Géométrie — Exercices

1. 1. QCM, France 2009

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la répons exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1\,;2\,;-1)$, $B(1\,;1\,;0)$, $C(9\,;-1\,;-2)$, $S(1\,;1\,;1)$.

On admet qu'une équation du plan (ABC) est $x+2y+2z-3=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

a. $\begin{cases} x=1-y \\ y=2-4t \quad, t\in\mathbb{R} \\ z=-1+3t \end{cases}$ b. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1-t, t\in\mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$ c. $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2t, t\in\mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$

2. Les coordonnées du point S' symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

a. $\left(\frac{10}{9}\,;\frac{11}{9}\,;\frac{10}{9}\right)$ b. $\left(\frac{5}{9}\,;\frac{1}{9}\,;\frac{1}{9}\right)$ c. $\left(\frac{7}{9}\,;\frac{5}{9}\,;\frac{5}{9}\right)$

3. Le triangle ABC est :

a. isocèle b. rectangle en A c. rectangle en B

4. L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9$ est :

a. un plan passant par S b. une sphère passant par S c. une sphère de centre S

1. 2. QCM, Pondicherry 2009

4 points

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées (1, 1, 0), B de coordonnées (2, 0, 3), C de coordonnées (0, –2, 5) et D de coordonnées (1, –5, 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

1. 3. QCM, France et La Réunion 2008

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\right)$.

On note I son centre et J le milieu de $[AI]$.

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), $(B, 1)$ et $(D, 1)$ lorsque :

a. $m = -2$ b. $m = 2$ c. $m = -1$ d. $m = 3$

2. a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$ est :

a. la médiatrice de $[AC]$. b. le cercle circonscrit au carré $ABCD$.

c. la médiatrice de $[AI]$. d. le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

4. L'ensemble des points M du plan tels que $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ est :

a. la médiatrice de $[AC]$. b. le cercle circonscrit au carré $ABCD$.

c. la médiatrice de $[AI]$. d. le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

1. 4. QCM, Antilles - Guyane 06/2008

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $\begin{cases} 2x-6y+2z-7=0 \\ -x+3y-z+5=0 \end{cases}$ est :

Réponse A : l'ensemble vide	Réponse B : une droite
Réponse C : un plan	Réponse D : réduit à un point.

2. Les droites de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=2-3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x=2+t' \\ y=-2-t',\ t'\in\mathbb{R} \\ z=4+2t' \end{cases}$, sont :

Réponse A : parallèles et distinctes	Réponse B : confondues
Réponse C : sécantes	Réponse D : non coplanaires

3. La distance du point $A(1\,;-2\,;1)$ au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

Réponse A : $\dfrac{3}{11}$	Réponse B : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$
Réponse C : $\dfrac{1}{2}$	Réponse D : $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$.

4. Le projeté orthogonal du point $B(1\,;6\,;0)$ sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :

Réponse A : $(3\,;1\,;5)$	Réponse B : $(2\,;3\,;1)$
Réponse C : $(3\,;0\,;2)$	Réponse D : $(-2\,;3\,;-6)$

1. 5. QCM

Question 1 $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\ldots$

a) a^2 b) $\frac{1}{2}a^2$ c) $-a^2$ d) $-\frac{1}{2}a^2$

Question 2 Si $\vec{u}\perp(\vec{v}-\vec{w})$ et si $\vec{v}\perp(\vec{u}-\vec{w})$ alors

a) $\vec{w}\perp(\vec{u}-\vec{v})$ b) $\vec{u}\perp\vec{v}$ et $\vec{u}\perp\vec{w}$ c) $\vec{v}\perp\vec{w}$ d) $\vec{u}\perp\vec{v}$ mais pas necessairement $\vec{u}\perp\vec{w}$

Question 3 On considère un cube $ABCDIJKL$ et on munit l'espace du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}\right)$. La distance du point J au plan (BIK) est :

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Question 4 Les plans P et P' d'équations respectives : $3x-5y+2z-1=0$ et $6x-10y+z-3=0$ sont des plans :

a) orthogonaux b) parallèles c) sécants d) strictement parallèles

Question 5 On pose A(1 ; 0 ; −1), B(0 ; 1 ; 1), P (2 ; 0 ; 1), Q(1 ; 1 ; 0) et R(1 ; 0 ; 1). L'intersection de la droite (AB) avec le plan (PQR) est :

a) le point $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ b) la droite (AB) c) le point $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ d) n'existe pas

