Exercices spécialité géométrie

1. Démonstrations

1-a : Toute similitude de rapport k (>0) est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie

Soit s une similitude de rapport k positif et h une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$. La composée $h\circ s$ est alors une similitude de rapport $k.\frac{1}{k}=1$, c'est donc une isométrie f.

On a donc $h\circ s=f \Leftrightarrow h^{-1}\circ h\circ s=h^{-1}\circ f \Leftrightarrow s=h^{-1}\circ f$ où l'homothétie h^{-1} a pour rapport k.

1-b : Les isométries du plan sont les transformations $z' = e^{i\theta}z + b$ ***ou*** $z' = e^{i\theta}\overline{z} + b$

Il est immédiat de montrer que ces deux types de transformations sont des isométries ; par exemple pour $z' = e^{i\theta}\overline{z} + b$:

$M(z_1) \to M'(z_1')$ et $N(z_2) \to N'(z_2')$, soit $M'N' = |z_2' - z_1'| = |e^{i\theta}||\overline{z}_2 - \overline{z}_1| = 1|\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = MN$.

Il est plus délicat de montrer que toute isométrie est de cette forme : soit f une isométrie du plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) ; on note (O', I', J') le repère image par f : ce repère est également orthonormal d'après les propriétés des isométries (conservation des longueurs et des angles, les isométries *positives* conservant le sens des angles, les iso. *négatives* les renversant).

Prenons $M(x ; y)$, on a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$, $M'(x' ; y')$ son image par f : $\overrightarrow{O'M'} = x'\overrightarrow{O'I'} + y'\overrightarrow{O'J'}$.

Calculons les produits scalaires :

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OI} = x\overrightarrow{OI}^2 + y\overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OI} = x$, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OJ} = x\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} + y\overrightarrow{OJ}^2 = y$, de même $\overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'I'} = x'$, $\overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'J'} = y'$.

Mais comme les distances et les angles sont conservés, on a

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OI} = OM.OI.\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OI}\right) = O'M'.O'I'.\cos\left(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'I'}\right) = \overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'I'}$$

ainsi que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'J'}$ d'où $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ et $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$.

Passons maintenant en complexes : prenons dans le repère (O, I, J) les affixes : $O(0) \to O'(b)$, $\overrightarrow{O'I'}(u)$, $\overrightarrow{O'J'}(v)$ et $M(z = x + iy)$.

* $\overrightarrow{O'I'}$ est normé donc $|u| = 1 \Leftrightarrow u = e^{i\theta}$, θ réel quelconque.

* $\overrightarrow{O'J'}$ est normé et orthogonal à $\overrightarrow{O'I'}$ donc $v = iu = ie^{i\theta}$ ou $v = -iu = -ie^{i\theta}$.

* $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'} \Leftrightarrow z' - b = xu + yv$ d'où les deux possibilités :

$$\begin{cases} z' - b = xe^{i\theta} + iye^{i\theta} = e^{i\theta}z \\ z' - b = xe^{i\theta} - iye^{i\theta} = e^{i\theta}\overline{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = e^{i\theta}z + b \\ z' = e^{i\theta}\overline{z} + b \end{cases}.$$

1-c : Caractérisation complexe d'une similitude

Les deux résultats précédents donnent immédiatement que si s est une similitude de rapport $k > 0$, elle est de la forme $z \xrightarrow{f} z' = e^{i\theta}z + b \xrightarrow{h} kz' + \beta = ke^{i\theta}z + kb + \beta = ke^{i\theta}z + c$

ou de la forme $z \xrightarrow{f} z' = e^{i\theta}\overline{z} + b \xrightarrow{h} kz' + \beta = ke^{i\theta}\overline{z} + kb + \beta = ke^{i\theta}\overline{z} + c$.

En fait $ke^{i\theta}$ est un complexe a quelconque de même que c, ce qui donne $z' = az + c$ ou $z' = a\overline{z} + c$.

1-d : Propriétés des similitudes

* Les similitudes de la forme $z' = az + b$ sont associées aux isométries positives, elles conservent le sens des angles : prenons trois points M, N, P et leurs images M', N', P' ;

on a alors $\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right) = \arg\dfrac{p' - m'}{n' - m'} = \arg\dfrac{(ap + b) - (am + b)}{(an + b) - (am + b)} = \arg\dfrac{p - m}{n - m} = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

* Les similitudes de la forme $z' = a\overline{z} + b$ sont associées aux isométries négatives, elles renversent le sens des angles : prenons trois points M, N, P et leurs images M', N', P' ;

$\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right) = \arg\dfrac{p' - m'}{n' - m'} = \arg\dfrac{(a\overline{p} + b) - (a\overline{m} + b)}{(a\overline{n} + b) - (a\overline{m} + b)} = \arg\dfrac{\overline{p - m}}{\overline{n - m}} = \arg\overline{\left(\dfrac{p - m}{n - m}\right)} = -\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

* Conservation du barycentre : soit G le barycentre de $\{(M,\alpha);(N,\beta)\}$, M' et N' les images de M et N, alors $m'=am+b$, $n'=an+b$, $g=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n)\to g'=a\left[\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n)\right]+b=\frac{a}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n)+b$; montrons que G' est le barycentre de $\{(M',\alpha);(N',\beta)\}$:

$$g'=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha m'+\beta n')=\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha am+\alpha b+\beta an+\beta b)=\frac{a}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n)+\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha b+\beta b)=ag+b\ .$$

En fait cette propriété est suffisante puisque l'associativité du barycentre fait que ceci sera valable pour un nombre quelconque de points.

Par ailleurs ceci permet de montrer d'autres propriétés simples comme la conservation du parallélisme.

1-e : Une similitude ayant deux points fixes distincts est soit l'identité, soit une symétrie axiale

Si notre similitude s'écrit $z'=az+b$, elle a soit un seul point fixe $z=\frac{b}{1-a}$, soit une infinité lorsque $a=1$ et $b=0$; c'est donc l'identité si elle en a plus que un.

Si elle s'écrit $z'=a\bar{z}+b$ et qu'elle a comme points fixes u et v, on a :

$$\begin{cases}u=a\bar{u}+b\\ v=a\bar{v}+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=a\bar{u}+b\\ u-v=a(\bar{u}-\bar{v})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=u-\bar{u}\dfrac{u-v}{\bar{u}-\bar{v}}=\dfrac{v\bar{u}-u\bar{v}}{\bar{u}-\bar{v}}\\ a=\dfrac{u-v}{\bar{u}-\bar{v}}\end{cases}\Rightarrow z'-u=\frac{u-v}{\bar{u}-\bar{v}}(\bar{z}-\bar{u})\ .$$

Cette dernière écriture est celle d'une réflexion d'axe (uv), ce que le lecteur vérifiera aisément…

1-f : Forme réduite d'une similitude directe

Une similitude directe s (avec a différent de 1, qui n'est donc pas une translation) a un point fixe : ω, seul point tel que $\omega=a\omega+b\Leftrightarrow\omega=\frac{b}{1-a}$.

On a alors $\begin{cases}z'=az+b\\ \omega=a\omega+b\end{cases}\Rightarrow z'-\omega=a(z-\omega)=ke^{i\theta}(z-\omega)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\arg\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}=\theta(2\pi)\\ \dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=k\end{cases}$.

s est donc la composée d'une homothétie de rapport k et d'une rotation d'angle θ, les deux de centre $\Omega(\omega)$.

Remarquez que si vous tombez dans vos calculs sur un rapport négatif, il suffit de rajouter π à θ pour revenir à un rapport positif : $-ke^{i\theta}=e^{i\pi}ke^{i\theta}=ke^{i(\theta+\pi)}$.

1-g : Propriété : « étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que A ≠ B et A' ≠ B', il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' ».

Avec tous les résultats précédents c'est un jeu d'enfant :

on a les affixes a, a', b et b'. Si on a une similitude directe, celle-ci s'écrit $z'=\alpha z+\beta$; il suffit donc de trouver α et β en fonction de a, a', b et b'.

$$\begin{cases}A\to A'\\ B\to B'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=\alpha a+\beta\\ b'=\alpha b+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=\alpha a+\beta\\ b'-a'=\alpha(b-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{b'-a'}{b-a}\\ \beta=a'-\alpha a\end{cases};$$

c'est tout.

1\. 1. Exercice

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0},\overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

– A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;

– B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. a. **Démonstration de cours**. Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1.

b. Soit s cette similitude : préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Démontrer que le triangle A_0B_0 est isocèle en Ω.

c. Calculer la distance A_0B_4.

d. Démontrer que $\Omega A_0 = 4\Omega B_4$.

e. En déduire l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$.

1. 2. Exercice

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

– A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;

– B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A_0 en A_1.

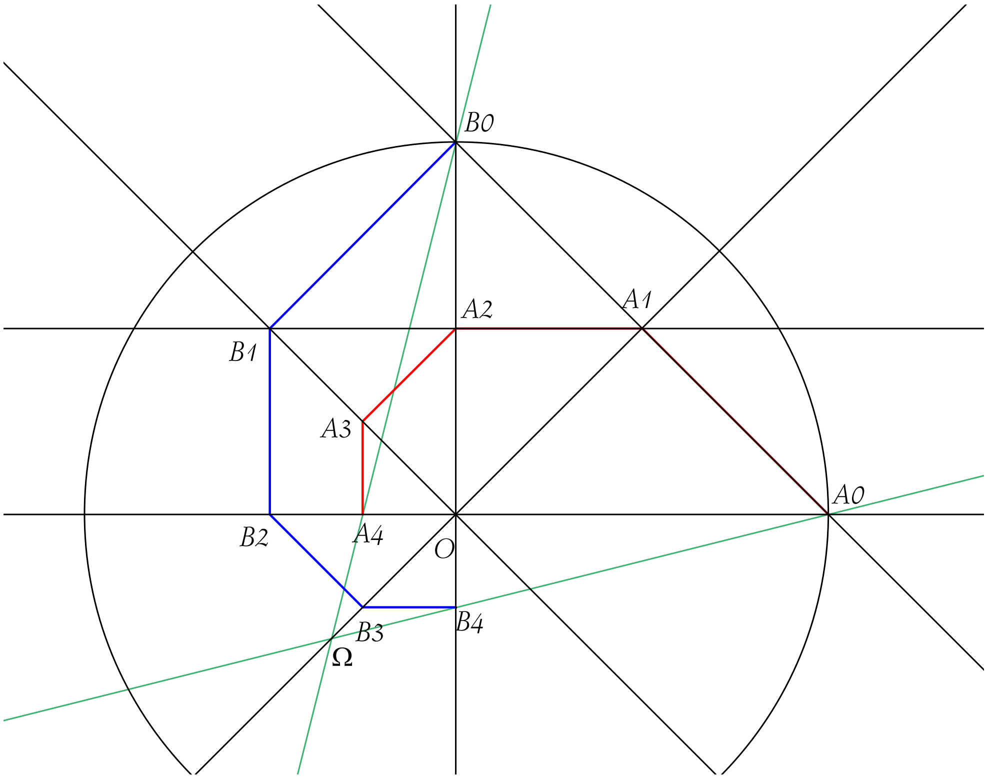
a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s, puis montrer que la similitude s transforme B_0 en B_1.

b. Démontrer que pour tout entier n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$ (tout élément de réponse, par exemple l'exposé d'une méthode ou la détermination d'une valeur approchée, sera pris en compte).

Correction



2. a. Evident : angle = $\frac{\pi}{4}$, rapport = $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA_0}\right) = \frac{\pi}{4}$, la symétrie par rapport à $(OB_0) = (O, \vec{j})$ donne $\left(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OA_3}\right) = \left(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OB_1}\right) = \frac{\pi}{4}$; comme $OB_1 = OA_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} OA_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} OB_0$, le rapport est encore $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. Comme on répète la même séquence d'opérations à chaque fois, la transformation qui envoie A_0 sur A_1 enverra A_n sur A_{n+1}, et pareil pour B_n et B_{n+1}. Si on ne se suffit pas de cet argument, on peut reprendre tout, mais c'est une perte de temps…

3. a. Si on prend le repère $\left(O\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{OA_0}, \frac{1}{4}\overrightarrow{OB_0}\right)$, le point A_0 a pour affixe 4, A_1 a pour affixe $4\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$, etc. d'où A_n : $4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}}$; les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si

$$\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_p}\right) = 0[\pi] \Leftrightarrow \arg\frac{z_p}{z_n} = 0[\pi] \Leftrightarrow n\frac{\pi}{4} - p\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n - p = 4k,\ k \in \mathbb{Z},$$

soit lorsque les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. Le plus simple (lorsqu'on n'a pas d'indication, sinon reprendre la méthode proposée dans l'exercice précédent) semble encore de déterminer les coordonnées de Ω en cherchant l'équation de (A_0B_4) puis en coupant par $(y = x)$; Ω est sur cette droite pour des raisons de symétrie évidentes.

$A_0(4\,;0)$, B_4 a pour ordonnée l'abscisse de A_4, soit $4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 e^{i4\frac{\pi}{4}} = -1$; la droite a pour équation $\begin{vmatrix} x-4 & -4 \\ y-0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + 4 + 4y = 0$ d'où Ω a pour coordonnées $\left(-\frac{4}{3}\,;-\frac{4}{3}\right)$; on calcule la distance $\Omega A_0 = \sqrt{\left(4+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{17}}{3}$, l'aire du triangle est donc

$$2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}A_0B_0\times\Omega A_0\right)=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{17}=\frac{8}{3}\sqrt{34}.$$

2. Exercices

2. 3. Similitude + ROC, La Réunion 2010

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Prérequis : on rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z'=\alpha z+\beta$ où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.

Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. On considère le point C tel que $ABCD$ est un carré.

Soit E le milieu du segment $[AD]$, on considère le carré $EDGF$ tel que $\left(\overrightarrow{ED}\,;\overrightarrow{EF}\right)=\frac{\pi}{2}[\bmod 2\pi]$.

1. a. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.

b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.

c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.

2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.

a. Déterminer son rapport k et son angle θ.

b. Donner l'écriture complexe de cette similitude.

c. Déterminer le centre Ω de la similitude directe s.

2. 4. Translation et rotation, France 2010

Dans tout l'exercice, $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $z'=-\bar{z}+2$.

a. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1+i\sqrt{3}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

c. Déterminer l'image par la transformation T du cercle C de centre O et de rayon 1.

2. C' désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.

a. Construire le point A' appartenant au cercle C' tel que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O'A'}\right)=\frac{\pi}{3}[\bmod 2\pi]$.

b. À tout point M du cercle C d'affixe z, on associe le point M' du cercle C' d'affixe z' tel que : $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}\right)=\frac{\pi}{3}[\bmod 2\pi]$.

Déterminer le module et un argument de $\frac{z'-2}{z}$. En déduire que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}z}+2$.

c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$. Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle C ?

2. 5. Similitudes, Centres étrangers 2010

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives : $a=1+i$, $b=-1+2i$, $c=2+3i$, $m=7-5i$, $p=9+i$.

1. a. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

b. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.

c. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.

2. Une similitude directe

Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

a. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est : $z'=\left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i\right)z+\frac{23}{5}+\frac{9}{5}i$.

b. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.

c. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

3. Une similitude indirecte

Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est : $z'=2i\,\overline{z}+3-3i$.

a. Vérifier que : $s'(A)=N$, $s'(B)=M$, $s'(C)=P$.

b. Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k=1-i$.

c. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2. On pose : $f=s'\circ h$.

Déterminer les images des points K et J par la transformation f. En déduire la nature précise de la transformation f.

d. Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

2. 6. Similitude, Asie 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On considère les points B, C et H d'affixes respectives : $b=5i$, $c=10$ et $h=2+4i$.

Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Étude de la position du point H

a. Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).

b. Calculer $\frac{h}{h-c}$, et en déduire que $\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2. Étude d'une première similitude

a. Calculer les rapports : $\frac{BH}{AH}$, $\frac{BA}{AC}$, $\frac{AH}{CH}$.

b. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

c. Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. Étude d'une seconde similitude

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On note S_2 la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=(-1-2i)\overline{z}+10$.

Démontrer que S_2 est composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Δ). Préciser (Δ).

4. Étude d'une composée

a. Calculer le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$.

b. En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC.

2. 7. Similitude + ROC, Antilles 2010

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 2 : Soit C un point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right)=\arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right)(2\pi)$.

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d=1-3i$, et S_1 la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ des réels.

a. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par S_1. On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.

b. Donner l'expression complexe de S_1.

3. Soit S_2 la similitude directe définie par :

– le point C_1 et son image C' d'affixe $c'=1+4i$;

– le point D_1 et son image D' d'affixe $d'=-2+2i$.

a. Montrer que l'expression complexe de S_2 est : $z'=iz+1+i$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit S la similitude définie par $S=S_2\circ S_1$. Déterminer l'expression complexe de S.

5. On pourra admettre désormais que S est la similitude indirecte d'expression complexe : $z'=i\overline{z}+1+i$.

a. Quelle est l'image de C par S ? Quelle est l'image de D par S ?

b. Soit H le point d'affixe h tel que : $h-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(d-c)$. Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.

c. Soit H' l'image de H par S. Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point H' (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H').

2. 8. Similitude, Amérique du Sud 2009

On considère un carré direct $ABCD$ (c'est à dire un carré $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ de centre I).

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$.

2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.

3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.

b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés. (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A\,;\frac{1}{10}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{10}\overrightarrow{AD} \right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2}iz + 5 + 5i$.

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω .

2. 9. Similitude+Suite, Pondicherry 2009

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que : $S(O) = A$ et $S(A) = B$.

2. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + i$.

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - i)^n$.

b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$. Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n. Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ¿

2. 10. ROC + Similitude, Polynésie 2009

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthononnal direct. On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points teIs que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm. On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives $z = 2i$, $z_B = 2$, $z_C = 4 + 6i$, $z_D = -1 + i$ et $z_E = -3 + 3i$.

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et àmesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.

a. Donner l'écriture complexe de f.

b. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

c. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

d. En déduire la nature du triangle DAE.

4. On désigne par (C_1) le cercle de diamètre $[AB]$ et par (C_2) le cercle de diamètre $[AD]$.

On note M le second point d'intersection du cercle (C_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (C_2) et de la droite (AB).

a. Déterminer l'image de M par la similitude f.

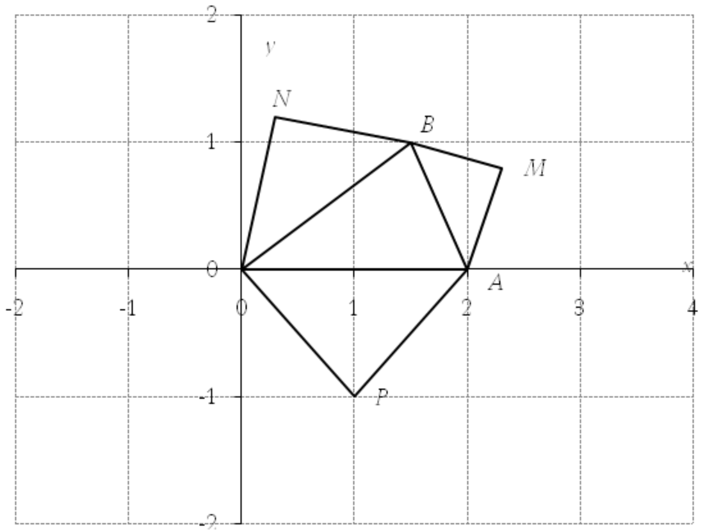
b. En déduire la nature du triangle ΩMN.

c. Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

2. 11. Similitudes, N. Calédonie nov 2008

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \dfrac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N.

On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1\, r$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations.

a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.

b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

c. Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d. Quelle est l'image du point O par r ?

e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes.

a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a.

b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

c. Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. 12. Spirale+arith, Antilles sept 2008

Partie A

On considère le système de congruences : $(S)\begin{cases} n \equiv 2[\text{mod } 3] \\ n \equiv 1[\text{mod } 5]\end{cases}$, où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15k$, où k désigne un entier relatif.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z'=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z \text{ et } z''=e^{i\frac{\pi}{5}}z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $b_0=4e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \text{ et } B_{n+1} = g(B_n).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OB_n},\overrightarrow{OB_{n+2}}\right)$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

2. 13. Spirale+arith, France et La Réunion sept 2008

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point A d'affixe $z_A=1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note $A_0=A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1}=f\left(A_n\right)$.

1. a. Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier *n,* l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n e^{\frac{in\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $[O\,;\vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $[O\,;\vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

2. 14. Similitude indirecte, La Réunion, juin 2008

5 points

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2+i$, $z_B = 5+2i$ et $z_C = i$. s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'afiixe z' telle que

$$z' = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)\bar{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right).$$

b. En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (d) d'équation $4x+3y=1$.

d. Vérifier que le point C' appartient à (d).

2. a. Démontrer que les droites (d) et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.

b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe (d) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n 'aboutit pas.*

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs *(x, y)* solutions de l'équation : $4x+3y=1$.

b. Déterminer les points de (d) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

2. 15. Similitude & suite, France, juin 2008 (c)

5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1-i$ et $z_B = 7+\frac{7}{2}i$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x+3y=1$.

Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1, -4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2, 3)$.

3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe

$$z'=\frac{2}{3}iz+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i.$$

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b. À partir de quel entier n le point B_n appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

Correction

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A=1-i$ et $z_B=7+\frac{7}{2}i$.

1. On a la solution particulière évidente $(1\,;-1)$ d'où

$$\begin{cases}4x+3y=1\\ 4.1+3.-1=1\end{cases}\Rightarrow 4(x-1)=3(-y-1)\Rightarrow\begin{cases}x-1=3k\\ -y-1=4k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3k+1\\ y=-4k-1\end{cases}.$$

2. Un peu de calcul…

$$s:z'=az+b:\begin{cases}A\to A\\ B\to M_{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(1-i)+b=1-i\\ a\left(7+\frac{7}{2}i\right)+b=-2+3i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=(1-i)-a(1-i)\\ a\left(7+\frac{7}{2}i\right)+(1-i)-a(1-i)=-2+3i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=(1-i)-a(1-i)\\ a\left(6+\frac{9}{2}i\right)=-3+4i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=(1-i)-a(1-i)\\ a=\frac{2}{3}\frac{-3+4i}{4+3i}=\frac{2}{3}\frac{(-3+4i)(4-3i)}{16+9}=\frac{2}{3}i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i\\ a=\frac{2}{3}i\end{cases}$$

Soit le rapport $\frac{2}{3}$ et l'angle $\frac{\pi}{2}$. On pouvait aussi calculer $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM_{-1}}\right)=\arg\frac{z_{M_{-1}}-z_A}{z_B-z_A}$ et $\frac{AM_{-1}}{AB}=\ldots$

3. Comme c'est la même chose que ce qu'on a trouvé, $s(A)=A$, etc…

4. a. $AB_{n+1}=\frac{2}{3}AB_n$ de toute évidence…

b. Suite géométrique de premier terme $AB=\frac{15}{2}$, de raison $\frac{2}{3}$,

$AB_n=\frac{15}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\le 10^{-2}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^n\le\frac{0{,}02}{15}\Rightarrow n\ge\frac{\ln(0{,}02/15)}{\ln(2/3)}\approx 16{,}33$ d'où la première valeur de n est 17.

c. $B_1=M_{-1}$. Comme on fait un quart de tour à chaque fois, tous les n impairs (3, 5, 7…) feront revenir B_n sur la droite AB_1.

2. 16. Similitude, Centres étrangers, juin 2008

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; l'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a=2,\ b=2+3i,\ c=3i,\ d=-\frac{5}{2}+3i\ \text{ et }\ e=-\frac{5}{2}.$$

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.

Démontrer que $OABC$ et $ABDE$ sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.

3. Étude d'une similitude directe transformant $OABC$ en $ABDE$

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.

b. Démontrer que la similitude s transforme $OABC$ en $ABDE$.

c. Quel est l'angle de la similitude s ?

d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s\circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω.

4. Étude d'une similitude indirecte transformant $OABC$ en $BAED$

a. Montrer que récriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est : $z'=-\frac{3}{2}i\bar{z}+2+3i$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

b. Montrer que s' transforme $OABC$ en $BAED$.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. 17. Similitude+ROC, Pondicherry, avril 2008 (c)

5 points

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z'=az+b$, où $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe.

Démontrer que si A,B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A=-\sqrt{3}-i$, $z_B=1-i\sqrt{3}$, $z_C=\sqrt{3}+i$ et $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1. a. Donner le module et un argument-de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

c. Déterminer le milieu du segment [AC], celui du segment [BD]. Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+2$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.

c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

Correction

Partie A

Démonstration de cours : On a les affixes a, a', b et b'. Si on a une similitude directe, celle-ci s'écrit $z'=\alpha z+\beta$; il suffit donc de trouver α et β en fonction de a, a', b et b'.

$$\begin{cases}A\to A'\\B\to B'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=\alpha a+\beta\\b'=\alpha b+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=\alpha a+\beta\\b'-a'=\alpha(b-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{b'-a'}{b-a}\\\beta=a'-\alpha a\end{cases}$$; valable si $a\neq b$, soit A et B distincts.

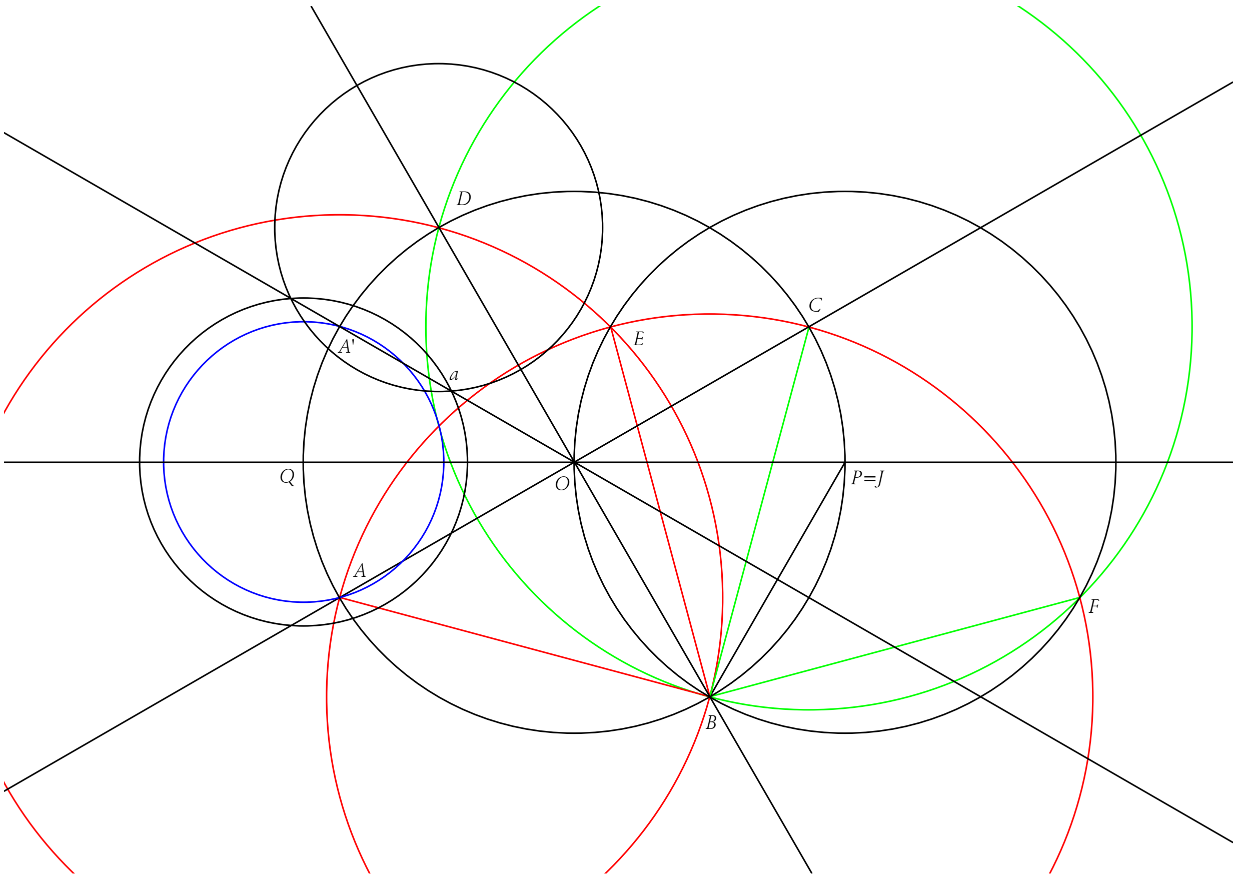
Partie B

$z_A=-\sqrt{3}-i$, $z_B=1-i\sqrt{3}$, $z_C=\sqrt{3}+i$ et $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1\. a. $z_A=-\sqrt{3}-i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$; $z_B=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

$z_C=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_D=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. Les points sont sur le cercle de centre O, de rayon 2 (cercle de diamètre $[PQ]$) ; B est un sommet de triangle équilatéral, D est diamétralement opposé à B, A' est sur la bissectrice de $\widehat{QOD}$ et A est tel que l'arc $\overset{\frown}{AQ}=\overset{\frown}{QA'}$; C est diamétralement opposé à A (traits pointillés noirs sur la figure).



c. $z_A+z_C=0$, $z_B+z_D=0$, le milieu est O. $\frac{z_B}{z_A}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}+i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{3\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc (OA) et (OB) sont orthogonales de même que (AC) et (BD). $ABCD$ est un carré : diagonales se coupant à angle droit en leur milieu et de même longueur.

2\. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+2$.

a. $\omega=e^{-i\frac{\pi}{3}}\omega+2\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega=2\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega=2\Leftrightarrow\omega=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$: g est la rotation de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b. J est déjà construit puisqu'il s'agit de P. Par ailleurs il s'agit de triangles équilatéraux : on construit les deux cercles de rayon AB, de centre A et de centre B ; une des deux intersections est E ; même chose avec les cercles de rayon BC, de centres B et C (en rouge et vert sur la figure).

c. E, J et F sont alignés : $z_{\overrightarrow{JE}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A+2-2=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$; $z_{\overrightarrow{JF}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C+2-2=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C$ et $z_C=-z_A$ donc $\overrightarrow{JE}=-\overrightarrow{JF}\Leftrightarrow\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{FJ}$: J est le milieu de [EF].

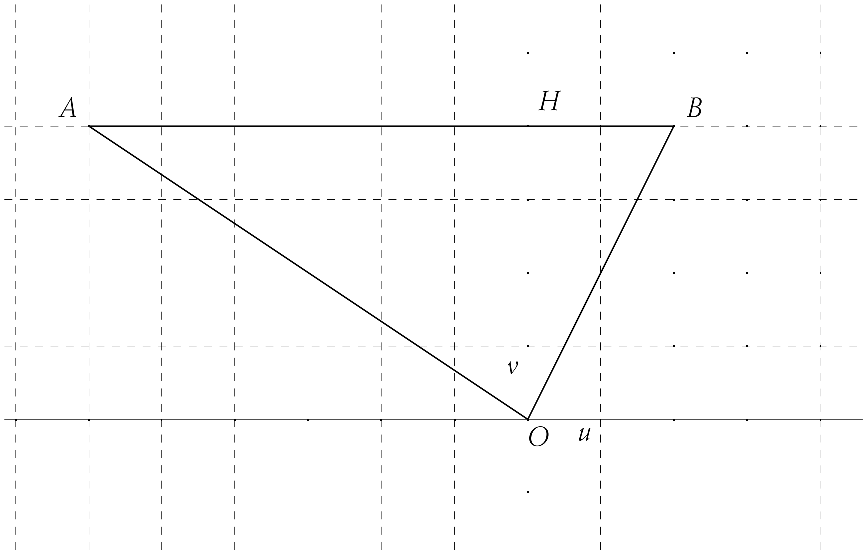
On aurait pu utiliser le fait que O est le milieu de A et C, soit en faisant la rotation on garde l'alignement et le milieu.

2. 18. Similitude, Polynésie, sept 2007

5 points

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies ci-dessous.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ.



Soit :

- les points A' et B' images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [$A'B$] et J, milieu du segment [AB'] ;
- le point M milieu du segment [AA'] ;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) et le point H' image du point H par σ.

Partie A : Etude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4i$, le point B a pour affixe $2+4i$, et le point H a donc pour affixe $4i$.

La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A', B' et H'.

2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').

Partie B : Etude du cas général

1. a. Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite ($A'B'$).

b. Montrer que $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

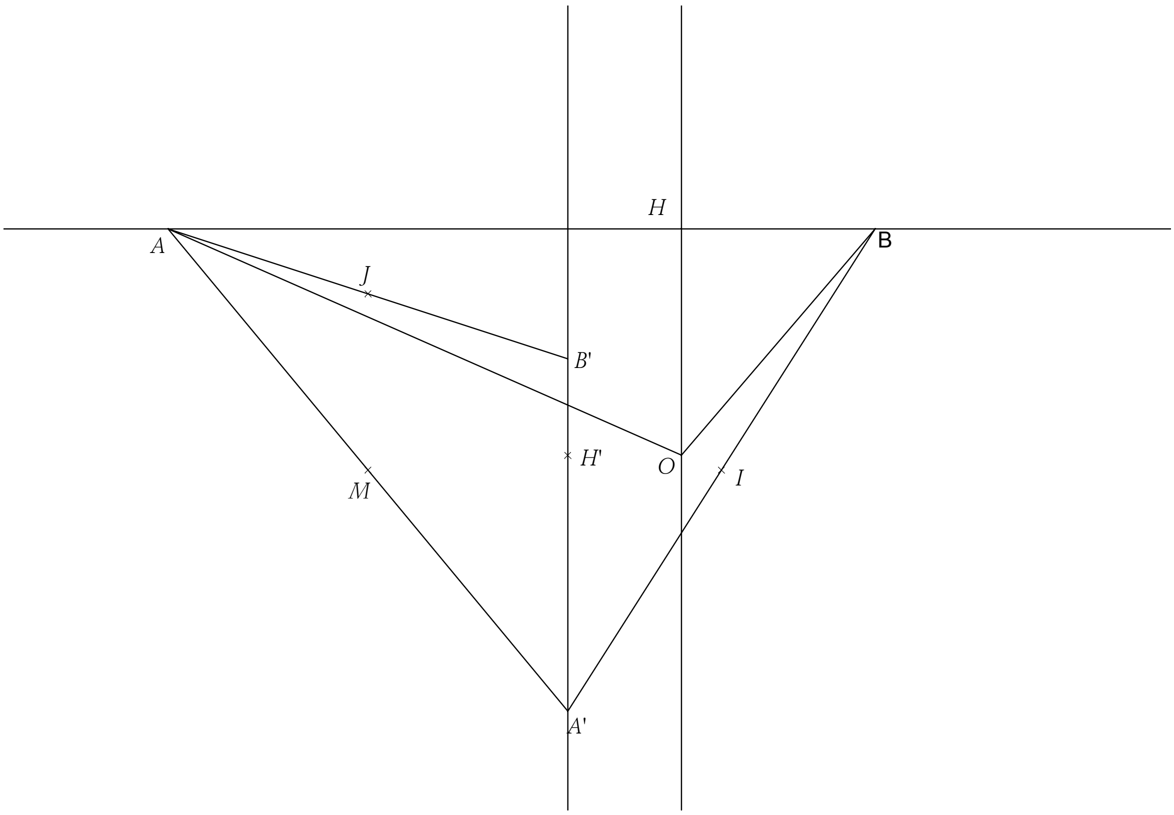
c. En déduire que $\frac{MJ}{MI}=\frac{OH'}{OH}$ et que $\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ}\right)=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OH'}\right)+k\times 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H. On note K l'image du point J par la similitude s.

a. Montrer que $OK = OH'$, puis que $\left(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OH'}\right) = 0 + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b. En déduire que le point *H'* est l'image du point *J* par la similitude *s*.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{HH'}\right) = \left(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{OH}\right) + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Montrer que la droite (*IJ*) est perpendiculaire à la droite (*HH'*).



