettra que $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x) = 0$].

b. Donner une interprétation géométrique de cette limite.

Partie D

On considère l'équation, définie dans $\mathbb{R}^+$: $g(x) = -24$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de la solution α de cette équation.

1. Justifier que l'équation proposée a dans R^+ une solution α et une seule et que $9 < \alpha < 11$. Vérifier que α est solution de l'équation : $x = \dfrac{24}{\ln x}$.

2. Soit h la fonction définie sur $[9\ ;11]$ par : $h(x) = \dfrac{24}{\ln x}$.

a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[9\ ;11]$, $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $[9\ ;11]$.

b. Démontrer, pour tout réel x de l'intervalle [9 ; 11], la double inégalité : $|h'(x)| \leq \frac{2}{3(\ln 3)^2} < 0{,}56$.

c. En déduire, pour tout réel x de l'intervalle [9 ; 11], l'inégalité : $|h(x)-\alpha| \leq 0{,}56|x-\alpha|$.

3. On considère la suite (u_n) définie par récurrence : $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$ pour tout entier n.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle [9 ; 11], puis que l'inégalité $|u_{n+1}-\alpha| \leq 0{,}56|u_n-\alpha|$ est vérifiée.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, l'inégalité : $|u_n-\alpha| \leq 2(0{,}56)^n$ est vérifiée. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

c. Trouver le plus petit entier naturel pour lequel on a l'inégalité : $2(0{,}56)^n < 0{,}01$.

Soit n_0 cet entier : que représente pour α le terme u_{n_0} correspondant ?

À l'aide de votre calculatrice donner une approximation décimale à 10^{-2} près de u_{n_0}.

1. 33. Logarithme+asymptote+acc finis

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit f l'application définie sur]0 ; $+\infty$ [par $f(x) = x - 4 - \frac{\ln x}{4}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f aux bornes de] 0 ; $+\infty$ [.

Justifier que C_f admet une asymptote et en donner une équation.

2. a. Étudier les variations de f sur]0 ; $+\infty$ [et dresser son tableau de variations.

b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à [3 ; 4].

c. Tracer C_f.

3. Soit D le domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.

a. Calculer, pour $x > 0$, la dérivée de $x \to x \ln x$.

b. En utilisant le résultat du a., exprimer l'aire en cm^2 du domaine D à l'aide d'un polynôme du second degré en α.

Partie B

Dans cette partie, I désigne l'intervalle [3 ; 4].

1. Soit g l'application définie sur]0 ; $+\infty$ [par $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$.

a. Montrer que α est solution de l'équation : $g(x) = x$.

b. Montrer que l'image de l'intervalle I par g est incluse dans I.

c. Montrer que, pour tout élément x appartenant à I : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. En utilisant B – 1. b., montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, u_n est élément de I.

b. Prouver que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{12}|u_n-\alpha|$. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n : $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{12^n}$. Quelle est la limite de la suite u_n ?

c. Résoudre sur]0 ; $+\infty$ [l'inéquation : $\frac{1}{12^x} \leq 10^{-3}$. En déduire que u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

1. 34. Famille de fonctions ln + aire

Soit k un nombre réel. On considère la fonction f_k définie sur [0 ; 1] par

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx \text{ si } x > 0 \text{ et } f_k(0) = 0.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

On note I, J et L les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1).

Première partie : Étude des fonctions f_k

A. Étude et représentation de f_0

Dans cette question $k = 0$.

1. Signe de la dérivée

a. Calculer la dérivée f_0' de f_0 sur]0 ; 1] et montrer que $f_0'(x)$ peut s'écrire $f_0'(x) = (\ln x)(\ln x - 2)$.

b. Déterminer les solutions de l'équation $f_0'(x) = 0$ sur]0 ; 1].

c. Étudier le signe de f_0' sur]0 ; 1].

2. Étude à l'origine

a. Déterminer la limite de $\dfrac{\ln u}{\sqrt{u}}$, puis de $\dfrac{(\ln u)^2}{u}$ lorsque u tend vers $+\infty$.

b. En déduire que $x(\ln x)^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, puis que f_0 est continue en 0.

c. Déterminer la limite de $\dfrac{f_0(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0. En déduire la tangente en O à la courbe C_0.

3. Tracé de la courbe C_0

a. Dresser le tableau des variations de f_0.

b. Tracer la courbe C_0.