Question 6 On considère un cube *ABCDEFGH* et on munit l'espace du repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. Le plan *CFH* a pour équation :

a) $x-y+z=2$ b) $x+y+z=2$ c) $x+y-z+2=0$ d) $x+y-z=2$

Question 7 On considère un plan P d'équation $x+2y-z-4=0$ et la droite (d) définie par le point $A(1\,;-3\,;0)$ et le vecteur directeur $\vec{u}=(-1\,;0\,;2)$. Le plan P et la droite (d) sont sécants en un point dont l'abscisse est :

a) 4 b) 0 c) −2 d) 1

Question 8 On considére trois plans d'équations respectives :

$$x+2y-z-4=0\ ;\ -2x+3y+z-1=0 \text{ et } -5x+4y+3z+2=0.$$

L'intersection de ces trois plans est :

a) vide b) un point c) une droite de vecteur directeur $\vec{u}=\left(\frac{5}{7};\frac{1}{7};1\right)$ d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$

Question 9 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(-1\,;0\,;-1)$ et $C(2\,;1\,;-3)$. L'isobarycentre *G* du triangle *OBC* a pour coordonnées :

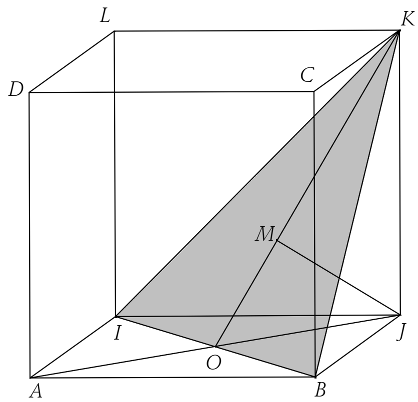
a) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{-4}{3}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3};1;\frac{5}{3}\right)$ c) $(-1\,;0\,;2)$ d) $\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{3};\frac{2}{3}\right)$

Question 10 On peut caractériser la demi-droite [*AB*) comme étant l'ensemble des barycentres des points pondérés (*A*, *a*) et (*B*, *b*) avec *a* et *b* réels tels que $a+b$ n'est pas nul et :

a) $\frac{a}{a+b}\geq 0$ b) *a* et *b* de même signe c) *a* et *b* de signes opposés d) $\frac{b}{a+b}\geq 0$

Question 11

On considère un cube *ABCDIJKL* et on munit l'espace du repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AD}\right)$.



La distance *JM* du point *J* au plan (*BIK*) est :

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Question 12

L'intersection des deux plans (*P*) et (*P*') d'équations respectives $x+z-1=0$ et $y+2z+4=0$ est une droite dont une représentation paramétrique est :

a) $\begin{cases} x=-t-1 \\ y=2t \\ z=t+2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-4 \\ z=-t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+2 \\ z=-t+1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t+4 \\ z=t \end{cases}$

1. 6. Fesic 2003 exo 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A(0 ; 4 ; −1), B(−2 ; 4 ; −5), C(1 ; 1 ; −5), D(1 ; 0 ; −4) et E(2 ; 2 ; −1).

a. Une équation du plan (ABC) est $2x + 2y - z - 9 = 0$.

b. Le point E est projeté orthogonal de D sur (ABC).

c. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

d. Le point Ω(−1 ; 2 ; −3) est le centre d'une sphère passant par A, B, C et D.

1. 7. QCM, Am. du Nord 2007

3 points

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P) le plan dont une équation est : $2x+y-3z+1=0$. Soit A le point de coordonnées $(1\,;11\,;7)$.

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$. »

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2-2y$.

On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0)=0$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. »

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0\le u_n\le 7$. »

Correction

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$. »

Calculons $\overrightarrow{AH}=(-1\,;-9\,;-6)$ et le vecteur normal à (P) : $\vec{n}=(2\,;1\,;-3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc c'est **faux**.

Nota : on peut chercher les coordonnées de H : comme H est le projeté orthogonal de A sur (P), alors $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k\,\vec{n}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_H-1=2k \\ y_H-11=k \\ z_H-7=-3k \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x_H=1+2k \\ y_H=11+k \\ z_H=7-3k \end{cases}$ (1). De plus, H appartient à (P), alors : $2(1+2k)+(11+k)-3(7-3k)+1=0$, $14k-7=0$.

On en déduit que $k=\dfrac{1}{2}$. En remplaçant dans (1), on obtient $\left(2\,;\dfrac{23}{2}\,;\dfrac{11}{2}\right)$.

2. (E) : $y'=2-2y$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. »

Les solutions de (E) sont $u(x)=Ce^{-2x}-\dfrac{2}{-2}=Ce^{-2x}+1$; avec $u(0)=0$ on a $C=-1$ et $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=1-e^{-2\frac{\ln 2}{2}}=1-\dfrac{1}{e^{\ln 2}}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ donc **vrai**.

3. $u_0=2$; $u_{n+1}=\sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \le u_n \le 7$. »

$u_n \ge 0$ est évident ; par récurrence : $u_0 = 2 \le 7$ et $u_n \le 7 \Leftrightarrow 7u_n \le 49 \Rightarrow \sqrt{7u_n} \le \sqrt{49} = 7$ donc **vrai**.