2. 19. Similitude, Antilles, sept 2007

5 points

ABC est un triangle équilatéral du plan tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Soit *t* un nombre réel fixé et soient les points *M*, *N* et *P*, deux à deux distincts, définis par :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points *A*, *B* et *C* en respectivement *M*, *N* et *P*, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ direct. On note *a*, *b*, *c*, *m*, *n* et *p* les abscisses respectives des points *A*, *B*, *C*, *M*, *N* et *P*.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer *m*, *n* et *p* en fonction de *a*, *b*, *c* et *t*.

b. En déduire que les deux triangles *ABC* et *MNP* ont même centre de gravité. On notera *G* ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de *G* par σ.

2. On considère la rotation *r* de centre *G* et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que *M* est le barycentre du système de points $\left\{(A, 1-t)\,;(B, t)\right\}$ et en déduire que $r(M) = N$.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1 la similitude directe de centre G, de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}\right)$. Montrer qu'elle transforme les points A, B et C respectivement en M, N et P.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ .

2. 20. Similitude, Am. du Sud, sept 2007

5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).

Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport −2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = 2\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

2. 21. Similitude directe et indirecte, France, juin 2007

5 points

La figure sera complétée tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5 + 6i$, $-7 - 2i$ et $3 - 2i$. On admet que le point F, d'affixe $-2 + i$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1. Soit H le point d'affixe −5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

2. a. Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.

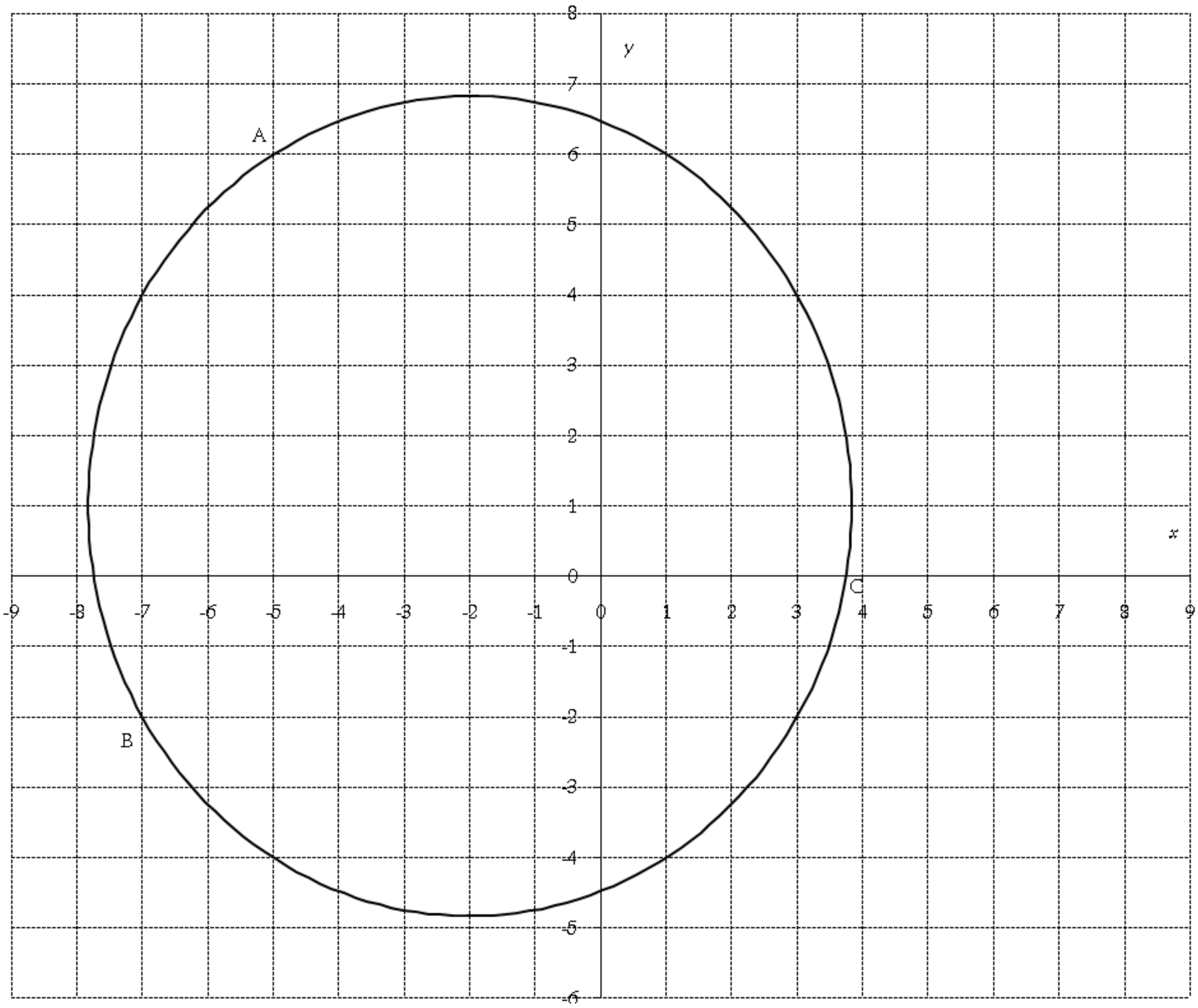
Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'. Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?

b. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

c. Vérifier que le point E est un point du cercle Γ .

3. Soit I le milieu du segment [AC]. Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.

Démontrer que les points H, G et F sont alignés.



2. 22. Similitudes directe et indirecte, La Réunion, juin 2007

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a=-2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}-3i$ et $c=2i$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure ci-dessous. Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les tracés de construction apparents).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$ et de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right)$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ et $f=-\sqrt{3}-i$.

a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés.

b. Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.

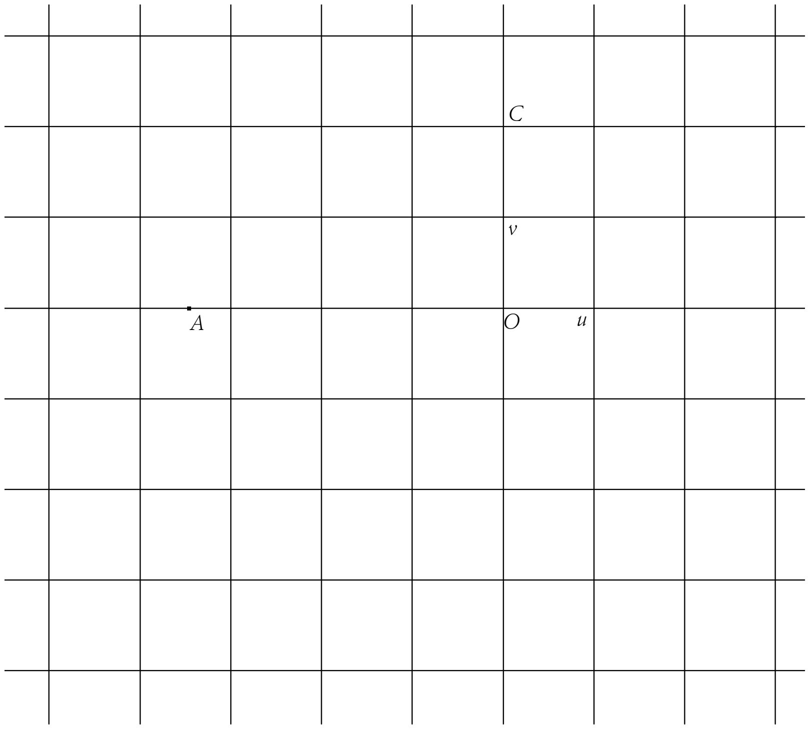
Interpréter géométriquement ce résultat. On admet que, de façon analogue, $\frac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k'i$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est $z \to z' = \frac{1}{2}\overline{z} - \sqrt{3}$.

Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point $S(H)$ sur la figure.



2. 23. Similitudes directe et indirecte, C. étrangers, juin 2007

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = i\sqrt{2}\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2$.

1. Préciser les éléments caractéristiques de g. (centre, rapport, angle).

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$.

III.Deuxième décomposition de f

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

2. Soit D la droite d'équation : $y = x + 2$.

Montrer que pour tout point N appartenant à D, le point $f(N)$ appartient aussi à D.

3. Soit σ la réflexion d'axe D et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

a. Donner l'écriture complexe de σ.

Indication : on pourra poser $z' = a\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.

b. En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

c. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.

2. 24. Similitudes, Asie, juin 2007

5 points

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et $5i$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.

c. Déterminer le point $s \circ s(B)$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.

2. On note D la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A' et B' les points d'affixes respectives $8 + 4i$ et $2 + i$.

a. Démontrer que les points A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite D.

b. Vérifier que $s(B') = A'$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. On note encore s la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.

a. Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

b. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OA]$. (On admet de même que Ω appartient au cercle de diamètre $[OB]$.)

En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. On désigne par D une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).

On note A' et B' les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite D.

a. Déterminer les images des droites (BB') et D par la similitude s.

b. Déterminer le point $s(B')$.

c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$.

2. 25. Similitudes, Antilles, juin 2007

5 points

$(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm). On considère le point A d'affixe $z = 1 + i$. On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et àmesure.

2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.

3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.

4. a. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

b. Montrer que $z_B = -3iz_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

5. Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$.Montrer que P est le milieu de $[BC]$.

2. a. Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.

b. Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).

c. Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

2. 26. Similitude+Bézout, Am. du Nord, juin 2007 (c)

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3+5i$, $b = -4+2i$, $c = 1+4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2i)z+1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. a. Déterminer l'affixe du point B', image du point B par f.

b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x+iy$ où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x+3y=2$.

4. On considère l'équation (E) : $x+3y=2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-4\,;2)$ est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. Placer ces points sur la figure.

Correction

1. $z' = (2-2i)z+1$: similitude directe $2-2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc rapport $2\sqrt{2}$, angle $-\frac{\pi}{4}$. Le centre est tel que $\omega = (2-2i)\omega+1 \Leftrightarrow \omega(-1+2i) = 1 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{-1-2i}{5}$.

2. a. $b' = f(b) = (2-2i)(-4+2i)+1 = -8+8i+4i+4+1 = -3+12i$.

b. $\dfrac{b'-c}{a-c} = \dfrac{-3+12i-1-4i}{3+5i-1-4i} = \dfrac{-4+8i}{2+i} = \dfrac{(-4+8i)(2-i)}{5} = \dfrac{20i}{5} = 4i$ donc $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}\right) = \arg(4i) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. $\overrightarrow{CM'}.\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(x'-1)+y'-4 = 2x'+y'-6$.

Par ailleurs $z' = (2-2i)z+1 \Leftrightarrow x'+iy' = (2-2i)(x+iy)+1 = 2x+2y+1+i(-2x+2y)$.

On remplace et on annule : $2(2x+2y+1)-2x+2y-6 = 0 \Leftrightarrow 2x+6y-4 = 0 \Leftrightarrow x+3y=2$.

4. a. $(-4\,;2)$ est une solution de (E) : $-4+3\times 2 = 2$.

b. $\begin{cases} x+3y=2 \\ -4+3(2)=2 \end{cases} \Rightarrow x+4+3(y-2)=0 \Leftrightarrow 1(x+4) = 3(2-y) \Rightarrow \begin{cases} x+4=3k \\ 2-y=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k-4 \\ y=2-k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

c. $\begin{cases} -5 \le 3k-4 \le 5 \\ -5 \le 2-k \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 3k \le 9 \\ -7 \le -k \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/3 \le k \le 3 \\ -3 \le k \le 7 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}$ d'où les quatre points :

$$(-4\,;2),(-1\,;1),(2\,;0),(5\,;-1).$$

<u>2. 27. Similitude indirecte, Pondicherry, avril 2007</u>

5 points

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connus les résultats suivants :

- la composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient *A, B, C* trois points non alignés du plan et *s* et *s'* deux similitudes du plan telles que :

$$s(A)=s'(A), s(B)=s'(B), s(C)=s'(C).$$

Montrer que $s=s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points *A* d'affixe 2, *E* d'affixe $1+i$, *F* d'affixe $2+i$ et *G* d'affixe $3+i$.

a. Calculer les longueurs des côtés des triangles *OAG* et *OEF*. En déduire que ces triangles sont semblables.

b. Montrer que *OEF* est l'image de *OAG* par une similitude indirecte *S*, en déterminant l'écriture complexe de *S*.

c. Soit *h* l'homothétie de centre *O* et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $A'=h(A)$ et $G'=h(G)$, et on appelle *I* le milieu de [*EA'*]. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S=\sigma\circ h$.

<u>2. 28. Nouvelle Calédonie, nov 2006</u>

5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité 1 cm).

On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit *A* le point d'affixe 3, et *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note *B, C, D, E* et *F* les images respectives des points *A, B, C, D* et *E* par la rotation *r*. Montrer que *B* a pour affixe $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

2. Associer à chacun des points *C, D, E* et *F* l'une des affixes de l'ensemble suivant :

$$\left\{-3\,;-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

3. a. Déterminer *r*(*F*).

b. Quelle est la nature du polygone *ABCDEF* ?

4. Soit *s* la similitude directe de centre *A*, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit *s'* la similitude directe de centre *E* transformant *F* en *C*.

a. Déterminer l'angle et le rapport de *s'*. En déduire l'angle et le rapport de $s'\circ s$.

b. Quelle est l'image du point *D* par $s'\circ s$?

c. Déterminer l'écriture complexe de *s'*.

5. Soit *A'* le symétrique de *A* par rapport à *C*.

a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer *s*(*A'*) puis l'image de *A'* par $s'\circ s$.

b. Calculer l'affixe du point *A'*. Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe de $s'\circ s$.

2. 29. Amérique du Nord, juin 2006 (c)

5 points

Le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle *r* la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$, et *h* l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h\circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $\sigma : z\mapsto \frac{1+i}{2}z+1-i$.

c. Soit *M* un point quelconque du plan, d'affixe *z*. On désigne par *M'* son image par σ et on note *z'* l'affixe de *M'*. Montrer que $z-z'=i(2-z')$.

2. a. **Question de cours** :

Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul.Propriétés algébriques des modules et des arguments.

Démonter que : si *A* est un point donné d'affixe *a*, alors l'image du point *P* d'affixe *p* par la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point *Q* d'affixe *q* telle que $q-a=i(p-a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour *M* distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2+i$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par : pour tout entier naturel *n*, $A_{n+1}=\sigma(A_n)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, l'affixe a_n de A_n est donnée par : $a_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}}+2$.

b. Déterminer l'affixe de A_3.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait : pour $n>n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Correction

1. a. σ est évidemment une similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

b. $\sigma : z\mapsto z'$ avec $z'-\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-\omega)\Leftrightarrow z'-2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-2)\Leftrightarrow z'=\left(\frac{1+i}{2}\right)(z-2)+2$ d'où en développant : $z'=\left(\frac{1+i}{2}\right)z+1-i$.

c. $z-z'=z-\frac{1+i}{2}z-1+i=\frac{1-i}{2}z-1+i$ et $i(2-z')=i\left(2-\frac{1+i}{2}z-1+i\right)=-\frac{i-1}{2}z+i-1$, c'est pareil.

2. a. **Question de cours** :

Si *A* est un point donné d'affixe *a*, alors l'image du point *P* d'affixe *p* par la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point *Q* d'affixe *q* telle que

$$\begin{cases} AQ=AP \\ \left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{AQ}{AP}=\frac{|q-a|}{|p-a|}=\left|\frac{q-a}{p-a}\right|=1 \\ \arg\left(\frac{q-a}{p-a}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}\Leftrightarrow\frac{q-a}{p-a}=1\times e^{i\frac{\pi}{2}}=i\text{, et donc } q-a=i(p-a).$$

b. Comme on a $z-z'=i(2-z')$, ceci se traduit par : M est l'image de Ω par la rotation de centre M', d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M'.

3. a. Par récurrence : $a_0=2+i$; avec la relation donnée : $a_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 e^{i\frac{(0+2)\pi}{4}}+2=e^{i\frac{\pi}{2}}+2=2+i$; ça marche au rang 0. On suppose que ça roule au rang n ; au rang $n+1$ on a alors avec la formule :

$$a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+2$$

et d'un autre côté par le calcul :

$$a_{n+1}=\left(\frac{1+i}{2}\right)a_n+1-i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}a_n+1-i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}}+2\right]+1-i$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+1-i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+1-i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+2.$$

Ok !

b. $a_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 e^{i\frac{5\pi}{4}}+2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2=\frac{7}{4}-i\frac{1}{4}$.