B. Étude de f_k

1. Dérivée de f_k

a. Calculer $f_k'(x)$ sur]0 ; 1].

b. Soit A_k le point de C_k d'abscisse 1. Montrer que la tangente T_k à C_k au point A_k est la droite (OA_k).

2. Étude à l'origine

a. Établir que f_k est continue en 0.

b. Déterminer la tangente à C_k en O.

On ne demande pas d'étudier les variations de f_k.

C. Étude et représentation de f_1 et $f_{\frac{1}{2}}$

1. Étude de f_1 et tracé de C_1

a. Prouver que, pour tout $x \in$]0 ; 1], $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes C_0 et C_1.

c. Établir le tableau de variation de f_1 et tracer C_1 sur le même graphique que C_0 en précisant le coefficient directeur de la tangente T_1 à C_1 au point A_1.

2. Étude de $f_{\frac{1}{2}}$ et tracé de $C_{\frac{1}{2}}$

a. Prouver que, pour tout x de [0 ; 1], $f_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{f_0(x) + f_1(x)}{2}$.

b. En déduire une construction de $C_{\frac{1}{2}}$ à partir de C_0 et C_1 et tracer $C_{\frac{1}{2}}$ sur le même graphique que C_0 et C_1 en précisant la tangente $T_{\frac{1}{2}}$ à $C_{\frac{1}{2}}$ au point $A_{\frac{1}{2}}$.

Deuxième partie : Partage du carré OILJ en quatre parties de même aire

Soit α un nombre réel tel que $0<\alpha\leq 1$.

1. Calcul d'une intégrale : on pose $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{1} x(\ln x)^2\,dx$.

a. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que $I(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2-\int_{\alpha}^{1} x\ln x\,dx$

b. En effectuant à nouveau une intégration par parties, prouver que : $I(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}(\ln\alpha)^2+\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha+\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2}{4}$.

c. Déterminer la limite I de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

2. Calcul d'aires

a. On pose $S_k(\alpha)=\int_{\alpha}^{1} f_k(x)\,dx$.

Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de α. En déduire la limite S_k de $S_k(\alpha)$ quand α tend vers 0.

On admettra que cette limite représente l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine plan limité par la courbe C_k, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$.

b. En déduire que les courbes C_0, $C_{\frac{1}{2}}$ et C_1 partagent le carré OILJ en quatre parties de même aire.

1. 35. Fonction *ln* et rotation

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

A. Etude d'une fonction *f* et de sa courbe représentative (C).

On considère la fonction *f*, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

1. Calculer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.

2. Etudier le sens de variation de *f* sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Soit (C) la courbe représentative de *f* dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ et *A* le point de (C) d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de *A*. Soit *B* le point de (C) d'abscisse $\frac{5}{4}$, *P* le projeté orthogonal de *B* sur l'axe $(O;\vec{i})$ et *H* le projeté orthogonal de *B* sur l'axe $(O;\vec{j})$.

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points *B*, *P* et *H*. Placer les points *A*, *B*, *P* et *H* dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et représenter la courbe (C).

B. Utilisation d'une rotation.

Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A tout point *M* du plan d'affixe *z*, la rotation *r* associe le point *M* ' d'affixe *z*'.

1. a. Donner *z*' en fonction de *z*.

On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' réels), exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

b. Déterminer les coordonnées des points *A'*, *B'* et *P'* images respectives des points *A*, *B* et *P* par la rotation *r*.

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-2x}+2e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à (C), son image M' par r appartient à (Γ).

On admet que lorsque le point M décrit (C), le point M' décrit (Γ).

b. Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe (Γ) (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

C : Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire **A** du domaine plan D limité par les segments $[AO]$, $[OH]$ et $[HB]$ et l'arc de courbe d'extrémités B et A.

b. On pose $\mathrm{I}=\int_{5/4}^{3}\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)dx$. Trouver une relation entre **A** et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

1. 36. Etude de ln(ch$x$) et de son intégrale

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 3 cm.

A. Étude de f

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$. En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite D d'équation $y=x$.

c. Étudier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote D.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. Construire la courbe (C) et l'asymptote D,

B. Intégrales liées à f

Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on pose $F(x)=\int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit a un réel positif. En utilisant la partie A , donner une interprétation géométrique de $F(a)$.