1. 8. QCM, La Réunion 2006

4 points

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point. Toute réponse juste rapporte 0,5 point. Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.

a. La distance du point O au plan P est égale à 1.

b. La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.

c. Le vecteur $\vec{n}\left(1\,;\dfrac{3}{2}\,;2\right)$ est un vecteur normal au plan P.

d. Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point $A(1\,;1\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;-4\,;-2)$.

a. La droite D est parallèle au plan P.

b. La droite D est orthogonale au plan P.

c. La droite D est sécante avec le plan P.

d. Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

3. On désigne par E l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$. Soit le point $A(1\,;1\,;1)$.

a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.

b. L'ensemble E est une droite passant par A.

c. L'ensemble E est un plan passant par A.

d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;-3\,;2)$.

4. $ABCD$ est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

a. Le plan P contient toujours le point D.

b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment $[BC]$.

1. 9. QCM espace Asie 2005

3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on appelle D la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ et P le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse *exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.*

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1	Le point M de coordonnées $(-1 ; 3 ; 2)$ appartient à D	Le point N de coordonnées $(2 ; -1 ; -1)$ appartient à D	Le point R de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ appartient à D
2	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; -3)$ est un vecteur directeur de D	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de D	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur directeur de D
3	D est incluse dans P	D est strictement parallèle à P	D est sécante à P
4	Le point G de coordonnées $(1 ; 3 ; -2)$ appartient à P	Le point H de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$ appartient à P	Le point K de coordonnées $(1 ; 3 ; -1)$ appartient à P
5	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à P	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à P	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à P
6	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan P est $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan P est 14	La distance du point T de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ au plan P est $2\sqrt{3}$

1. 10. QCM, Amérique du Nord 2004

3 points

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment $[AB]$ et J le centre de gravité de ABC. Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés $S_m = \{(A, 1) ; (B, m) ; (C, 2m)\}$. Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 point, chaque réponse fausse ou illisible enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à 0.

Affirmation	V ou F
G_1 est le milieu du segment $[CI]$.	
G_1 est barycentre de $\left\{(J, 2) ; \left(C, \frac{2}{3}\right)\right\}$.	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.	
Pour tout m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{AG_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG_{-1}}$.	
$IBG_{-1/2}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

1. 11. QCM, Asie 2004

4 points

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle P le plan d'équation $2x-y+5=0$ et Q le plan d'équation $3x+y-z=0$.

1. Montrer que P et Q sont sécants en une droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 5 \\ z = 5\alpha + 5 \end{cases}$$ où α est un nombre réel.

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

• Affirmation 1 : D est parallèle au plan R d'équation : $-5x + 5y - z = 0$.

Soit D' la droite de l'espace de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -3\beta \\ y = 1 + \beta \\ z = 2 + 2\beta \end{cases}$ où β est un nombre réel.

• Affirmation 2 : D et D' sont coplanaires.

1. 12. Vrai-Faux, Centres étrangers 06/2008

4 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(2\,;1\,;-1)$, $B(-1\,;2\,;4)$, $C(0\,;-2\,;3)$, $D(1\,;1\,;-2)$ et le plan (P) d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots VRAI ou FAUX à la réponse choisie. Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.
2. Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan (P).
3. Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
4. Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.
5. Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
6. Affirmation 6 : la distance du point C au plan (P) est égale à $4\sqrt{6}$.
7. Affirmation 7: la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan (P).
8. Affirmation 8 : le point $E\left(-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

1. 13. Vrai-Faux justifié, Liban 2008

5 points

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

   Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$.

   Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ ».

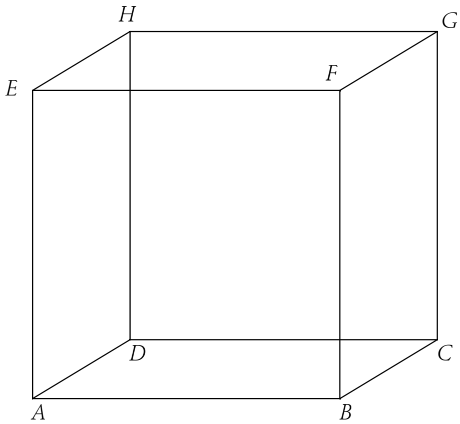
4. On considère l'équation (E) suivante :

$$z^2+2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z+1=0.$$

Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube *ABCDEFGH* d'arête 1, représenté ci-contre.



Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan *(BDE)* ».

Proposition 6 : « les droites *(EB)* et (*ED*) sont perpendiculaires ».

1. 14. Vrai-Faux justifié, Asie 2008

4 points

A. Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausrse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

* $P_1 \cap P_2$ *désigne l'ensemble des points communs aux plans* P_1 *et* P_2.