4. Il faut trouver n_0 tel que

$$\Omega A_{n_0}\le 0,01 \Leftrightarrow \left|a_{n_0}-2\right|\le 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n_0}\le 0,01 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}n_0\ln(2)\le \ln(0,01)\Leftrightarrow n_0\ge \frac{-2\ln(0,01)}{\ln 2}\approx 13,3$$

donc $n_0=14$.

2. 30. Antilles, juin 2006

5 points

Sur la figure donnée en annexe, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par I le milieu du segment [CD], par J le milieu du segment [OC] et par H le point d'intersection des segments [AD] et [IE].

1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. Déterminer le rapport de cette similitude s.

On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.

4. Déterminer et placer l'image de C par s.

5. Soit Ω le centre de la similitude s.

a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AI] et à celui de diamètre [DE].

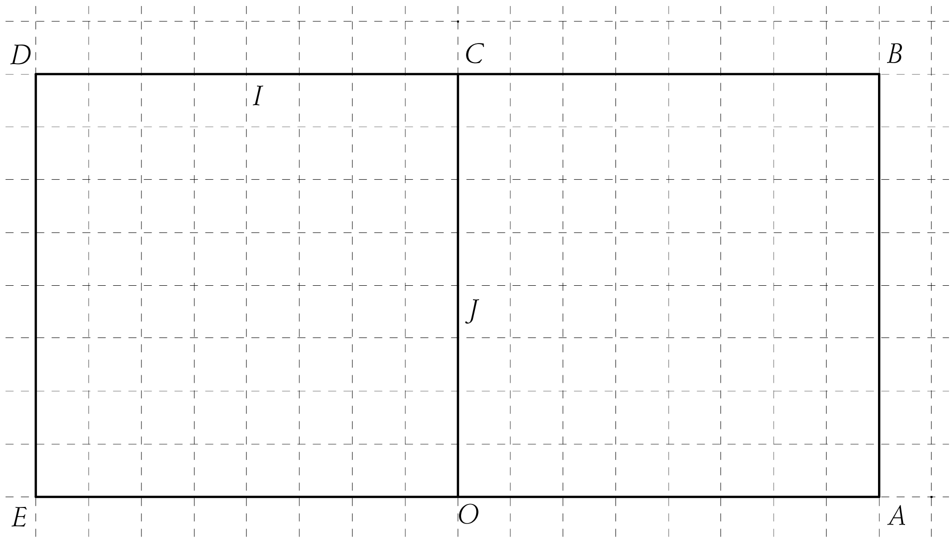
b. Montrer que Ω ne peut être le point H.

c. Construire Ω.

6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.



2. 31. La Réunion, juin 2006

5 points

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

$ABCD$ est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré $ABCD$. Soit J le milieu du segment $[CD]$.

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$, Γ_2 est le cercle de diamètre $[BJ]$. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.

4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).

a. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b. Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A\,;\vec{u}, \vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2, $2+2i$ et $2i$.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitudes est $z' = \dfrac{1}{2}iz + 1 + i$.

2. Calculer l'affixe du point Ω.

3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.

2. 32. Sim. indirecte+lieu, Liban, juin 2006 (c)

5 points

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6 ; unité graphique : 1 cm.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A en O et O en B. Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Montrer qu'il existe une similitude indirecte et une seule qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=-2i\,\overline{z}+6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.

2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$. On pose $g=f\circ h$.

a. Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.

b. On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g. Montrer que l'écriture complexe de g est $z''=-i\,\overline{z}+2+2i$ où z'' est l'affixe de M''.

c. Montrer qu'il existe sur l'axe $(O\,;\vec{v})$ un unique point invariant par g ; on le note L. Reconnaître alors la transformation g.

d. En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie de la réflexion d'axe (KL). Préciser les éléments caractéristiques de h'.

3. Déterminer les droites Δ telles que $f(\Delta)$ et Δ soient parallèles.

<u>Correction</u>

A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6.

Partie A

1. $\begin{cases}0=a\times 3i+b\\ 6=a\times 0+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=6\\ a=2i\end{cases}\Rightarrow z'=2iz+6$.

Angle : $\dfrac{\pi}{2}$, rapport : 2, point invariant : $\omega=2i\omega+6\Leftrightarrow\omega(1-2i)=6\Leftrightarrow\omega=\dfrac{6}{5}(1+2i)$.

2. $\begin{cases}0=a\times\overline{3i}+b\\ 6=a\times 0+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=a\times -3i+b\\ 6=a\times 0+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=6\\ a=-2i\end{cases}\Rightarrow z'=-2i\,\overline{z}+6$.

Partie B

1. $z'=-2i\,\overline{z}+6\Leftrightarrow x'+iy'=-2i(x-iy)+6\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-2y+6\\ y'=-2x\end{cases}$.

On cherche le point invariant : $\begin{cases}x=-2y+6\\ y=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4x+6\\ y=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}$; K a pour affixe $-2+4i$.

2. a. et b. $h:z\to z'/\,z'+2-4i=\dfrac{1}{2}(z+2-4i)\Leftrightarrow z'=\dfrac{1}{2}z-1+2i$.

$g=f\circ h:z\to z'\to z''=-2i\overline{z'}+6=-2i\left(\dfrac{1}{2}\overline{z}-1-2i\right)+6=-i\overline{z}+2i+2$. Il s'agit bien d'une isométrie car le module du coefficient de $\overline{z}$ est 1 ; l'image de K est $-i(-2-4i)+2i+2=2i-4+2i+2=-2+4i$, on retrouve bien K.

c. $z''=-i\,\overline{z}+2i+2\Leftrightarrow x''+iy''=-i(x-iy)+2i+2\Leftrightarrow\begin{cases}x''=-y+2\\ y''=-x+2\end{cases}$; si L est invariant il est tel que $\begin{cases}x=-y+2\\ y=-x+2\end{cases}\Leftrightarrow x+y-2=0$; s'il est sur $(O\,;\vec{v})$, son abscisse est nulle, soit $x=0$, ce qui donne le point $2i$.

g. est donc la réflexion d'axe (KL), d'équation $x+y-2=0$.

d. On a $f=f\circ h\circ h^{-1}=g\circ h^{-1}$ donc h' est l'homothétie de centre K, de rapport 2.

3. Comme h^{-1} transforme une droite en une droite parallèle, il suffit que Δ soit parallèle à (KL) pour que son image le soit également.

2. 33. Spirale, Pondicherry, avril 2006

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendar pour unité graphique 5 cm.

Soit *f* la transformation qui, à tout point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'* définie par :

$$z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel *n*, on pose $A_{n+1}=f(A_n)$.

a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3. Placer ces points.

b. Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n=\Omega A_n$. Justifier que (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel *n*, $u_n=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

c. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

3. a. Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$? En déduire la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel *n*, on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ .On a ainsi $l_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$. Exprimer l_n en fonction de *n*. Quelle est la limite de la suite (l_n) ?

2. 34. Sim. indirecte, Nouvelle Calédonie, nov 2005 (c)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 4 cm

Partie I

1. Placer les points *I*, *J*, *H*, *A*, *B*, *C*, *D* d'affixes respectives : $z_I=1$, $z_J=i$, $z_H=1+i$, $z_A=2$, $z_B=\frac{3}{2}+i$, $z_C=2i$ et $z_D=-1$.

2. Soit *E* le symétrique de *B* par rapport à *H*. La perpendiculaire à la droite (*AE*) passant par *C* et la parallèle à la droite (*OC*) passant par *D* se coupent en *F*.

Placer *E* et *F* et vérifier que le point *F* a pour affixe $z_F=-1+\frac{1}{2}i$.

3. Montrer que les triangles *OAB* et *OCF* sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation *f* du plan, d'écriture complexe : $z'=-i\bar{z}+2i$.

1. Déterminer les images des points *O*, *A*, *B* par *f*.

2. a. Montrer que *f* est une similitude. Est-ce une isométrie ?

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par *f*.

c. La transformation *f* est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit *t* la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de *t* et celle de sa réciproque t^{-1}.

4. On pose $s=f\circ t^{-1}$.

a. Montrer que l'écriture complexe de *s* est : $z'=-i\bar{z}+1+i$.

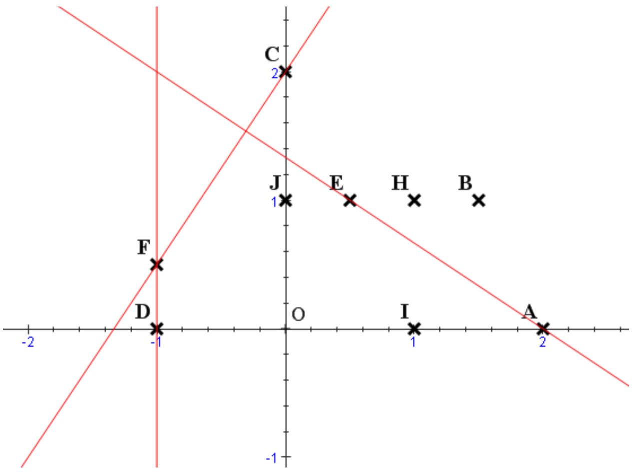
b. Montrer que *I* et *J* sont invariants par *s*. En déduire la nature de *s*.

c. En déduire que *f* est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

Correction

Partie I

1. Voir figure.



2. $\frac{1}{2}(z_E + z_B) = z_H$ d'où $z_E = \frac{1}{2} + i$

$z_{\overrightarrow{AE}} = \frac{3}{2} + i$; c'est un vecteur normal à (*CF*) donc, l'équation de (*CF*) est $\frac{3}{2}x + y + c = 0$ et puisqu'elle passe par *C*, $c = -2$. De plus, *F* est le point de (*CF*) d'abscisse –1, son ordonnée est $\frac{3}{2} + 2$: $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$.

3. $OA = OC = 2$, $OB = |z_B| = \frac{\sqrt{13}}{2} = |z_C - z_F| = CF$ et $AB = |z_B - z_A| = \frac{\sqrt{5}}{2} = |z_F| = OF$, les triangles *OAB* et *OCF* ont des côtés deux à deux égaux : ils sont isométriques.

Partie II

1. L'image de *O* a pour affixe $-i \times 0 + 2i = 2i$, $f(O) = C$; l'image de *A* a pour affixe $-i \times 2 + 2i = 0$, $f(A) = O$; l'image de *B* a pour affixe $-i\left(\frac{3}{2} - i\right) + 2i = -1 + \frac{1}{2}i$, $f(B) = F$.

2. a. L'écriture complexe de *f* est celle d'une similitude indirecte. Le triangle *OAB* et son image *COF* sont isométriques : *f* est donc une isométrie.

b. *z* est invariant par *f* si et seulement si $z = -i\bar{z} + 2i \Leftrightarrow x + iy = -ix + i^2y + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ ce qui est impossible.

c. Les points de l'axe d'une symétrie axiale sont invariants donc *f* n'est pas une symétrie axiale.

3. $\overrightarrow{IJ}$ a pour affixe $-1 + i$: l'écriture complexe de *t* est donc $z' = z - 1 + i$ et celle de t^{-1} est $z' = z + 1 - i$.

4. $s = f \circ t^{-1}$.

a. $\overline{z + 1 - i} = \bar{z} + 1 + i$: l'écriture complexe de *s* est donc $z' = -i\left(\bar{z} + 1 + i\right) + 2i = -i\bar{z} + 1 + i$.

b. $s(I)$ a pour affixe $-i + 1 + i = 1$, $s(I) = I$. $s(J)$ a pour affixe $(-i)(-i) + 1 + i = i$, $s(J) = J$.

I et *J* sont invariants par *s* : une similitude distincte de l'identité qui a deux point invariants distincts est une symétrie axiale : *s* est donc la symétrie axiale d'axe (*IJ*).

c. Pour tout point *M*, $s \circ t = f \circ t^{-1} \circ t = f$, *f* est la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et de la réflexion d'axe (*IJ*).

2. 35. Similitude+suite, Am. Sud, nov 2005

Le plan complexe *P* est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes respectives *a*, *b*, *c* et *d* telles que :

$$a = i,\ b = 1 + 2i,\ c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3 + 2i.$$

On considère la similitude directe *s* qui transforme *A* en *B* et *C* en *D*. Soit *M* un point d'affixe *z* et *M'*, d'affixe *z'*, son image par *s*.

1. Exprimer *z'* en fonction de *z*. Déterminer les éléments caractéristiques de *s*.

Soit (Un) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} etU_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes dela suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n - 1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$.

La notation pgcd(a ; b) est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n,\, p)}$. Déterminer le nombre : pgcd(U_{2005}, U_{15}).

2. 36. QCM arith+géom, National, sept 2005

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidatindiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \text{ (modulo 6)}$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k-7 ; 5-24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k-7 ; 5-12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\,892\,005$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$.

C : $p \equiv 4(17)$.

B : p est un nombre premier.

D : $p \equiv 1(17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - ia}{1 - i}$.

C: $a - z = i(b - z)$.

B : $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a)$.

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h\circ g\circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h\circ g\circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h\circ g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. 37. Réflexion+Bézout, Pondicherry, avril 2005 (c)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{3+4i}{5}\bar{z}+\frac{1-2i}{5}$.

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires de z et z'. Démontrer que $\begin{cases} x'=\frac{3x+4y+1}{5} \\ y'=\frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z=x+iy$ tels que $x=1$ et $y\in\mathbb{Z}$. Le point $M'=f(M)$ a pour affixe z'. Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Correction

1. $z'=\frac{3+4i}{5}\bar{z}+\frac{1-2i}{5}\Leftrightarrow x'+iy'=\frac{3+4i}{5}(x-iy)+\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}(3x+4y+1)+i\frac{1}{5}(4x-3y-2)$

d'où par identification : $\begin{cases} x'=\frac{3x+4y+1}{5} \\ y'=\frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$.

2. a. Avec $\begin{cases} x'=\frac{3x+4y+1}{5} \\ y'=\frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$, on a les points invariants avec le système suivant :

$$\begin{cases} x=\frac{3x+4y+1}{5} \\ y=\frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 5x-3x-4y-1=0 \\ 5y-4x+3y+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-4y-1=0 \\ -4x+8y+2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-4y-1=0 \\ 2x-4y-1=0 \end{cases}.$$

Les points invariants forment donc la droite Δ d'équation $2x-4y-1=0$.

b. f est donc une réflexion par rapport à l'axe Δ.

3. z' est réel si $y'=0\Leftrightarrow 4x-3y-2=0$; encore une droite.

4. a. Une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de $4x-3y=2$ est (2 ; 2) de manière évidente.

b. On a donc $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ 4.2-3.2=2 \end{cases}\Rightarrow 4(x-2)-3(y-2)=0\Leftrightarrow 4(x-2)=3(y-2)\Leftrightarrow\begin{cases} x-2=3k \\ y-2=4k \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2+3k \\ y=2+4k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

5. M : $z=1+iy \quad y\in\mathbb{Z}$: $\left\{\begin{array}{l} x'=\dfrac{3+4y+1}{5}=\dfrac{4+4y}{5} \\ y'=\dfrac{4-3y-2}{5}=\dfrac{2-3y}{5}\end{array}\right.$;

$$\left\{\begin{array}{l} x'\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 4+4y=5p \\ y'\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2-3y=5q\end{array}\right. \Rightarrow 6+y=5(p+q)\Leftrightarrow y=-1+5(p+q-1)\Leftrightarrow y\equiv -1(5)\Leftrightarrow y\equiv 4(5).$$

Vérifions : si $y=4+5k$, alors $\left\{\begin{array}{l} x'=\dfrac{4+4(4+5k)}{5}=\dfrac{20+20k}{5}=4+4k \\ y'=\dfrac{2-3(4+5k)}{5}=\dfrac{2-12-15k}{5}=-2-3k\end{array}\right.$, ok !

<u>2. 38. Divine proportion, Amérique du Nord, juin 2005 (c)</u>

La figure jointe en annexe sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que $AB=2$, $AC=1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

1. a. <u>Démonstration de cours</u> : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et à la droite (BC). Construire le point Ω.

3. On note D l'image du point C par la similitude S.

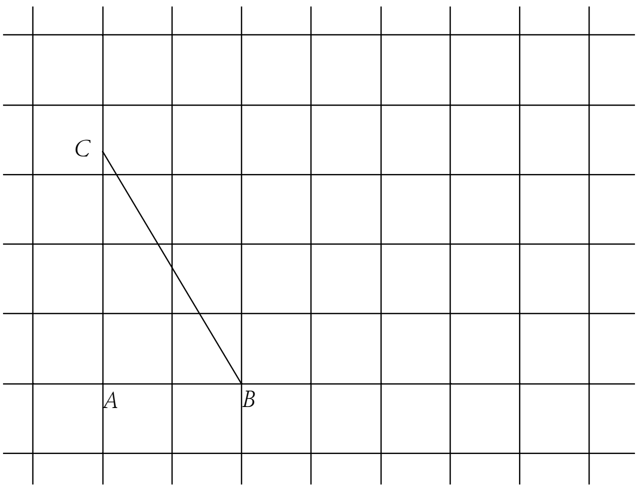
a. Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.

b. Montrer que $CD=3+\sqrt{5}$.

4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

a. Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $BFDE$?