2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. Soit a un réel strictement positif. Démontrez que :

Pour tout t de $[0\,;\,a]$, $\frac{1}{1+a}\le\frac{1}{1+t}\le 1$. En déduire que $\frac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$.

4. Soit x un réel positif. Déduire de la question 3. que $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt\le F(x)\le\int_0^x e^{-2t}dt$ puis que

$$\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x})\le F(x)\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

5. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$, existe et est un nombre réel noté L.

Etablir que $\frac{1}{2}\ln 2\le L\le\frac{1}{2}$.

6. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt$.

a. On considère la fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty\ [$ par $h(t)=\ln(1+e^{-2t})$. Étudier le sens de variation de h.

b. Démontrer que pour tout naturel n : $0 \le u_n \le \ln(1+e^{-2n})$.

c. Déterminer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Pour tout entier naturel n on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$. Exprimer S_n à l'aide de F et de n. La suite (S_n) est–elle convergente ? Dans l'affirmative quelle est sa limite ?

1. 37. Th. des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty\ [$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que f est dérivable sur$]0\ ;\ +\infty\ [$ et calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $u(x)=\ln x+x-3$.

a. Etudier les variations de u.

b. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3]. Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.

c. Etudier le signe de $u(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

4. a. Etudier les variations de f.

b. Exprimer $\ln\alpha$ comme un polynôme en α. Montrer que $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}

5. a. Etudier le signe de $f(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty\ [$.

b. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm..

1. 38. Étude + suite, La Réunion 2010, 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=1+\ln(1+x)$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$. On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser le tableau de variations de la fonction g.

d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle [2 ; 3].

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \le u_n \le \beta$.

2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

1. 39. Fonction+suite, Bac C, Paris, 1990

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x de $]0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{x+1+\ln x}{\left(x+1\right)^2}$.

2. La fonction φ est définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par $\varphi(x) = x+1+\ln x$. Etudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β. Etudier le signe de φ.

3. En déduire les variations de f, étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

4. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique que l'on notera α_n. On cherche maintenant à étudier la suite $\left(\alpha_n\right)$.

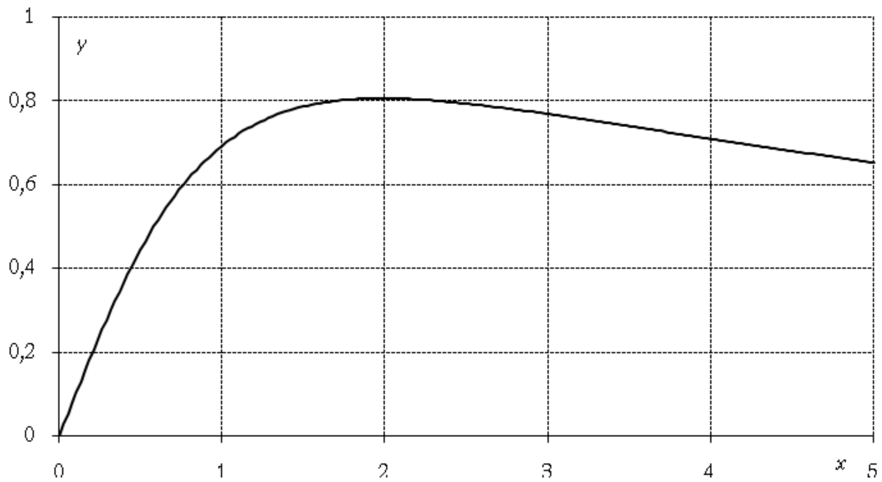
5. Montrer que, pour tout entier $n > 0$, $f(e^n) < n$. En déduire que $\alpha_n > e^n$ et la limite de $\left(\alpha_n\right)$

6. Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$.

En déduire la limite de $\dfrac{\alpha_n}{e^n}$.

1. 40. Dérivabilité, Centres étrangers, 2000, extrait

La fonction f est définie sur $[0\,;+\infty\,[$ par $f(0) = 0$ et si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$. Sa courbe dans le plan rapporté à un repère d'origine O, est donnée ci-dessous.



1. Montrer que, pour tout réel positif t, $0 \le \ln(1+t) \le t$. En déduire la continuité de f en 0.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. En déduire la dérivabilité de f en 0.