* *L'écriture* $P_1 \cap P_2=\varnothing$ *signifie que les plan* P_1 *et* P_2 *n'ont aucun point commun.*

1. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$ et $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$, alors on peut conclure que P_1 et P_3 vérifient $P_1 \cap P_3 \neq \varnothing$.

2. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \cap P_3=\varnothing$, alors on peut conclure que P_1, P_2 et P_3 sont tels que $P_1 \cap P_2=\varnothing$ et $P_2 \cap P_3=\varnothing$.

3. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$ et $P_2 \cap P_3=\varnothing$, alors on peut conclure que P_2 et P_3 vérifient $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$.

1. Si P_1 et P_2 sont deux plans distincts et D une droite de l'espace vérifiant : $P_1 \cap D \neq \varnothing$ et $P_1 \cap P_2=\varnothing$, alors on peut conclure que $P_2 \cap D \neq \varnothing$.

B. Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

* P_1 d'équation $x+y-z=0$, * P_2 d'équation $2x+y+z-3=0$, * P_3 d'équation $x+2y-4z+3=0$.

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'interseclion, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

1. 15. Vrai-Faux justifié, Liban 2007

5 points : Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = 2 - \dfrac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5 - \dfrac{3t}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On note A le point de coordonnées (2 ; −1 ; 1), B le point de coordonnées (4 ; −2 ; 2) et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. Proposition 1 : « La droite (d) est parallèle à l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$ ».

2. Proposition 2 : « Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. Proposition 3 : « La mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».

4. Soit G le barycentre des points pondérés (A ; −1), (B ; 1) et (C ; 1).
Proposition 4 : « Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».
5. Proposition 5 : « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan (P) d'équation $x + 3z - 5 = 0$ ».

1. 16. VF justifié, Antilles-Guyane, sept 2010, 4 pts

L'exercice comporte quatre propositions indépendantes. Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.

1. L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, vérifiant $|z-2| = |z-2i|$ est la droite d'équation $y = x$.

2. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes a, b et c vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.

3. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées (2 ; 3 ; 4) et admettant le vecteur $\vec{u}\left(1\,;2\,;3\right)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = 3t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

4. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La sphère de centre A(1 ; 1 ; 1) et de rayon 10 est tangente au plan P d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

1. 17. Exercice de base dans l'espace - 1

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées :

$$A(-1\,;0\,;2),\ B(3\,;2\,;-4),\ C(1\,;-4\,;2),\ D(5\,;-2\,;4)$$

On considère les points I, J, K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et J est tel que $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. a. Montrer que I, J et K ne sont pas alignés.
b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que (IJK) et (AD) sont sécants en un point L dont on donnera les coordonnées.

d. Déterminer la valeur du réel k tel que $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AD}$.

1. 18. Exercice de base dans l'espace - 2

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées :

$$A(-1\,;2\,;1),\ B(1\,;-6\,;-1),\ C(2\,;2\,;2).$$

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) orthogonale au plan (ABC) passant par le point $D(0\,;1\,;-1)$.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H avec le plan (ABC). Quelle est la distance de D au plan (ABC) ?.

5. Soit M un point quelconque de (DC) de paramètre t (soit $\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DC}$, t réel) ; vérifier que la distance AM est minimale lorsque $t=-\dfrac{5}{14}$. En déduire les coordonnées du point Q, projeté orthogonal de A sur (DC).

1. 19. Exercice de base dans l'espace - 3

P_1, P_2 et P_3 sont trois plans d'équations cartésiennes :

P_1 : $x-2y+z-5=0$

P_2 : $3x+5y+7z+4=0$

P_3 : $y+z+3=0$.

1. Montrer que P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

2. Déterminer une équation paramétrique de l'intersection D de P_1 et P_2.

3. En déduire que P_1, P_2 et P_3 ont un unique point commun et calculer ses coordonnées.

1. 20. Exercice de base dans l'espace - 4

Soit le plan P d'équation $2x+3y+z-1=0$ et le point A (1 ; 4 ; 1).

1. Déterminer la distance du point A au plan P.

2. Calculer le rayon de l'intersection de la sphère de centre A et de rayon 5 avec le plan P.

1. 21. Exercice de base dans l'espace - 5

Soit $ABCD$ un losange de centre O avec $OB = 2OA$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right)\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=0$.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2+MC^2-2MD^2=-6OA^2$.

1. 22. Exercice de base espace - 6, N. Calédonie 2003

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(3\,;0\,;10)$, $B(0\,;0\,;15)$ et $C(0\,;20\,;0)$.

1. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point $E(9\,;0\,;0)$.

c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $20x+9y+12z-180=0$.

d. Montrer que le système $\begin{cases} x=0 \\ 4y-3z=0 \\ 20x+9y+12z-180=0 \end{cases}$ a une solution unique. Que représente cette solution ?

e. Calculer la distance OH, en déduire que $EH = 15$ et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre $OEBC$, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en 2. c. ?