<u>Correction</u>

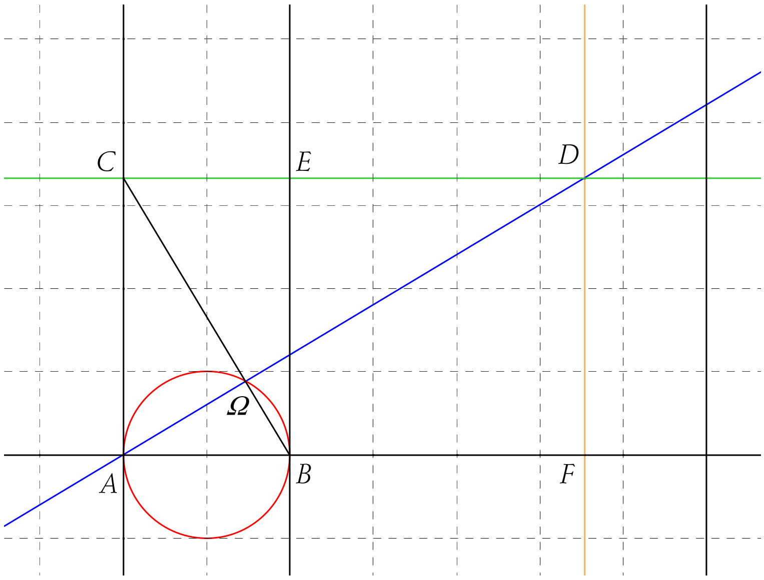
1. a. Prendre un repère de centre A, B a alors pour affixe 2 et C $(1+\sqrt{5})i$.

La similitude S qui envoie B en A et A en C s'écrit $z'=az+b\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} 0=a.2+b \\ (1+\sqrt{5})i=a.0+b\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i \\ b=(1+\sqrt{5})i\end{array}\right.$.

b. Le rapport de S est $|a|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son angle est $\arg(a)=-\dfrac{\pi}{2}$.

2. Comme on a $\begin{cases} B\to A \\ A\to C \\ \Omega\to\Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}=\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right)$ donc Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$; par ailleurs en effectuant deux fois S, on a $\begin{cases} B\to A\to C \\ A\to C \\ \Omega\to\Omega\to\Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}\right)=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=-\pi$ d'où Ω appartient à la droite (BC).

3. a. Reprenons ce que l'on vient de faire : $\begin{cases} B\to A\to C \\ A\to C\to D \\ \Omega\to\Omega\to\Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega D}\right)=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=-\pi$ donc A, Ω et D sont alignés ; de plus $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=-\pi$ donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles.



b. Ona $CD=|a|AC=|a|^2\,AB=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.2=\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{2}=3+\sqrt{5}$.

4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

a. La droite (BE) se transforme en une droite perpendiculaire à (BE) passant par l'image de B, soit A, c'est (AB). La droite (CE) se transforme en une droite perpendiculaire à (CE) passant par l'image de C, soit D, c'est (DF).

b. Le quadrilatère $BFDE$ semble être un carré…

On a $CD=3+\sqrt{5}$ donc $DE=3+\sqrt{5}-2=1+\sqrt{5}=CA=DF$; de plus on a des angles droits partout, c'est bon.

En fait le rectangle AFDC est un « rectangle d'or », soit tel que $\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CA}{CE}$*, c'est la « divine proportion ».*

<u>2. 39. Image d'une figure, Asie, juin 2005</u>

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré C_1 donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré C_2 donné.

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $R=(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives $-\frac{1}{2}i$, $1-\frac{1}{2}i$, $1+\frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}i$, $1-i$, $3-i$, $3+i$, $1+i$.

C_1 est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, C_2 est le carré de sommet E, F, G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ et S_2 l'ensemble $\{E, F, G, H\}$.

1. Placer tous les points dans le repère R, construire les carrés C_1 et C_2.

2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe -1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.

3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g = h^{-1} \circ s$.

a. Quel est le rapport de la similitude s ?

b. Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.

c. Démontrer que $g(O_1) = O_1$.

d. En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

e. En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.

4. Étude des centres de ces similitudes.

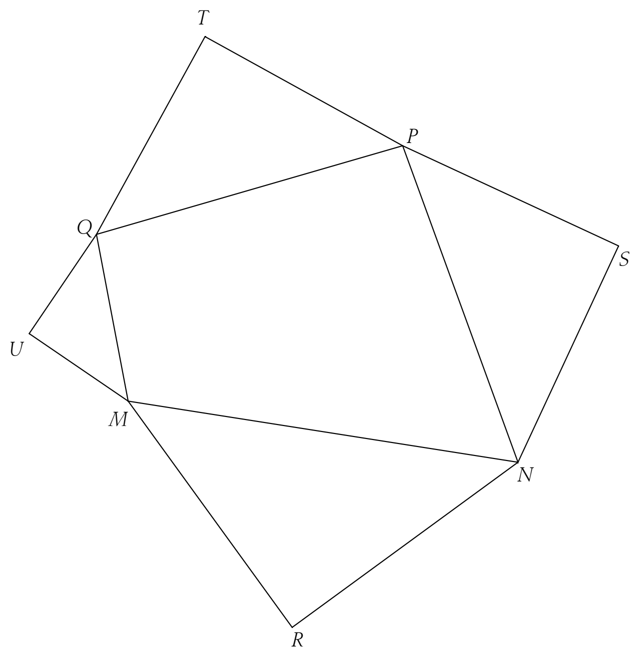
a. Déterminer les écritures complexes de $h \circ r_1$, $h \circ r_2$, $h \circ r_3$.

b. En déduire les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 de ces similitudes et les placer sur le dessin.

2. 40. Tr. rectangles isocèles, National, juin 2005

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure ci-contre.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Le quadrilatère $MNPQ$ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère $MNPQ$ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).



Partie A

On désigne par m, n, p et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.

a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.

b. On désigne par r l'affixe du point R.

Démontrer que $r = \frac{1+i}{2}m + \frac{1-i}{2}n$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

On admettra que l'on a également les résultats $s = \frac{1+i}{2}n + \frac{1-i}{2}p$, $t = \frac{1+i}{2}p + \frac{1-i}{2}q$ et $u = \frac{1+i}{2}q + \frac{1-i}{2}m$, où s, t et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.

2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3. a. Démontrer l'égalité $u - s = i(t - r)$.

b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la partie A, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.

2. Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

2. 41. S. indirecte+bézout, Polynésie, nov 2004 (c)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}-1+i(1+\sqrt{2}).$$

a. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$.

b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.

c. Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.

2. a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Montrer que la composée $g=f\circ h$ a pour écriture complexe $z''=(1+i)\bar{z}-1+3i$.

3. a. Soit M_0 le point d'affixe $2-4i$. Déterminer l'affixe du point $M_0''=g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $5x+3y=-2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M, dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\,;6]$, tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Correction

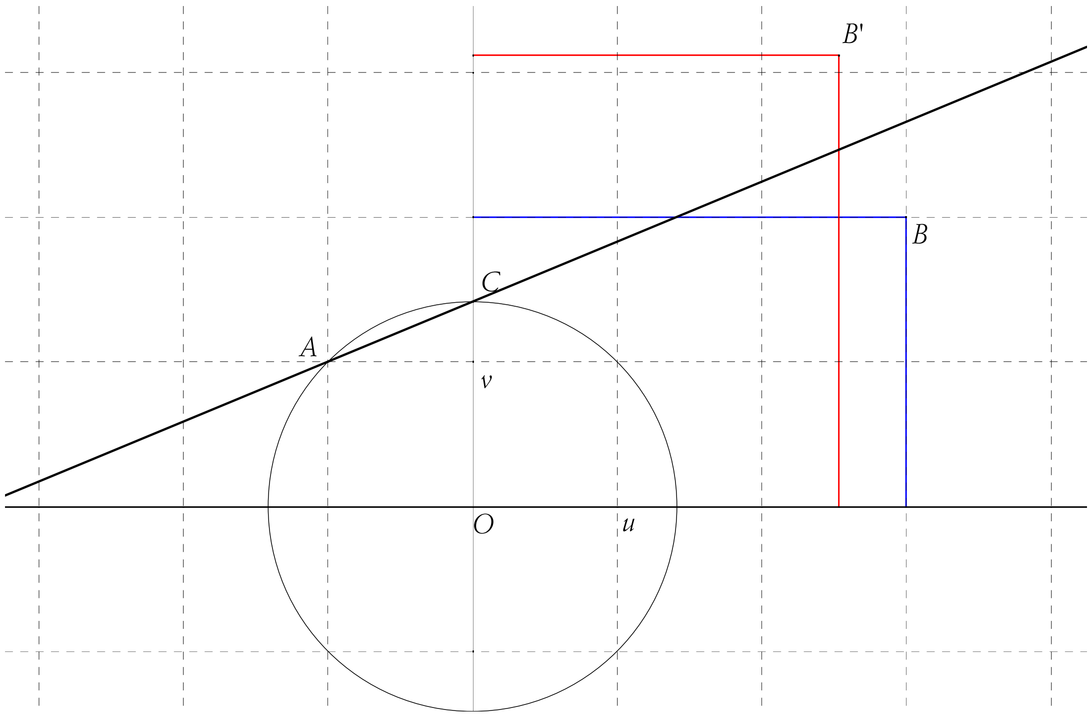
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. a. $z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}-1+i(1+\sqrt{2})$: $a'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)-1+i(1+\sqrt{2})=-i\sqrt{2}-1+i+i\sqrt{2}=-1+i$,

$c'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-i\sqrt{2})-1+i(1+\sqrt{2})=-i+1-1+i+i\sqrt{2}=i\sqrt{2}$.

b. On a $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right|=1$ donc f est une isométrie. Par ailleurs les deux points A et C sont invariants donc f est une réflexion d'axe (AC).

c.



2. a. $h : z \to z' / z' - a = \sqrt{2}(z-a) \Leftrightarrow z' = \sqrt{2}z + a(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}z + (-1+i)(1-\sqrt{2})$

b. $g = f \circ h = z \xrightarrow{h} z' \xrightarrow{f} z'' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z'} - 1 + i(1-\sqrt{2}) = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{\sqrt{2}z + (-1+i)(1-\sqrt{2})} - 1 + i(1+\sqrt{2})$, soit

$z'' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\overline{z} + (-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right)\right] - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right) = (1+i)\overline{z} + \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right)$;

il reste à simplifier :

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right) = -i\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right) - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right) = -1 + i\left(-\sqrt{2}+2+1+\sqrt{2}\right),$$

soit finalement $z'' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.

3. a. $z_0 = 2-4i \to z_0'' = (1+i)(2+4i) - 1 + 3i = -3+9i$; $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a = 3+2i+1-i = 4+i$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ a pour affixe $z_0'' - a = -3+9i+1-i = -2+8i$; avec le produit scalaire on a : $4.(-2)+1.8 = -8+8 = 0$, les vecteurs sont orthogonaux.

b. $z = x+iy \to z'' = (1+i)(x-iy) - 1 + 3i = x+y-1+i(x-y+3) \Rightarrow z'' - a = x+y+i(x-y+2)$;

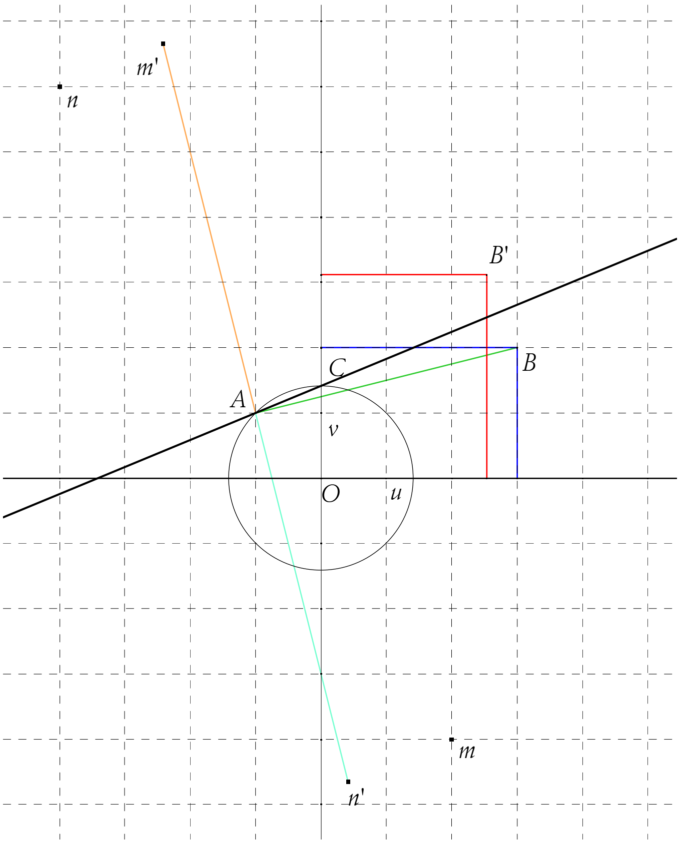
le produit scalaire donne $4(x+y)+1(x-y+2) = 5x+3y+2$ et est nul lorsque $5x+3y = -2$.

c. On a une solution évidente : $x = 2$, $y = -4$; soustrayons :

$$\begin{cases} 5x+3y=-2 \\ 5.2+3(-4)=-2 \end{cases} \Rightarrow 5(x-2)+3(y+4)=0 \Leftrightarrow 5(2-x)=3(y+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=3k \\ y+4=5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3k \\ y=-4+5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

d. $\begin{cases} -6 \le x \le 6 \\ -6 \le y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \le 2-3k \le 6 \\ -6 \le -4+5k \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \le -3k \le 4 \\ -2 \le 5k \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \le k \le \dfrac{8}{3} \\ -\dfrac{2}{5} \le k \le \dfrac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1, 0, 1, 2 \\ k=0, 1, 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 0, 1, 2.$

Il y a trois points seulement : m $(2\ ;\ -4)$, A $(-1\ ;\ 1)$ et n $(-4\ ;\ 6)$.

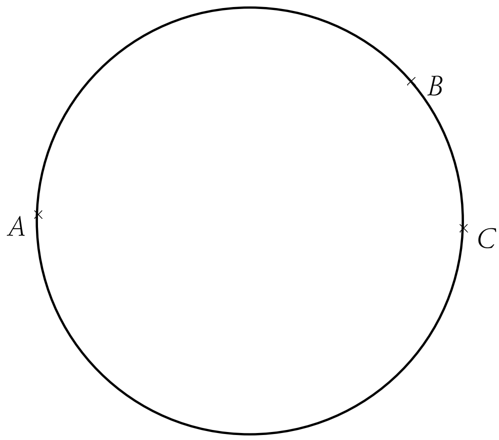


2. 42. Tr. équilatéral+lieu de points, National, sept 2004 (c)

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ. B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD. Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.



Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.

3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en C.

Partie B

Dans cette question le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et $+1$.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral directe ; on a donc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments carctéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproquie de s.

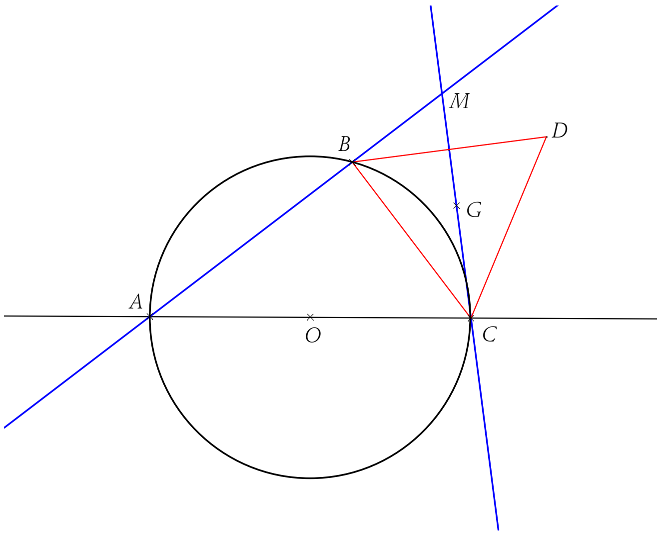
3. Montrer que l'image E' de E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.

4. On note Σ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C. Montrer que le point E appartient à Σ.

Soit O' l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de Σ.

Correction

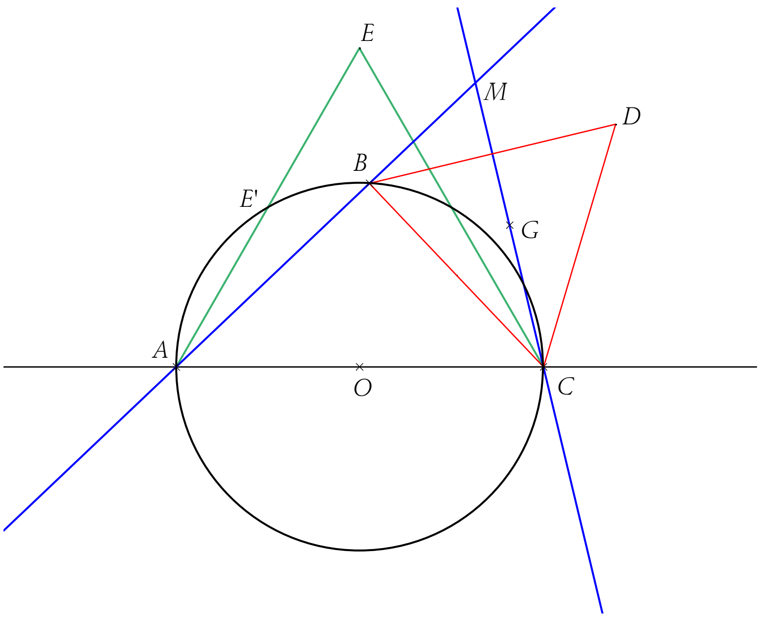
2. $[BC]$ est une corde du cercle Γ donc $OB = OC$; par ailleurs dans un triangle équilatéral le centre de gravité et le troisième sommet sont sur la médiatrice, ici sur celle de $[BC]$. (GC) est la médiatrice de $[BD]$; par ailleurs on a $\widehat{ABC} = 90°, \widehat{BCG} = 30°, \widehat{GBD} = 30°$ d'où $\widehat{DBM} = 180 - 90 - 30 - 30 = 30°$, moralité M est le symétrique de G par rapport à $[BD]$ et $GM = CG$.