1. 41. Limites+courbes, D'après Japon, 1997

A. On considère la fonction f_1 définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_1(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, et on appelle (C_1) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité 2 cm sur (Ox), 10 cm sur (Oy).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x)$. Que peut-on en déduire pour (C_1) ?

2. Etudier les variations de f_1, donner son tableau de variation.

3. Déterminer une équation de la tangente T à (C_1) en son point d'abscisse 1.

B. On considère la fonction f_2 définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_2(x)=\frac{\ln^2 x}{x^2}$, et on appelle (C_2) sa courbe représentative dans même repère que (C_1).

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$. Que peut-on en déduire pour (C_2) ?

2. Etudier les variations de f_2, donner son tableau de variation.

3. Etudier le signe de $f_1(x)-f_2(x)$, en déduire la position relative de (C_1) et (C_2).

4. Tracer T, (C_1) et (C_2).

1. 42. Equations

On pose $P(X)=2X^3+7X^2+2X-3$.

a. Calculer $P(-1)$, en déduire une factorisation de P.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$.

c. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de :

$$2x^6+7x^4+2x^2-3=0$$

$$2\ln^3 x+7\ln^2 x+2\ln x-3=0$$

$$\ln(2x+3)+\ln(x^2+2x+2)=\ln(8x+9)$$

1. 43. Paramètre+aire+équation, Am. du Nord 1998

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{1+n\ln x}{x^2}$.

Partie A

I. Etude des fonctions f_n

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$.

2. Résoudre l'équation $f_n'(x)=0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$.

3. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.

4. Etablir le tableau de variation de f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II. Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 5 cm. On note C_n la courbe représentative de f_n dans ce repère.

1. Tracer C_2 et C_3.

2. Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n.

3. Expliquer comment il est possible de construire la courbe de C_4 à l'aide de C_2 et C_3. Tracer C_4.

Partie B : Calculs d'aires

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

2. En déduire l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par les courbes C_n et C_{n+1} et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

3. On note A_n l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. Calculer A_2. Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation géométrique de sa raison. Exprimer A_n en fonction de n.

Partie C : Etude sur l'intervalle]1 ; $+\infty$ [de l'équation $f_n(x)=1$

Dans toute la suite on prendra $n \geq 3$.

1. Vérifier que pour tout n, $e^{\frac{n-2}{2n}}>1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)>1$. En déduire que l'équation $f_n(x)=1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

2. On pose pour $t \geq 1$, $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$. Etudier les variations de φ. En déduire que pour tout t appartenant à $]1\,;\,+\infty[$, $\varphi(t)\leq\frac{1}{e}$, puis que pour tout $n\geq 3$, $f_n(n)<1$.

3. Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ a exactement une solution α_n sur $\left]e^{\frac{n-2}{2n}},n\right[$. Combien l'équation $f_n(x)=1$ a-t-elle de solutions sur $]0\,;+\infty\,[$?

Calculer $f_n\left(\sqrt{n}\right)$ et montrer que pour tout $n\geq e^2$, $f_n\left(\sqrt{n}\right)>1$. En déduire que pour $n\geq 8$ on a $\sqrt{n}<\alpha_n<n$ et donner la limite de la suite (α_n).

1. 44. Intégrales

On appelle f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Quelles sont les conséquences pour la courbe représentative de f ?
2. Etudier les variations de f.
3. Calculer $\int_1^e f(x)dx$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ puis $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.
5. En déduire le calcul de $\int_1^e f^2(x)dx$.

1. 45. Ln et intégrale

On appelle f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x)=(x+1)\ln x-1$, et C sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à C.

2. a. Calculer la dérivée f' de f, puis la dérivée f'' de f', montrer que $f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

b. Etudier le signe de f'', calculer $f'(1)$ et en déduire que pour tout x, $f'(x) \geq 2$.

c. Préciser le sens de variation de f.

3. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) + 1 \geq 2(x - 1)$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution a sur $[1\,;\,2]$. Donner à la calculatrice un encadrement de a à 10^{-2} près.

5. Tracer C.

6. a. En remarquant que $\frac{(x+1)^2}{x}=x+2+\frac{1}{x}$, donner une primitive de $\frac{(x+1)^2}{x}$.

b. En déduire à l'aide d'une intégration par parties le calcul de $\int_1^e f(x)dx$.