1. 23. Basique, Am. du Sud remplt 2007

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2\,;8\,;4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;5\,;-1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x-y-z=7$ et $x-2z=11$.

Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').

Montrer que le vecteur de coordonnées $(2\,;1\,;1)$ est un vecteur directeur de (d').

3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées $(-3\,;3\,;5)$ et le point H' de coordonnées $(3\,;0\,;-4)$.

a. Vérifier que H appartient à (d) et que H' appartient à (d').

b. Démontrer que la droite (HH')est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance HH'.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'}\cdot\overrightarrow{HH'}=126$.

1. 24. Basique+ROC, N. Calédonie 2007

4 points

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Question de cours : Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ et un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

2. On considère les points $A(1\,;2\,;-3)$, $B(-3\,;1\,;4)$ et $C(2\,;6\,;-1)$.

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x-y+z+3=0$.

c. Soit I le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

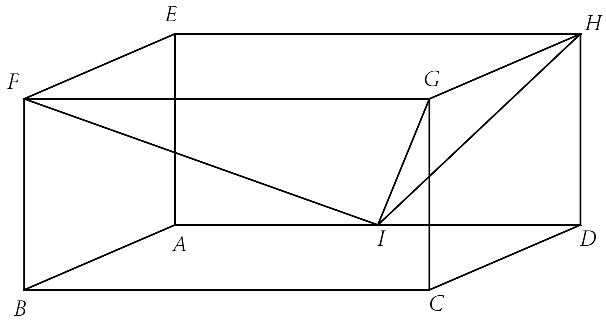
1. 25. Divers, Am. du Sud 11/2008

5 points

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que :

$$AB=1,\ AD=2 \text{ et } AE=1.$$

On appelle I le milieu de $[AD]$. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. a. Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\frac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (2 ; 1 ; –1).

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre G passant par K. Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection).

1. 26. Basique, N. Calédonie 2009

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit les points : A(4 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et $E\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{9}\right)$.

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

1. a. Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 6 ; 4). Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. a. Montrer que la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E.

1. 27. Intersections, Liban 2010

4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On note (D) la droite passant par les points $A(1\,;\,-2\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,-5\,;\,-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = -1-t \end{cases}$.

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k,\ k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$.

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}(1\,;1\,;-1)$.

a. Montrer que les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

1. 28. Plans, Polynésie 2009

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On considère les points : $A(1\,;-1\,;3)$, $B(0\,;3\,;1)$, $C(6\,;-7\,;-1)$, $D(2\,;1\,;3)$ et $E(4\,;-6\,;2)$.

1. a. Montrer que le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$ est le point E.

b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2\sqrt{21}$.

2. a. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

b. Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

1. 29. Sphère, Polynésie 2010, 5 pts

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère :

- les points $A(1\,;1\,;1)$ et $B(3\,;2\,;0)$;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$.

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. a. Calculer la distance du point A au plan (Q). En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0 ; 2 ; −1).

a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D).

d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D). L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».

Justifier votre réponse.

1. 30. Classique, Centres étrangers 2009

5 points

On se propose dans cet exercice d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, orthonormal. On considère les points $A(3, 4, 0)$; $B(0, 5, 0)$ et $C(0, 0, 5)$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19}, \frac{45}{19}, \frac{45}{19}\right)$.

a. Démontrer que les points H, C, I sont alignés.

b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4. Calculs d'aire et de volume.

a. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre $OABC$.

b. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

c. Calculer l'aire du triangle ABC.

1. 31. Plans et droites, La Réunion 2009

5 points

Soient $A(1\,;2\,;0)$, $B(2\,;2\,;0)$, $C(1\,;3\,;0)$ et $D(1\,;2\,;1)$ quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ; (Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ; (R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.

On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

2. a. Résoudre le système : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{cases}$.

b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point $E(2\,;3\,;1)$.

c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD). En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $(O\,;\vec{i},\vec{k})$ et $(O\,;\vec{j},\vec{k})$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b. Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

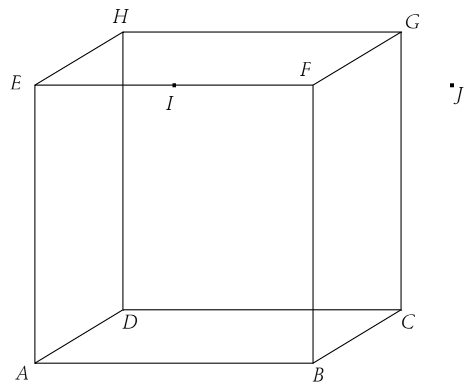
1. 32. Cube, Liban 2009,

4 points

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.

On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1. a. Déterminer les coordonnées des points I et J.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face $ADHE$.

c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

1. 33. Cube, Am du Nord 2009

5 points

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.

On note I le centre de la face $ADHE$, J celui de la face $ABCD$ et K le milieu du segment $[IJ]$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.