3. On regarde les images par $s : \begin{cases} C \to C \\ B \to M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{CM}{CB} = 2\frac{CG}{CB} = 2\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \theta = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right) = -\frac{\pi}{6}(2\pi) \end{cases}$

Partie B

1.



2. $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$: $a=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et angle $\frac{\pi}{6}$. On cherche le centre : $z=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z\left(1-\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z=1$, c'est donc C. La réciproque d'une similitude a même centre, un rapport inverse et un angle opposé : c'est bien le cas ici.

3. E est sur l'axe imaginaire, son affixe est $i\sqrt{3}$ (hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2). Son image a pour affixe $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}i\sqrt{3}+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{3i\sqrt{3}-3+1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui a évidemment pour module 1 et est donc sur Γ.

4. Comme $E'=\sigma(E)$, on a $E=s(E')$ puisque s est la réciproque de σ ; comme E' est sur Γ, E est sur Σ.

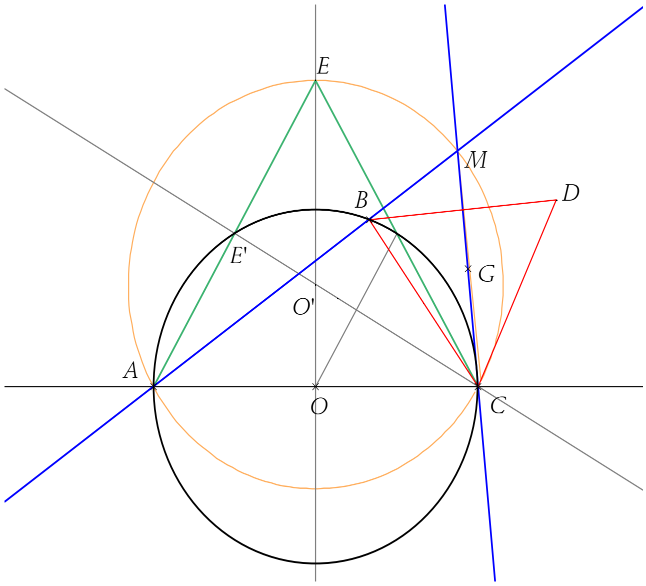
Lorsque B parcourt Γ, M parcourt le cercle de centre s(O)=O' et de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

On obtient l'affixe de O' « facilement » en écrivant que

$$z_{O'}-z_C=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_0-z_C)\Leftrightarrow z_{O'}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)+1=-1+\frac{i}{\sqrt{3}}+1=\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Celle du centre de gravité de ACE est $\frac{1}{3}(z_A+z_C+z_E)=\frac{1-1+i\sqrt{3}}{3}=\frac{i}{\sqrt{3}}$.

E est un point de Σ et O' son centre, la construction est faite.



2. 43. QCM géo+arith, Antilles, sept 2004

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, **en justifiant** le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.

2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation : $24x+35y=9$ est l'ensemble des couples :

$$(-144+70k\ ;\ 99-24k) \text{ où } k\in\mathbb{Z}.$$

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z'=i\bar{z}+(1-i)$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

<u>2. 44. Spirale, Am. du Sud, nov 2004 (c)</u>

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.

Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $B_{n+1} = S(B_n)$.

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.

3. On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.

a. Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

b. Exprimer l_n en fonction de n et de l_0.

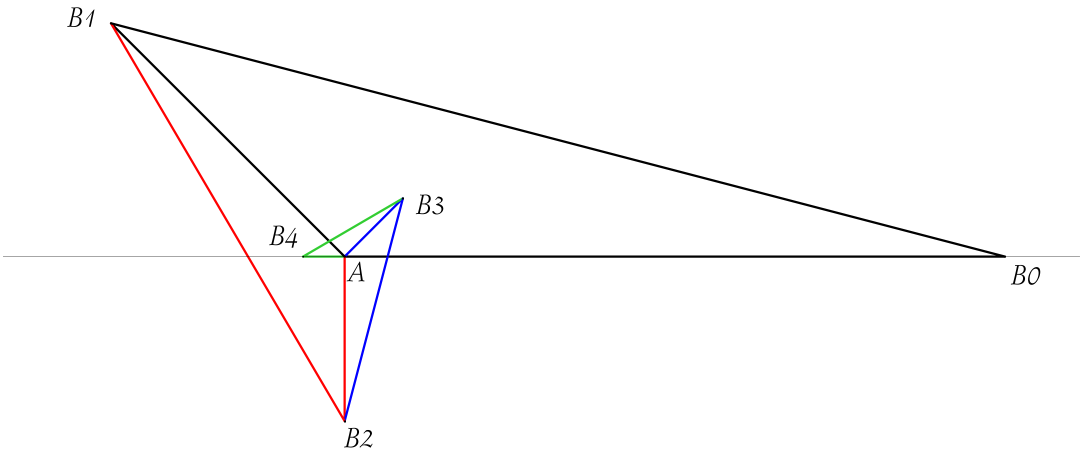
c. On pose $L_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a. Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.

b. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0). Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n appartient-il à Δ ?

<u>Correction</u>

1. Rien n'interdit de prendre A_0 à l'origine et B_0 en $z = 8$. On a alors $S: z \to z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z$, d'où en notant z_n l'affixe de B_n : $z_{n+1} = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_n$, soit $z_n = \frac{1}{2^n}e^{i\frac{3n\pi}{4}}z_0 = \frac{8}{2^n}e^{i\frac{3n\pi}{4}}$.



Enfin, bref, à chaque fois on tourne de $\frac{3\pi}{4}$ et on divise la distance par 2.

2. Par S on a $\begin{cases} A_0 \to A_0 \\ B_n \to B_{n+1} \\ B_{n+1} \to B_{n+2} \end{cases}$ donc les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.

3. a. $l_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2}B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}l_n$ puisque les triangles sont semblables et que le rapport de similitude est 1/2.

b. $l_n = l_0 \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{8}{2^n}$.

c. $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_n = 8\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}} \to 16$.

4. a. $3x-4y=2$ a comme solution évidente $x = 2, y = 1 : 3.2 - 4.1 = 2$. Soustrayons :

$$\begin{cases} 3x-4y=2 \\ 3.2-4.1=2 \end{cases} \Rightarrow 3(x-2)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3(x-2)=4(y-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4k \\ y-1=3k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

d'où les solutions $\begin{cases} x=2+4k \\ y=1+3k \end{cases}$, k entier relatif.

b. On voit sur la figure que B_2 est sur Δ ; en faisant $\dfrac{3\pi}{4}$ à chaque fois il faudra 4 coups pour revenir sur Δ, les valeurs de n correspondantes sont donc $n = 2+4k$.

Sinon on peut repartir sur $z_n = \dfrac{1}{2^n} e^{i\frac{3n\pi}{4}} z_0 = \dfrac{8}{2^n} e^{i\frac{3n\pi}{4}}$ qui est imaginaire pur lorsque $\dfrac{3n\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 3n = 2+4k \Leftrightarrow 3n-4k=2$, soit les solutions précédentes.

2. 45. Similitude indirecte, Am. du Nord, mai 2004

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, A', B et B' d'affixes respectives : $z_A = 1-2i$, $z_{A'} = -2+4i$, $z_B = 3-i$, $z_{B'} = 5i$.

1. a. Placer les points A, A', B et B' dans le plan complexe. Monter que $ABB'A'$ est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que s(A) = A' et s(B) = B'. On note (Δ) son axe.

Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z. Montrer que $z' = \left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)\bar{z} + 2i - 1$.

2. Soit g l'application du plan dans luimême qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par : $z' = \left(-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i$.

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe $1 + i$ etsoit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2. Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f.

b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, imagepar g d'un point M quelconque donné du plan.

2. 46. Rotation, Antilles 2004

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

b. Déterminez les images de R et de P par r.

c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé de B ?

c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

2. 47. Rotation+carré, Liban, mai 2004 (c)

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2\text{i}$, $z_C = 6 + 3i$, $z_D = -1 + 6i$.

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.

Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit J le point d'affixe $3 + 5i$. Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4. On appelle I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.

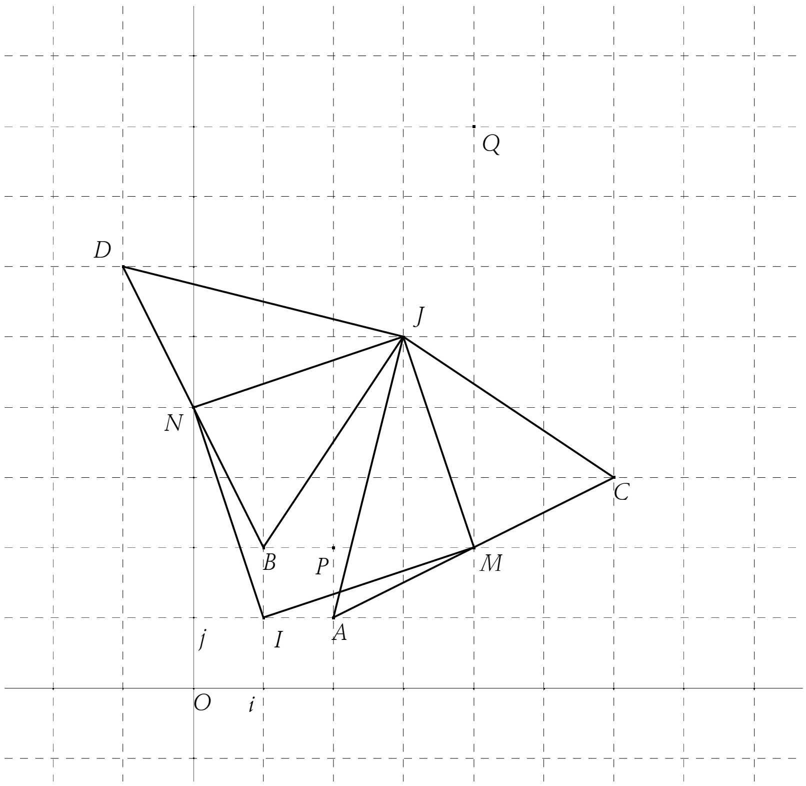
a. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.

b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}\right)$.

En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

c. En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

Correction



2. $f(z)=az+b \Rightarrow \begin{cases} 1+2i=a(2+i)+b \\ -1+6i=a(6+3i)+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-4i=a(-4-2i) \\ b=1+2i-a(2+i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=i \\ b=2 \end{cases}$.

Comme $|a|=1$ et $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$, on a bien une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Le point invariant est : $\omega=i\omega+2 \Leftrightarrow \omega=\frac{2}{1-i}=1+i$.

3. R de centre J d'angle $-\frac{\pi}{2}$: $z'-z_J=e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z-z_j\right) \Leftrightarrow z'=-iz+(1+i)z_J=-iz+-2+8i$.

L'image de A est $-i(2+i)-2+8i=-1+6i=z_D$, celle de C : $-i(6+3i)-2+8i=1+2i=z_B$. Ok.

4. Il semble que $IMJN$ est un carré : comme A a pour image B et C pour image D dans la rotation de centre I d'angle $\frac{\pi}{2}$, le milieu M de [AC] a pour image le milieu N de [BD] donc MIN est un triangle rectangle isocèle. Même chose pour MJN.

5. a. Pour P on fait la rotation de centre B d'angle $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne $z_P=2+2i$; pour Q on fait la rotation de centre D, ce qui donne $z_Q=4+8i$.

b. $\frac{IP}{IA}=\sqrt{2}$, $\frac{IQ}{IC}=\sqrt{2}$: rapport entre la diagonale et le côté du carré.

$\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IP}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}\right)=\frac{\pi}{4}$: angle entre le côté et la diagonale du carré.

Comme I est invariant, g est la similitude de centre I, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

c. Comme $IMJN$ est un carré, J est l'image de M par g. Je ne vois pas ce qu'on peut en déduire pour J.

2. 48. Suite géométrique, Polynésie, juin 2004

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 3 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$a = 3,\ b = 1+\frac{2}{3}i,\ c = 3i \text{ et } d = -\frac{1}{3}i.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Déterminer l'angle α et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.

3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.

4. Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ son image par s.

Montrer que : $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}y+1 \\ y' = \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant $\begin{cases} M_0 = A \\ M_{n+1} = s(M_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

On note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $IM_k \leq 10^{-3}$.

2. 49. Rotations, homothéties, Am. du Sud, nov 2003 (c)

Le plan complexe estmuni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.

2. Soit I le point d'affixe 1. On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique (C) de centre O. Sa position initiale est en I.

On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcouru le point A sur le cercle (C) après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).

On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\dfrac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\dfrac{\pi}{5}$ cm).

Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle (C) à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.

2. On pose $S_m = s_1 \circ s_1 \circ \ldots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul), $S'_n = s_2 \circ s_2 \circ \ldots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n \circ S_m$.

a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{6\pi}{5}$.

b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?

c. On appelle M le point d'affixe 6 et M' son image par f. Peut-on avoir $OM' = 240$? Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique (m, n) tel que $OM' = 576$.

Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$.

Correction

Partie A

1. $3y = 5(15 - x)$: comme 5 ne divise pas 3, il doit diviser y, donc $y=5k$; ceci donne alors

$$15k=5\left(15-x\right)\Leftrightarrow 15-x=3k\Leftrightarrow x=15-3k\,.$$

2. Comme l'unité est le centimètre, la distance parcourue sur le cercle lorsque A fait un angle θ est θ centimètres (définition du radian). Après p fois r_1 il a donc parcouru $p\frac{\pi}{3}$ cm et après q fois r_2, il a parcouru $q\frac{\pi}{5}$, soit au total $d=p\frac{\pi}{3}+q\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{15}\left(5p+3q\right)$.

On a alors $d=2,5\times 2\pi$ cm $\Leftrightarrow \frac{\pi}{15}\left(5p+3q\right)=5\pi \Leftrightarrow 5p+3q=5\times 15\Leftrightarrow 3q=5\left(15-p\right)$. On retombe donc sur l'équation précédente, ce qui donne $\begin{cases} p=15-3k \\ q=5k \end{cases}$.

Comme p et q doivent être positifs, on a $15-3k\geq 0\Leftrightarrow k\leq 5$ et $k\geq 0$; ceci donne donc les 6 couples

$$\left(p,q\right)=\left(15,0\right),\left(12,5\right),\left(9,10\right),\left(6,15\right),\left(3,20\right),\left(0,25\right).$$

Partie B

1. s_1 est la similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$, de rapport 4, s_2 est la similitude de centre O, d'angle $\frac{\pi}{5}+\pi=\frac{6\pi}{5}$ et de rapport 6 (attention au signe du rapport…).

2. On pose $S_m=s_1\circ s_1\circ\ldots\circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul), $S'_n=s_2\circ s_2\circ\ldots\circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f=S'_n\circ S_m$.

a. Pour S_m on a le rapport 4 répété m fois, donc $4^m=2^{2m}$ et pour angle $m\frac{\pi}{3}$; pour S'_n on a le rapport 6 répété n fois, soit $6^n=2^n\times 3^n$ et l'angle $n\frac{5\pi}{6}$, d'où un total de $2^{2m}\times 2^n\times 3^n=2^{2m+n}\times 3^n$ pour le rapport et $m\frac{\pi}{3}+n\frac{6\pi}{5}$ pour l'angle.

b. On a $144=12^2=2^4\times 3^2$, il faudrait $\begin{cases} 2m+n=4 \\ n=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$ et donc un angle de

$$\frac{\pi}{3}+2\frac{6\pi}{5}=\frac{5+36}{15}\pi=\frac{41}{15}\pi\neq 0\left[2\pi\right].$$

Ca colle pour le rapport mais pas pour l'angle.

c. Si OM' = 240, OM = 6, alors le rapport de similitude doit être de 40, ce qui est impossible puisque 5 n'apparait pas comme diviseur dans le rapport.

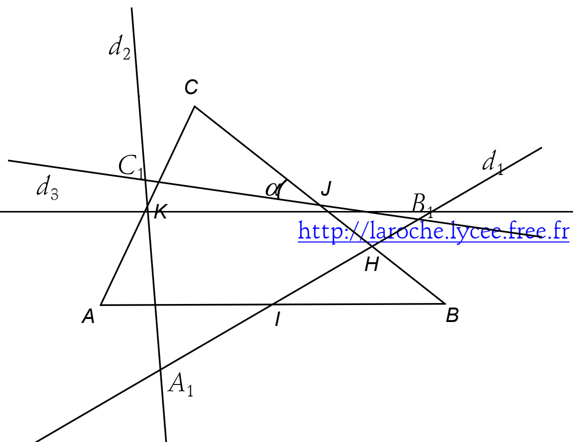
Avec OM' = 576, il faut $k=\frac{576}{6}=96=2^5\times 3^1\Rightarrow\begin{cases} 2m+n=5 \\ n=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$ donc l'angle est $\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{5}=\frac{28\pi}{15}$.

2. 50. Similitudes, Pondichéry, mai 2003 (c)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Première partie

ABC est un triangle direct du plan orienté. On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA]. Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure ci-contresur laquelle on raisonnera.



d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α .

d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α .

d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α .