1. 46. Limites, Bac S, Antilles, 1997

On appelle f la fonction définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

1. Déterminer la dérivée de f, étudier ses variations.

2. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

3. g est définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par $g(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Déterminer la dérivée de g et étudier son signe à l'aide de la question précédente.

4. Vérifier que $g=h\circ k$, avec $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$, $k(x)=\frac{1}{x}$. En déduire les limites de g en 0 et en $+\infty$, et dresser le tableau de variation de g.

1. 47. Un exo de sup

On appelle f la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ et $f(0) = 0$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

2. Montrer que l'on a pour tout $x > 0$ $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}$. En déduire que f est continue en 0.

3. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ et que $f\,'(x)$ est du signe de $1-\ln x$. En déduire les variations de f. Etudier la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de f.

4. Donner une équation de la tangente T à la courbe C de f en son point d'abscisse 1. Montrer que pour tout réel strictement positif x on a $\frac{\ln x}{x}\le\ln x$. En déduire la position de C par rapport à T (on sera amené à remarquer que $x=e^{\ln x}$).

5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Que peut-on en déduire pour f et C ?

6. Donner l'allure de C en faisant figurer tous les résultats précédents.

1. 48. Ln et exp (2)

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm).

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. Montrer que C admet une asymptote D d'équation : $y = -x$. Préciser la position de D par rapport à C.

3. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0. Tracer D, T et C.

4. Soit x_0 un nombre réel non nul. On note M et N les points de C d'abscisses respectives x_0 et $-x_0$.

a. Vérifier que : $f(x_0)-f(-x_0) = -x_0$.

b. Calculer le coefficient directeur de la droite (MN). Que peut-on en conclure ?

c. Montrer que $f\,'(x_0) + f\,'(-x_0) = -1$. En déduire que les tangentes à C en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

d. Illustrer sur la courbe C les résultats précédents en prenant $x_0 = 1$.

B. On se propose dans cette partie d'étudier la suite de nombres réels (u_n), définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1+\dfrac{1}{e} \\ u_{n+1} = u_n\left(1+\dfrac{1}{e^{n+1}}\right) \text{ pour tout entier } n \text{ de } \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

1. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $u_n > 0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $\ln u_n = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ (**1**)

2. a. Etudier les variations des fonctions g et f définies sur $[0\,;+\infty[$ respectivement par :

$$g(t) = \ln(1+t) - t \text{ et } h(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

b. En déduire que, pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$.

c. En déduire que pour tout réel x : $e^{-x} - \dfrac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$ (**2**)

3. a. Soit a est un réel strictement supérieur à 1. Calculer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^n}$$

et montrer que la suite (S_n) admet une limite que l'on déterminera..

b. On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $A_n = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e^3} + \ldots + \dfrac{1}{e^n}$ et $B_n = \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e^4} + \dfrac{1}{e^6} + \ldots + \dfrac{1}{e^{2n}}$.

A l'aide des relations (**1**) et (**2**), montrer que : $A_n - \dfrac{1}{2}B_n \leq \ln u_n \leq A_n$.

c. En déduire que la suite $(\ln u_n)$ est majorée.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

b. On admet que si (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers L et L' et si, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $a_n \leq b_n$ alors $L \leq L'$. Montrer que : $\dfrac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \dfrac{1}{e-1}$. En déduire une valeur approchée de l à 0,1 prés.

1. 49. Distance minimum

Soit C la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan. On se propose d'étudier le minimum de la distance de C à l'origine O du repère.

1. Tracer soigneusement la courbe C sur l'intervalle $]0\,;2]$ en choisissant 5 cm comme unité. Placer le point A de C qui semble être le plus proche de l'origine du repère. Quelle semble être la plus petite distance entre O et un point de C ?

2. Soit M un point de C d'abscisse x. Exprimer la distance OM en fonction de x.

3. Justifier que les fonctions $x \mapsto OM$ et $f : x \mapsto x^2 + (\ln x)^2$ ont les mêmes variations.

4. f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

a. Calculer sa dérivée $f'(x)$ et montrer que le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est celui de $g(x) = x^2 + \ln x$.

b. Etudier les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, sur $]0\,;\,+\infty[$, une solution unique notée α dont on donnera une approximation décimale à 10^{-3} près.

d. En déduire le signe de $f'(x)$ puis l'existence pour f d'un minimum unique.