2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.

3. a. Démontrer que le plan médiateur du segment $[IJ]$ est le plan (AKG).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).

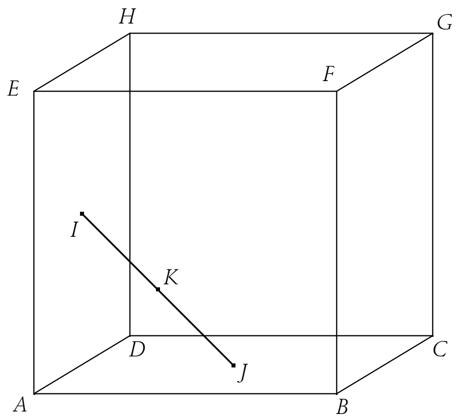
c. Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).

4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G. Soit L le centre du carré $DCGH$.

a. Démontrer que le point K est le milieu du segment $[AL]$.

b. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.



1. 34. Divers, Am. du Sud 11/2008

5 points

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que : $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.

On appelle I le milieu de $[AD]$. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. a. Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\frac{1}{3}$.

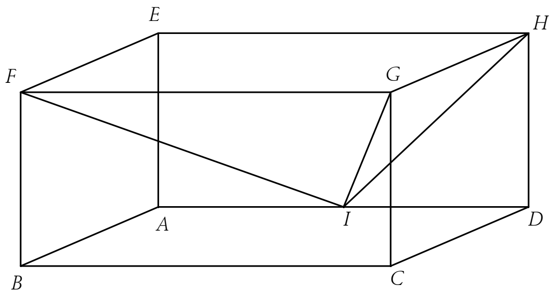
b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;1\,;-1)$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).



c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).

4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre G passant par K. Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?

(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection).

1. 35. Orthog. alignement, Polynésie 2008

5 points

On donne la propriété suivante : « Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

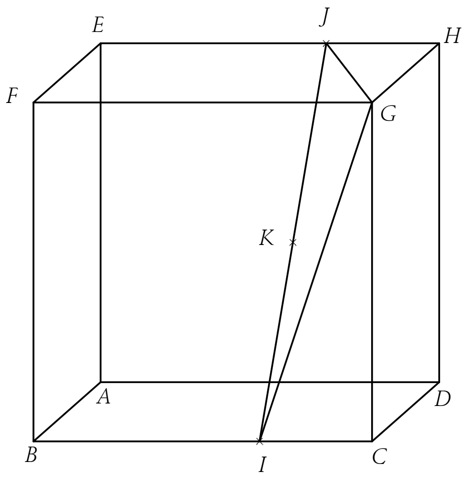
Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$;

le milieu K de $[IJ]$.

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).



PARTIE A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F. En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).

4. a. Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

PARTIE B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB). On note $(x,\, y,\, 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.

2. a. Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).

b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FJ}$ en fonction de x et y.

c. Déterminer les coordonnées du point N.

3. Placer alors le point P sur la figure.

1. 36. Pythagore, N. Calédonie 11/2007

5 points

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. a. Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ? Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On peut démontrer de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ et $C(0\,;0\,;3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (d) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49}\,;\frac{18}{49}\,;\frac{12}{49}\right)$.

3. a. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

1. 37. Volume tétraèdre 1

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}, \overrightarrow{\mathrm{OK}})$, on considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M dont une représentation est jointe sur la feuille annexe.

On note A le milieu de l'arête [IL] et B le point défini par : $\overrightarrow{\mathrm{KB}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{KN}}$.

On appelle P le plan passant par les points O, A et B.

1. a. Préciser les coordonnées des points A et B.

b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

2. a. Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sqrt{14}}{6}$.

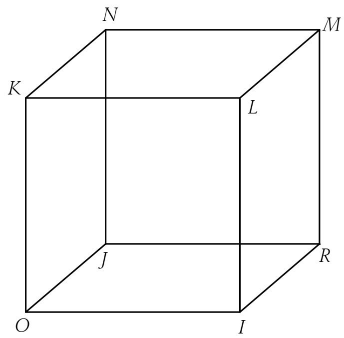
b. Le point $\mathrm{C}\left(1\,;\frac{1}{3};1\right)$ appartient-il à P ? Justifier votre réponse.

3. On considère le tétraèdre OABK.

a. Montrer que son volume vaut $\frac{1}{9}$.

b. En déduire la distance du point K au plan P.

N.B. : On rappelle que le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de l'aire d'une base par la longueur de la hauteur correspondante.



1. 38. Volume+Barycentre, Pondicherry 2007

4 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3,2,6)$, B de coordonnées $(1,2,4)$ et C de coordonnées $(4,-2,5)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Vérifier que ce plan est P.