A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2, et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.

2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

A - Construction de la figure

1. Placer les points A($-4-6i$), B(14), C($-4+6i$), A_1 ($3-7i$), B_1($9 + 5i$) et C_1($-3-i$).

2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.

3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.

On admettra que B_1, J, C_1 *d'une part, et* C_1, K, A_1 *d'autre part sont alignés.*

4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}\right)$.

On admettra que $\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}\right)=\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\pi/4$?

B - Recherche d'une similitude directes transformant ABC en $A_1B_1C_1$

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C respectivement en A_1, B_1 et C_1.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z+2-2i$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s.

2. a. Déterminer le rapport et l'angle de s.

b. Déterminer l'affixe du centre Ω de s.

3. Que représente le point Ω pour le triangle ABC ?

<u>Correction</u>

Première partie

1. HIB et HB_1J sont semblables : on a évidemment $\widehat{JHB_1}=\widehat{IHB}$; par ailleurs $\widehat{HJB_1}=\alpha$ de même que $\widehat{BIH}$ puisque c'est l'angle de rotation. Les triangles ont deux angles égaux, les triangles sont semblables.

2. Le troisième angle de chaque triangle est donc le même : $\widehat{HBI}=\widehat{HB_1J} \Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{A_1B_1C_1}$.

Le raisonnement tenu à partir de I est valable dans les rotations de centres J et K, soit $\widehat{BCA}=\widehat{B_1C_1A_1}$ et $\widehat{CAB}=\widehat{C_1A_1B_1}$ donc ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie

A. 1. A($-4 - 6i$), B(14), C($-4 + 6i$), A_1($3 - 7i$), B_1 ($9 + 5i$) et C_1 ($-3 - i$).

2. $I\left(\dfrac{-4-6i+14}{2}=5-3i\right)$; $J\left(\dfrac{14-4+6i}{2}=5+3i\right)$; $K\left(\dfrac{-4+6i-4-6i}{2}=-4\right)$.

3. L'alignement revient à montrer soit que $\arg\left(\dfrac{z_{B_1}-z_I}{z_{A_1}-z_I}\right)=0(\pi)$ soit que $z_{B_1}-z_I=k(z_{A_1}-z_I)$ avec k réel : on calcule de toutes manières $z_{B_1}-z_I=4+8i$ et $z_{A_1}-z_I=-2-4i$; on voit alors que $k = -2$.

4. Pour calculer l'angle des vecteurs, on calcule l'argument du quotient des affixes des deux vecteurs :

$$\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}\right) = \arg\left(\frac{z_{B_1} - z_I}{z_B - z_I}\right) = \arg\left(\frac{4+8i}{9+3i}\right) = \arg\frac{4}{3} + \arg\left(\frac{1+2i}{3+i}\right) = \arg\left(\frac{(1+2i)(3-i)}{9+1}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{5+5i}{10}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

5. Comme A, I et B sont alignés et que $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}\right) = \frac{\pi}{4}$, l'image de (AB) est $(IB_1) = (A_1B_1)$.

B. 1. On cherche a et b complexes tels que $\begin{cases} z_{A_1} = az_A + b \\ z_{B_1} = az_B + b \\ z_{C_1} = az_C + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-7i = a(-4-6i)+b \\ 9+5i = a14+b \\ -3-i = a(-4+6i)+b \end{cases}$; en résolvant on trouve bien $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,\ b = 2-2i$.

2. Le rapport est $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'angle est $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$. L'affixe du centre Ω est celle du point invariant : $z_\Omega = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_\Omega + 2 - 2i \Leftrightarrow z_\Omega = 4$.

3. Ω Est-il le centre du cercle circonscrit ? $\Omega B = 10$, $\Omega A = \Omega C = |-4 \pm 6i - 4| = \sqrt{100} = 10$. Donc oui.

2. 51. Longueur de spirale, Am. du Nord, mai 2003

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5-4i$, $z_1 = -1-4i$, $z_2 = -4-i$.

1. a. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'. Vérifier la relation : $\omega - z' = i(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega\ MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, lepoint A_{n+1}, est défini par $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose $u_n = A_nA_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. a. Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle ΩA_nA_{n+1}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

2. 52. Similitude, suites, Pondicherry 2009

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1+2i$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que : $S(O) = A$ et $S(A) = B$.

2. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1-i)z + i$.

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1-(1-i)^n$.

b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.

Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n. Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

2. 53. Similitude, suites, Bézout, La Réunion, juin 2003 (c)

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$. Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n\geq 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b. Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.

c. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4. a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\,;-3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathrm{Im}(z) = 1$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Correction

$$z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

1. f est de la forme $az+b$, c'est une similitude directe.

$f(i) = -\left(\sqrt{3}+i\right)i - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right) = -i\sqrt{3} + 1 - 1 + i + i\sqrt{3} = i$ donc Ω est invariant, c'est le centre de similitude. $z' - i = -\left(\sqrt{3}+i\right)(z-i) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}(z-i)$: rapport 2, angle $-\frac{5\pi}{6}$.

2. $\Omega M_0 = |z_0 - i| = \left|\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\frac{3+1}{16}} = \frac{1}{2}$. $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right) = -\frac{\pi}{6}$.

3. a. Figure facile…

b. Soit la propriété P_n : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$; P_0 est vraie car $2^0 e^{i0}(z_0 - i) = z_0 - i$. On utilise le résultat du 1. en remplaçant $-\frac{5\pi}{6}$ par $\frac{7\pi}{6}$:

$$z' - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}(z - i) \Rightarrow z_{n+1} - i = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}(z_n - i) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) = 2^{n+1} e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}(z_0 - i).$$

c. $\Omega M_n = \left| 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) \right| = 2^n \left| e^{i\frac{7n\pi}{6}} \right| \Omega M_0 = 2^n \frac{1}{2} = 2^{n-1}$.

$\Omega M_n \geq 10^2 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 100 \Leftrightarrow 2^n \geq 50 \Leftrightarrow n \geq 6$.

4. a. $7(-5) - 12(-3) = 1$; ok.

$\begin{cases} 7x - 12y = 1 \\ 7(-5) - 12(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(x+5) - 12(y+3) = 0 \Leftrightarrow 7(x+5) = 12(y+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 12k \\ y + 3 = 7k \end{cases}$ et donc

$$\begin{cases} x = -5 + 12k \\ y = -3 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Les complexes de Δ sont de la forme $z = x + i$, ils sont sur la droite $y = 1$, soit la droite horizontale passant par Ω. Pour que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$, il faut que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right) = 0[2\pi] = 2\pi k$; or $\left(\overrightarrow{\Omega M_0}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right) = \arg\left(\frac{z_n - i}{z_0 - i}\right) = \arg\left(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\right) = \frac{7n\pi}{6}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right) = -\frac{\pi}{6}$; on a donc $\left(\overrightarrow{\Omega M_0}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right) = \frac{7n\pi}{6} \Rightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right) = \frac{7n\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$ d'où l'équation $\frac{7n\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \Leftrightarrow 7n - 12k = 1$.

Il faut donc $\begin{cases} n = -5 + 12p \\ k = -3 + 7p \end{cases}, p \in \mathbb{Z}$. M_n a alors pour affixe $z_n = i + 2^{-5+12p} e^{i\frac{-35\pi}{6}} \frac{1}{2} e^{i\frac{-\pi}{6}} = i + 2^{-6+12p}$; le plus petit élément est atteint lorsque $n \geq 0$, le premier est pour $p = 1$, soit $n = 7$ et $z_n = i + 2^6 = i + 64$.

2. 54. Similitude, Polynésie, juin 2003

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives $1 + i$, 1, 3 et $2 + \frac{1}{2}i$.

Partie A

1. Soit Γ le cercle de centre Ω passant par A.

a. Montrer que Γ passe par C et D.

b. Montrer que le segment $[AD]$ est un diamètre de Γ.

c. Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer Γ. On note B la seconde intersection de Γ avec la droite (OA).

d. Montrer que le point O est extérieur au segment $[AB]$.

2. Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.

Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.

a. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.

b. Quel est le centre de S ?

Partie B

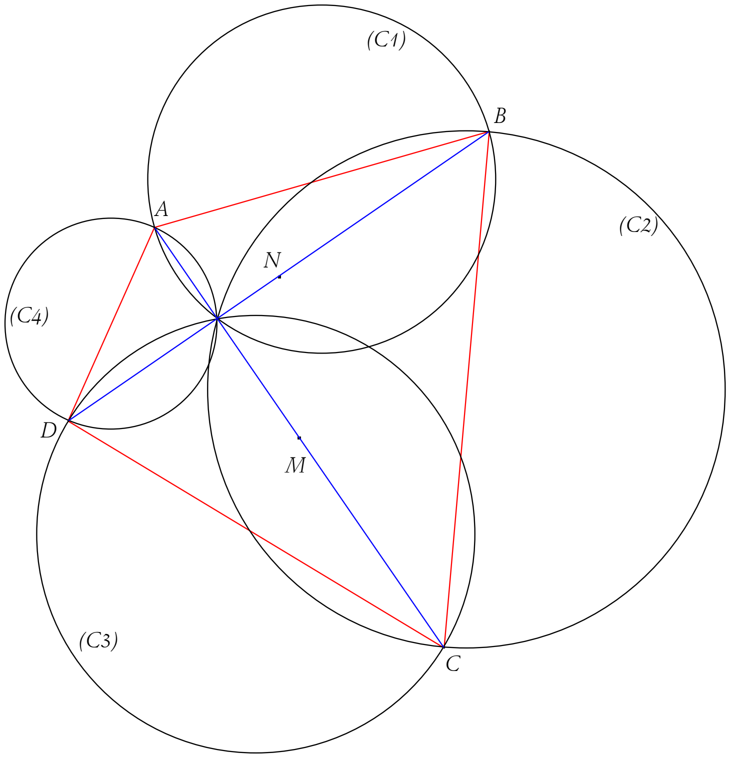
1. a. Déduire de la partie A. 2. que l'on a $OA \times OB = OC \times OD$.

b. En déduire le module de l'affixe z_B du point B. Déterminer un argument de z_B.

2. Déterminer l'écriture complexe de S.

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S $\circ$ S.

2. 55. Carré et rotation, Antilles sept 2002



Dans le plan, on considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ tels que $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On désigne par M lemilieu de $[AC]$ et par N celui de $[BD]$. On appelle (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles (C_1) et (C_3).

b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles (C_2) et (C_4).

c. Quelle est la nature du quadrilatère $INJM$? On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de $[PR]$.

2. 56. Similitude, La Réunion, juin 2002

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -i\bar{z}$.

a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe $1-i$.

b. Soit D' la droite d'équation $y=-1$, on appelle s' la réflexion d'axe D'.

Calculer une mesure de l'angle $\left(\vec{w}, \vec{u}\right)$. Déterminer géométriquement la composée $r = s \circ s$.

c. Déterminer l'écriture complexe de r.

2. Dans cette question on considère l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}i\bar{z} = \dfrac{z+z'}{2}$.

a. Soit le point A d'affixe $z=2+i$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p.

b. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y=-x$.

c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.

3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$. Construire l'image A' du point A par f. Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ, que l'on déterminera.

2. 57. Similitude & barycentre, Polynésie, sept 2001

Dans le plan complexe P rapporté a un repère orthonormal $(A\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm., on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$, et C tel que $ABCD$ soit un rectangle.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Déterminer l'affixe z_E de E.

2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_F = 6-i$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.

3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Déterminer les images de$C$ et de D par s.

d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle $ABCD$.

4. a. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que : $\left\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 9$.

b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

2. 58. Symétries axiales, Liban, juin 2001

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct $(\Omega\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 3 cm.

Partie A

Soit trois droites D_1, D_2 et D_3, sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$, $\overrightarrow{d_3}$, supposés unitaires et tels que $\overrightarrow{d_1} = \vec{u}$ et $\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_3}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$.

On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 etD_3, et f la composée $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, de ces trois réflexions.

1. Tracer ces trois droites.

2. a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r = S_2 \circ S_1$.

b. Caractériser la réflexion S telle que $r = S_3 \circ S$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\vec{d}$. Tracer la droite D.

c. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.

3. Justifier que le point E d'affixe $z_E = e^{i\frac{\pi}{12}}$ est un point de la droite D. Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = az + b$.

Partie B

1. Choisir un point A sur D. On note B l'image de A par S_1 et C l'image de B par S_2. Placer les points B et C.

2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.

3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC ?

2. 59. Rotations, symétries, translations, Asie juin 2001

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}\,.$$

a. Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z.

b. Montrer que $f = R \circ S$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).

c. Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe (D_1). Réaliser une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique 2 cm).

2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' telle que :

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.

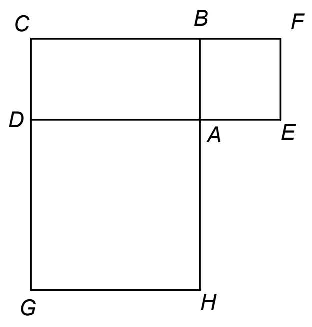
b. Montrer que $g = T \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).

c. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté (D_2)

d. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$? En déduire une construction de la droite (D_2), qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

2. 60. Homothéties, Polynésie, sept 2000

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle de sens direct, $AEFB$ et $ADGH$ sont des carrés de sens direct.



1. Le but de cette question est de montrer que les droites (AC), (EF) et (FH) sont concourantes. Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit

 * l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E,

 * l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.

a. Déterminer l'image de (CG) par h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$. De même déterminer l'image de (CF) par $h_1 \circ h_2$.

b. Justifier l'égalité $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$.

2. On veut montrer que la médiane issue de A dans le triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu de [EH].

a. Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BD}$ et conclure.

3. On étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A. On pose $AB = 1$ et $AD = k$.

a. Déterminer l'angle et le rapport de S.

b. Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO) pas S.

c. En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de S.

2. 61. Rotation et similitude

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$. Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images par f de A et de B.

b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par s, H le milieu du segment [BC] et H' son image par s.

a. Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à la droite (OA).

b. Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H' est le milieu de [OB].

c. Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

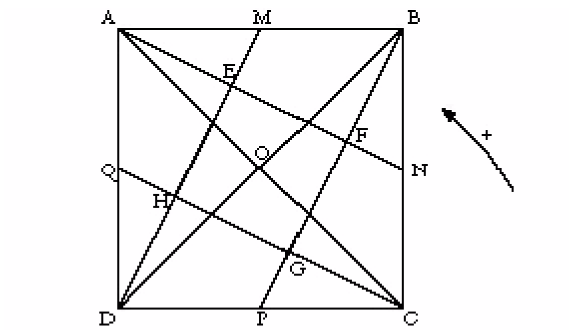
2. 62. Rotation

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-après.

ABCD est un carré de centre O et tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.

Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère EFGH est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré ABCD.



Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.

1. On se propose de démontrer que EFGH est un carré.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'image par r du point N, puis celle du segment [AN]. Déterminer l'image par r du point P, puis celle du segment [BP]. En déduire r(F) et la nature du triangle FOG.

b. Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.

2. Comparaison des aires des carrés ABCD et EFGH

a. Justifier les égalités AE = EH = DH et AE = 2QH.

b. Soit K l'image de H par la symétrie *s* de centre Q. Démontrer que AEHK est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED.

c. En déduire le rapport entre les aires des carrés ABCD et EFGH.

3. Généralisation de la question 1.

On suppose maintenant que les points M', N', P' et Q' vérifient respectivement les égalités :

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{BN'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\ \ \overrightarrow{CP'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DQ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

On construit le quadrilatère E'F'G'H' en traçant les droites (AN'), (BP'), (CQ') et (DM').

Que suffit-il de changer à la démonstration du 1. Pour démontrer que E'F'G'H' est un carré ?

<u>2. 63. Théorème de Ptolémée</u>

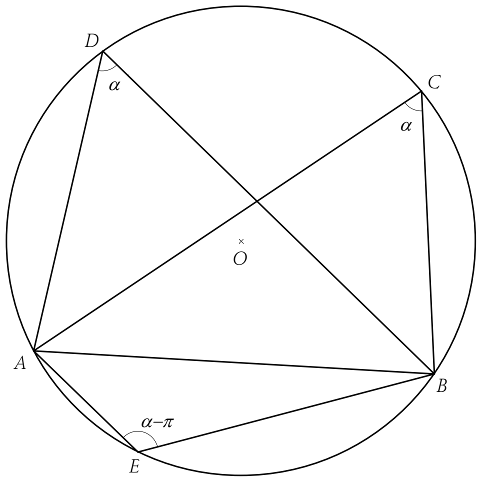
Prolégomènes

1. Retrouver la démonstration géométrique du « théorème de l'angle inscrit ».

2. Faire cette démonstration en utilisant les complexes.

Le problème

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.



1. Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D. On désigne par E l'image du point B.

a. Montrer que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$.

b. Montrer que E est sur la droite (BD). Marquer le point E sur la figure. On admettra que E est sur le segment $[BD]$.

c. Montrer que $AD \times BC = DE \times AC$.

2. a. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$ puis que $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$.

b. Soit S' la similitude directe de centre A qui transforme B en C. Montrer que D est l'image de E par cette similitude.

c. Prouver que $AB \times CD = BE \times AC$.