5. a. Déterminer alors le point M_0 pour lequel la distance OM est minimale et montrer que cette distance vaut $\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près et comparer à la valeur obtenue graphiquement.

b. Montrer que la droite (OM_0) et la tangente à C en M_0 sont perpendiculaires.

1. 50. Ln et exp (3)

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction définie sur [0 ; $+\infty$ [par $f_k(x)=\ln(e^x+kx)-x$.

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unités graphiques 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnées).

Partie A

On considère la fonction g définie sur [0 ; $+\infty$ [par $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1. Etudier le sens de variation de g.

2. En déduire que pour tout réel a positif, on a $\ln(1+a)\le a$.

Partie B

1. Montrer que pour tout $x\ge 0$, $f_k(x)=\ln(1+k\dfrac{x}{e^x})$.

En déduire la limite de f_k en $+\infty$ et l'existence d'une asymptote.

2. Calculer f_k' et dresser le tableau de variation de f_k en fonction de k.

3. Montrer que pour tout $x\in\left[0\,;+\infty\right[$, on a $f_k(x)\le\dfrac{k}{e}$.

4. Déterminer une équation de (T_k) la tangente à (C_k) au point O.

5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.

Etudier la position relative de (C_p) et (C_m).

6. Montrer que l'équation $\ln\left(1+\dfrac{2x}{e^x}\right)=0,5$ admet une seule solution α sur]1 ; $+\infty$ [. Donner un encadrement de α à 10^{-2}.

7. Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O.

1. 51. Equation+intégrale, N. Calédonie 11/2008

5 points

Partie A

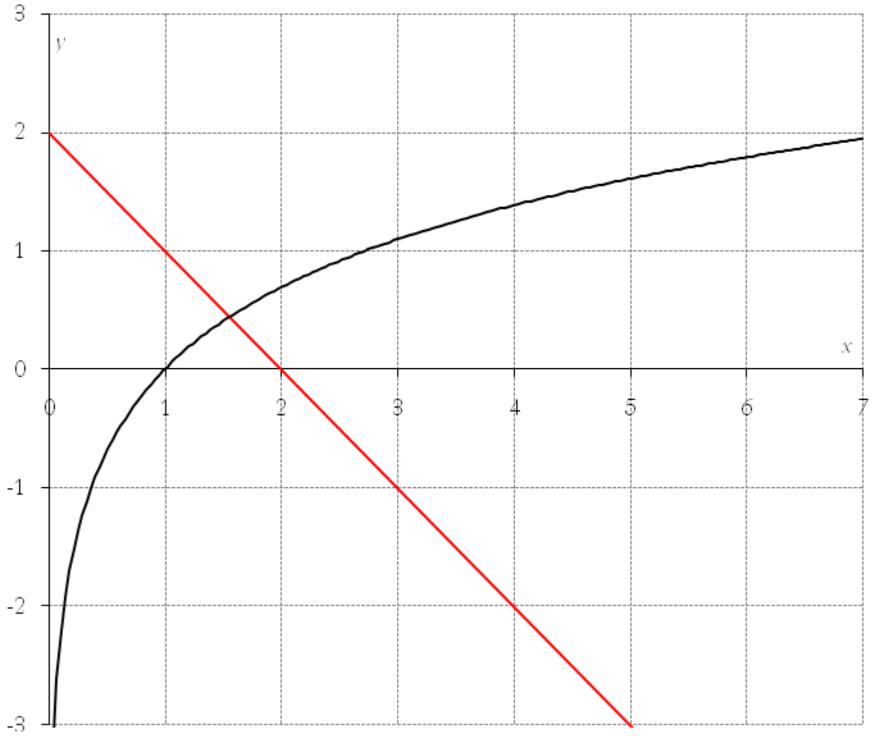
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \ln x - 2 + x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.



Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

On considère sur le graphique ci-dessus, la courbe représentative C de la fonction ln, ainsi que la droite D d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

On considère l'aire en unités d'aire, notée **A**, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe C et de la droite D.

1. Déterminer les coordonnées du point E.

2. Soit $I = \int_1^{\alpha} \ln x dx$.

a. Donner une interprétation géométrique de I.

b. Calculer I , en fonction de α , à l'aide d'une intégration par parties.

c. Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.

3. Calculer l'aire **A** en fonction de α .