2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.

c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

d. Calculer le volume du tétraèdre *OABC.*

3. On considère dans cette question le système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

a. Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera G.

b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

c. Déterminer la distance de G au plan P.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$. Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

1. 39. Distance point-droite, La Réunion sept. 2010

5 pts

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x+y+z=0$ et $2x+3y+z-4=0$.

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x=-4-2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

2. Soit λ un nombre réel.

On considère le plan P_λ d'équation : $(1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1+\lambda\,;1+2\lambda\,;1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D', intersection des plans P et P_{-1}.

Montrer que les droites D et D' sont confondues.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère le point $A(1\,;1\,;1)$.

Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

1. 40. Distance point-plan, France, sept. 2010, 4 pts

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation $3x+y-z-1=0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est

$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=-t+2 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

1. a. Le point $C(1\,;3\,;2)$ appartient-il au plan (P) ? Justifier.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (Q) et de la droite (D).

c. Montrer que $CI=\sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées $(-t+1\ ;\ 2t\ ;\ -t+2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

1. 41. Distance, Polynésie 2008

4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\ ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 4)$, $C(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, $D(4\ ;\ -2\ ;\ 5)$ et le vecteur $\vec{n}(2\ ; -1\ ; 1)$.

1. a. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

1. 42. Distance dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal on considère le point $A(-1\ ; 1\ ; 3)$ et la droite D ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes la distance d du point A à la droite D.

1. Soit M un point de D, on pose $f(t) = AM^2$; calculer $f(t)$ en fonction de t, déterminer le minimum de f et en déduire d.

2. Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à D :

a. déterminer un vecteur normal de P, donner une équation cartésienne de P, trouver un point M_0 de D.

b. Calculer la distance d_P de M_0 à P ainsi que AM_0. Exprimer d en fonction de d_P et AM_0, en déduire d.

1. 43. Distance minimale, Polynésie sept 2006

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2). Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9\ ;\ -4\ ;\ -1)$.

a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).

b. Exprimer AM^2 en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

Étudier les variations de f. Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ? Dans la suite, on désignera ce point par I. Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation de (Q).

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

1. 44. Distance point-droite, France 09/2005

5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère le plan P passant par le point $B(1\,;\,-2\,;\,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2\,;1\,;5)$ et le plan R d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a. Démontrer que les plans P et R sont perpendiculaires.

b. Démontrer que l'intersection des plans P et R est la droite Δ passant par le point $C(-1\,;\,4\,;\,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.

c. Soit le point $A(5\,;\,-2\,;\,-1)$.

Calculer la distance du point A au plan P, puis la distance du point A au plan R.

d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2. a. Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1 + 2t\,;\,3 - t\,;\,t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.

c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

1. 45. Plans et droites, Antilles 2007

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(3\,;\,0\,;\,6)$ et $I(0\,;\,0\,;\,6)$; on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

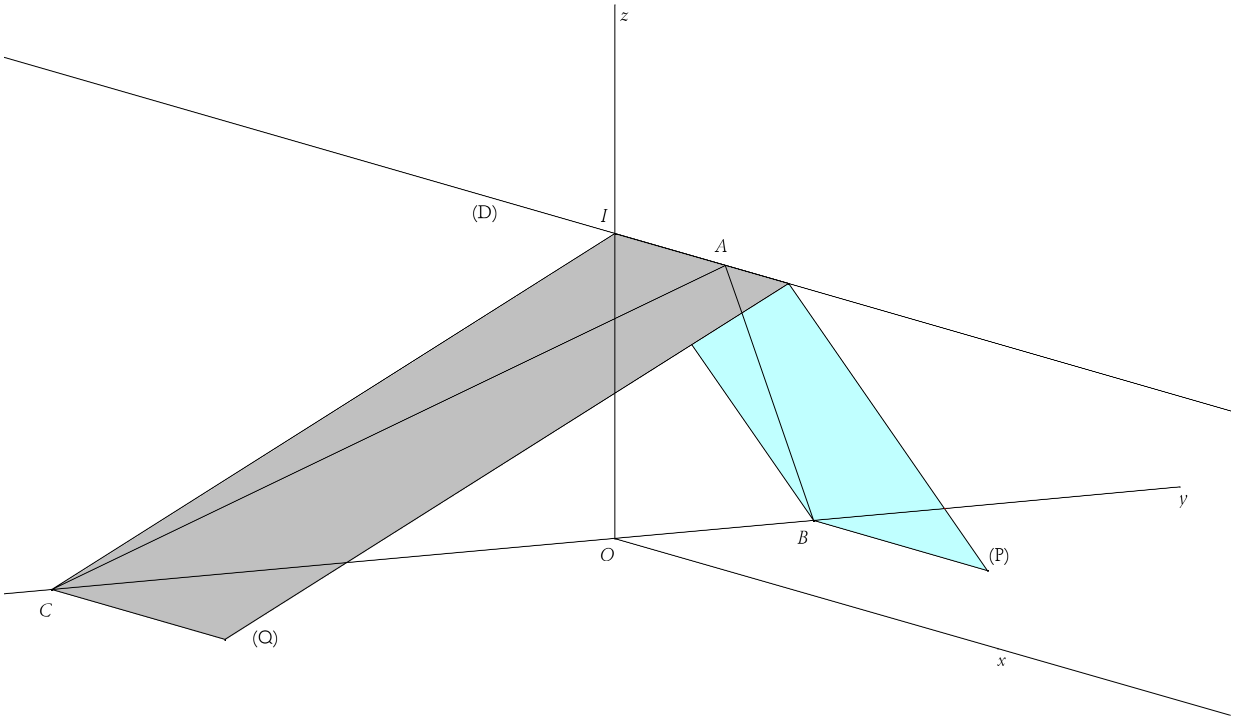
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).