3. Utiliser ce qui précède pour démontrer la relation : $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

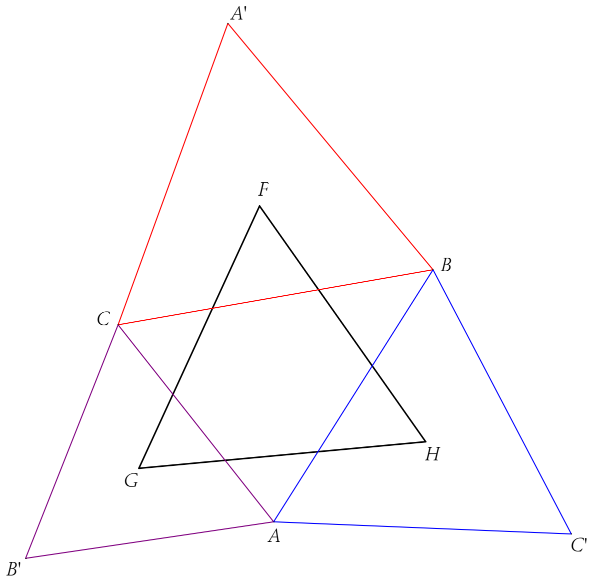
En déduire la formule d'addition des sinus.

Remarque : Cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée. Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du II$^{\text{ème}}$ siècle après J.-C. ; il utilisait cette relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

2. 64. Le théorème de Napoléon 3

On considère un triangle ABC direct de centre de gravité O. On construit les triangles équilatéraux CBA', ACB' et BAC' tels que les angles $\left(\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'B}\right)$, $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'C}\right)$, $\left(\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{C'A}\right)$ aient pour mesure $+\frac{\pi}{3}$. On désigne par F, G et H les centres des triangles équilatéraux.

Le but de l'exercice est de montrer de deux façons différentes que le triangle FGH est équilatéral direct.



1. a. Soit R la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Déterminer R(C') et R(C). En déduire que $CC' = BB'$ et que $\left(\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{BB'}\right)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

b. Montrer que $\overrightarrow{HO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$.

c. Montrer que $OH = OG$ et $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OG}\right)=-\frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

d. En déduire que FGH est équilatéral direct de centre O.

2. On note R_1, R_2 et R_3 les rotations d'angle $+\frac{2\pi}{3}$ de centres respectifs F, G et H.

a. Quelle est l'image de B par $f = R_1 \circ R_2 \circ R_3$? Déterminer la nature de f.

b. En déduire le centre et l'angle de la rotation $R = R_2 \circ R_3$.

c. On note S la réflexion d'axe (GH). Déterminer les axes des réflexions S_2 et S_3 telles que $R_2=S_2 \circ S$ et $R_3=S \circ S_3$. Montrer que ces axes se coupent en F' tel que $F'GH$ soit équilatéral direct.

d. Montrer que F' et F sont confondus et en déduire que FGH est équilatéral direct.

2. 65. Triangles équilatéraux

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = B$.

1. Déterminer la nature de $r_C \circ r_B \circ r_A$ et préciser la position du point E.

2. a. Montrer qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme $\boldsymbol{S}$ cette similitude.

b. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BD}\right)$. En déduire $\boldsymbol{S}(E)$.

3. Soit Ω le centre de la similitude $\boldsymbol{S}$.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrit aux triangles ABC et DBE. Construire Ω.

4. a. Démontrer que $\boldsymbol{S}$ transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par $\boldsymbol{S}$ du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD].

En déduire que l'image de C par la similitude $\boldsymbol{S}$ est le point I, milieu du segment [DE].

2. 66. Similitude

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $AB = AC = l$, où l est un réel fixe strictement positif et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On note D le symétrique de A par rapport à B, O le milieu de $[CD]$ et (Γ) le cercle de diamètre $[CD]$. Placer sur une figure les points A, B, C, D, O et (Γ).

On désigne par s la similitude directe qui transforme D en B et B en C et on se propose de déterminer, par deux méthodes indépendantes, les éléments caractéristiques de s, notamment son centre I.

1. Méthode géométrique

a. Déterminer le rapport k et l'angle α de la similitude s ; en déduire l'existence de I.

b. Montrer que $(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IC})=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ (**1**) et que $IC = 2\,ID$ (**2**).

c. A l'aide de (**1**), prouver que I appartient au cercle (Γ), puis, en utilisant (**2**), prouver que $ID = l$. Etablir enfin que $BI = BC$.

d. Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de $[IC]$. Préciser la nature du quadrilatère $CADI$. Placer le point I.

2. Utilisation des complexes

On pose $\vec{u}=\frac{1}{l}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\frac{1}{l}\overrightarrow{AC}$ et on considère le repère orthonormal $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe. On note z_0 l'affixe de I.

a. Déterminer les affixes des points B, C et D.

b. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s. Déterminer z_0 et préciser la position de I.

2. 67. Similitude

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité est le centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre du cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de $[BC]$; N celui de $[CA]$ et P celui de $[AB]$. Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m, n, p.

1. Dans cette question $m=-1-3i$ et $n = 2$. Construire les triangles ABC et MNP.

2. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à chaque point d'affixe $z = x + iy$ associe le point d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que $z'=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z+m+n+p)$.

Quelle est la nature de f ? Donnez ses éléments caractéristiques.

3. a, b, c désignent les affixes respectives des points A, B, C. Montrez que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PA}$. En déduire que $a = n + p - m$. Exprimez de manière analogue b et c en fonction de m, n et p.

4. On pose $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. On désigne par a', b' et c' les affixes de A', B' et C'. Démontrez que : $a' = (1+i)\,m$, $b' = (1+i)\,n$, $c' = (1+i)\,p$.

En déduire que $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et que A' appartient à (BC).

Montrez de même que B' appartient à (AC) et que C' appartient à (AB).

5. Montrez que les triangles MNP et $A'B'C'$ sont directement semblables (précisez le centre de la similitude directe transformant le triangle MNP en $A'B'C'$).

6. Construisez les points A', B' et C' sur la figure du 1.

2. 68. Similitude et barycentre

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$; unité graphique : 5 cm.

1. A, B et C désignent les points d'affixes respectives a, i et -1. On note g l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe

$$z' = \frac{a+z+iz}{3}.$$

a. A tout point M d'affixe z, on fait correspondre M_1 d'affixe iz. On note M' l'isobarycentre des points A, M et M_1. Exprimer en fonction de z l'affixe de M'.

b. Montrer que $g(B) = O$ si et seulement si $a = 1 - i$ et que, dans ces conditions, les points O, A et I sont alignés, I désignant le milieu de $[BC]$. Placer les points O, A, B, C et I sur une figure.

2. Dans la suite de l'exercice on prendra $a = 1 - i$.

a. Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.

b. Prouver que A, B et Ω sont alignés.

3. a. Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$. Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).

b. Soit O' l'image de O par g. Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).

c. En déduire que les points I, O, O' et A sont alignés.

4. Déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O'}\right)$ et montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[BO']$. En déduire une construction géométrique de Ω.

<u>2. 69. Réflexion - Rotation</u>

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère l'application f qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = i\bar{z}.$$

1. Montrer que $f = R \circ S$ où S est la réflexion d'axe $\left(O, \vec{u}\right)$ et R une rotation dont on précisera les éléments.

2. En utilisant une décomposition de R en composée de deux réflexions, montrer que f est une réflexion dont on précisera l'axe.

3. Soit g l'application du plan dans lui même qui au point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' tel que

$$z'' = i\bar{z} + 1 + i$$

a. Caractériser l'application T telle que $g = T \circ f$.

b. En déduire une construction géométrique , pour tout point M du plan , du point M'' image de M par g.

c. Montrer que pour tout point M du plan, le milieu du segment $[MM'']$ appartient à une droite fixe.

<u>2. 70. Barycentres+similitude</u>

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O}\,;\vec{u}, \vec{v})$.

Lorsqu'un point de P est désigné par une lettre majuscule (A, B, G, ..., M_1, M', ...), on convient de désigner son affixe complexe par la lettre minuscule correspondante (a, b, g, ..., m_1, m', ...).

Soit A, B, C trois points du plan P. On note G leur isobarycentre.

À tout point M du plan P on associe les points M_1, M_2, M_3 isobarycentres respectifs de {M, B, C}, {M, A, C} et {M, A, B}. On note enfin M' l'isobarycentre de {M_1, M_2, M_3).

1. a. Tracer le triangle ABC et son isobarycentre G sur une figure.

Exprimer $\overrightarrow{\text{OG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{OA}}$, $\overrightarrow{\text{OB}}$ et $\overrightarrow{\text{OC}}$. En déduire l'expression de g en fonction de a, b, c.

b. Exprimer de même m_1, m_2, m_3, puis m' en fonction de a, b, c, m.

2. Soit f la transformation qui, à tout point M de P, associe le point M'.

a. Montrer que $m' - g = \frac{1}{3}(m - g)$.

b. En déduire la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques.

c. Placer sur la figure l'image A'B'C' du triangle ABC par la transformation f.

d. Déterminer le rapport des aires de ces deux triangles.

2. 71. Ligne de niveau+similitude

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB=\sqrt{2}$, AD=1 ; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$; I désigne le milieu de [AB].

Partie A

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2-MB^2=1$.

1. Vérifier que C et I appartiennent à (E).

2. Déterminer et construire l'ensemble (E) (on pourra utiliser les coordonnées (x, y) des points M…)

3. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires. On note K leur point d'intersection.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z'=az+b$, a et b étant des nombres complexes avec a non nul.

1. Déterminer a et b pour que S(D)=C et S(C)=B.

2. Soit T la similitude directe qui, au point d'affixe z associe le point d'affixe z' tel que $z'=-\frac{i\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$.

Déterminer le rapport et l'angle de T.

3. Déterminer l'image de B par T.

4. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

5. Quel est le centre de la similitude T ?

2. 72. Similitude et Bézout

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 1 cm.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=(3+4i)z\,.$$

1. Quelle est la nature de f ? Déterminer ses éléments géométriques ; on donnera une valeur approchée d'une mesure en radians de son angle à 10^{-2} près.

2. a. Soit n un entier relatif, on considère le point d'affixe $(n+i)$ noté A_n. Placer les points A_{-1} , A_0, A_1 sur une figure. Calculer les affixes de leurs images par f et placer les points correspondants.

b. Montrer que tous les points A'_n sont alignés. Calculer la distance $A'_n\,A'_{n+1}$.

3. a. Démontrer que si M a des coordonnées entières, il en est de même pour $f(M)$.

b. Tout point du plan à coordonnées entières a-t-il un antécédent à coordonnées entières ?

4. a. Trouver les couples (x,y) d'entiers relatifs qui vérifient l'équation : $3x-4y=-4$.

b. Déterminer les valeurs de l'entier relatif b pour lesquelles le point M' d'affixe $-4+bi$ possède un antécédent M par f à coordonnées entières.

2. 73. Spirale

Soit A le point du plan complexe d'affixe 1. On complétera la figure jointe au sujet et on la rendra avec la copie.

1. On se donne les points B d'affixe $\frac{3}{4}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et C d'affixe $\frac{9}{16}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Placer B et C sur la figure. Déterminer les valeurs de a et b complexes pour que la transformation F définie par $F(z)=az+b$ transforme A en B et B en C.

2. Soit la transformation f du plan complexe définie par

$$f : M(z) \to M'(z') \,/\, z' = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + i\frac{3}{8}\right)z.$$

Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.

3. On construit les points N_k de la manière suivante : $N_0=A$ et pour tout k, N_k a pour affixe z_k telle que $z_{k+1} = f(z_k)$. Placer sur la figure les point N_k, $1 \le k \le 12$. Que peut-on dire de N_{12} ? Quelle est la nature de la suite $d_k = ON_k$? Exprimer sous forme trigonométrique l'affixe z_k des points N_k.

4. Justifier que les triangles N_kON_{k+1} sont tous semblables. Quelle est la nature de la suite $D_k = N_kN_{k+1}$? Donner son expression en fonction de k et de D_0 ; exprimer en fonction de k et D_0 la somme $S_n = D_0 + D_1 + \ldots + D_n$ où n est un entier quelconque.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la longueur $D_0 = N_0N_1$, en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la longueur de la ligne polygonale $N_0N_1N_2 \ldots N_{11}N_{12}$. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini ? Quelle signification concrète a cette limite ?

6. On considère maintenant les points $P(t)$ du plan complexe d'affixe $u(t)$ définie par $u(t) = e^{bt+it}$ où $b = \dfrac{\ln(3/4)}{\pi/6}$ et t un réel quelconque. Montrer que $f(u(t)) = u(t + \dfrac{\pi}{6})$ (on pourra se rappeler que $\dfrac{3}{4} = e^{\ln(3/4)}$).

2. 74. Rotation et similitude

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$.

On désigne par : r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; r_C la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B. Préciser alors la position du point E.

2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme S cette similitude. Calculer le rapport $\dfrac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$. En déduire que $S(E) = D$.

3. Soit ω le centre de la similitude S.

Montrer que ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire ω.

4. a. Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre $[BD]$.

En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment $[DE]$.

2. 75. Cercle et similitude

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$.

Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1+i)z - 3 + 3i|^2 + |z - 6|^2 = 54.$$

1. Première méthode

a. En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de (C).

b. En déduire la nature de (C).

c. Construire (C).

2. Deuxième méthode

On désigne par s la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_1 = s(M)$ d'affixe

$$z_1 = (1 + i)\, z - 3 + 3i$$

et on désigne par t la translation qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_2 = t(M)$ d'affixe $z_2 = z - 6$.

a. Caractériser géométriquement ces deux transformations.

b. Déterminer les antécédents respectifs S et T de O par s et t.

c. Calculer le rapport $\dfrac{SM}{OM_1}$ puis le rapport $\dfrac{TM}{OM_2}$.

d. En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par : $2SM^2 + TM^2 = 54$.

e. Calculer l'affixe du barycentre G du système $\{(S, 2), (T, 1)\}$.

f. Montrer que l'ensemble (C) est défini par $MG^2 = 8$.

g. En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).

2. 76. Similitude indirecte (c)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

On considère les points A,B,C et D d'affixes respectives :

$$a = 1\ ;\ b = e^{i\frac{\pi}{3}}\ ;\ c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. a. Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.

b. Représenter les points A, B, C et D.

2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude plane directe s de centre O qui transforme A en C.

3. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.

4. On considère la transformation φ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,\overline{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ, la réflexion d'axe δ.

a. Soit r la transformation qui, à tout point M_1 d'affixe z_1, associe le point M'_1 d'affixe z'_1 telle que : $z'_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

Exprimer r sous sa forme complexe simplifiée en faisant apparaître l'affixe de son centre.

b. Exprimer φ sous la forme d'une composée de deux transformations que l'on déterminera.

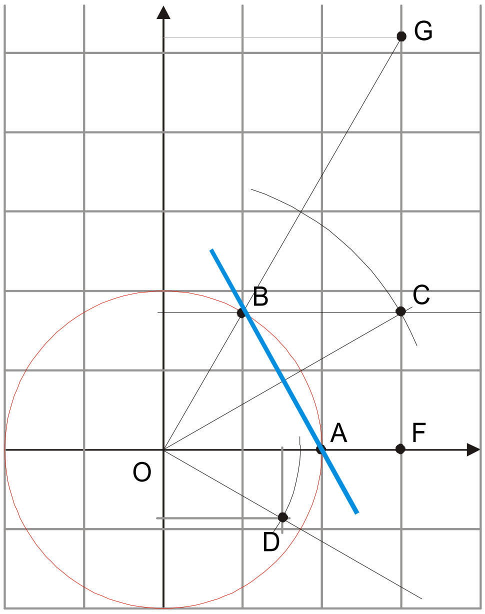
c. Déterminer deux points invariants de φ et en déduire la nature de φ.

d. Déterminer graphiquement φ (C).

Correction

1. a. $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |c| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right) \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\overline{c}}{2}.$$



2. On a s(O) = O et s(A) = C. s est de la forme $z' = mz + p$.

En remplaçant : $\begin{cases} 0 = m \times 0 + p \\ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = m \times 1 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ m = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$ donc s de la forme : $z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z$. s est une SD de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

3. Les points F, G et C sont alignés, si et seulement si l'angle $\left(\overrightarrow{FG}\,;\overrightarrow{FC}\right) = k\pi$ avec k relatif, autrement dit, si $\arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_G - z_F}\right) = k\pi$ ou si $\frac{z_C - z_F}{z_G - z_F}$ est un nombre réel.

$z_C = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_F = z_D' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_D = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}$ et $z_G = z_C' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_C = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

On remarque que les points F, C et G ont même abscisse, donc ils sont tous sur la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$.

Dans le cas où on ne s'en serait pas aperçu, on continue et on a : $\frac{z_C - z_F}{z_G - z_F} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{3}$. Les points F, G et C sont donc alignés.

4a. $r : z_1 \mapsto z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_1 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Cherchons un éventuel point invariant : ω invariant par r si et seulement si :

$$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\omega + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow \omega = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\omega + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \omega\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow \omega\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow \omega = 1 = z_A.$$

r est donc la rotation de centre A, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$. Sa forme complexe est $z_1' - 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_1 - 1\right)$.

4b. Il est clair que φ est de la forme : $\varphi : z \overset{\sigma_{(OA)}}{\mapsto} \overline{z} = z_1 \overset{r}{\mapsto} z'$, on a donc $\varphi = r \circ \sigma_{(OA)}$ où $\sigma_{(OA)}$ est la réflexion d'axe (OA).

4c. Il est clair que A est invariant par $\sigma_{(OA)}$ et par *r*, donc par φ. Calculons φ (B) :

$$z_B' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\overline{z}_B + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_B.$$

A et B sont invariants par φ, qui admet donc au moins deux points invariants, d'après le cours, φ est soit l'identité (ce qui n'est pas le cas), soit une réflexion. En l'occurrence, c'est la réflexion d'axe (AB).

Graphiquement, φ (C) = O.