3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(O\,;\vec{j}\right)$.

4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est $x + 4y + 2z - 12 = 0$.

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA). Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.

6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



1. 46. Droites et plans de l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On appelle P le plan d'équation $2x-y+5=0$ et P' celui d'équation $3x+y-z=0$.

1. Montrer que P et P' sont sécants suivant une droite D dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=t \\ y=5+2t \\ z=5+5t \end{cases}$ où t est un réel quelconque.

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

* D est parallèle au plan R d'équation $-5x+5y-z=0$.

* Soit D' la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-3u \\ y=1+u \\ z=2+2u \end{cases}$ où u est un réel quelconque. Les droites D et D' sont coplanaires.

1. 47. Plans de l'espace, bac S, 1997

Soit $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ un repère orthonormal direct de l'espace.

1. Soit G l'isobarycentre de A, B, C. Donner les coordonnées de G et montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. On considère les points $A'(2\,;0\,;0)$, $B'(0\,;2\,;0)$, $C'(0\,;0\,;3)$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan $(A'B'C')$.

b. En déduire une équation cartésienne du plan $(A'B'C')$.

c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite (AC).

d. Déterminer les coordonnées du point K commun à la droite (AC) et au plan $(A'B'C')$.

3. a. Vérifier que le point L commun à la droite (BC) et au plan $(A'B'C')$ a pour coordonnées $L(0\,;4\,;-3)$.

b. Montrer que les droites (AB), $(A'B')$, (KL) sont parallèles.

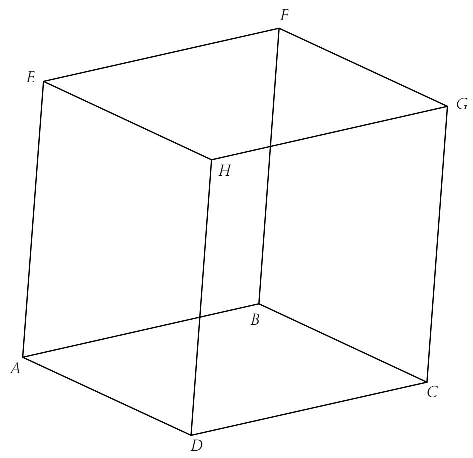
c. Caractériser l'intersection des plans (ABC) et $(A'B'C')$ à l'aide de points déjà définis .

4. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur le plan $(A'B'C')$.

1. 48. Equidistance de trois points, France sept 2006

6 points

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté $ABCDEFGH$ et représenté ci-dessous.



Soit I le barycentre des points pondérés $(E\ ;\ 2)$ et $(F\ ;\ 1)$, J celui de $(F\ ;\ 1)$ et $(B\ ;\ 2)$ et K celui de $(G\ ;\ 2)$ et $(C\ ;\ 1)$.

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Γ cet ensemble.

1. Placer les points I, J et K sur la figure de l'annexe qui sera rendue avec la copie.

2. Soit Ω le point de Γ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK ?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal $\left(A\ ;\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

3. Donner les coordonnées des points I, J et K.

4. Soit $P(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $Q(1\ ;\ 3\ ;\ 3)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).

5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

a. Démontrer que M appartient à Γ si, et seulement si, le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Γ ?

b. Vérifier que P et Q appartiennent à Γ. Tracer Γ sur la figure.

6. a. Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.

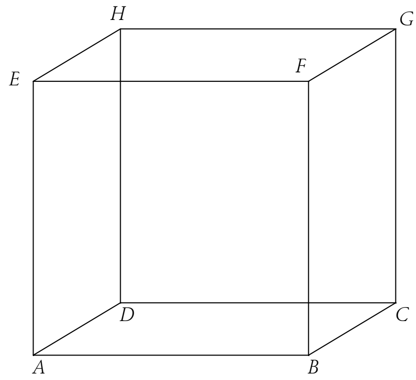
b. Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

1. 49. Barycentres+droite, C. étrangers 2006

5 points

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté ici.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.



Partie A : un triangle et son centre de gravité

1. Démontrer que le triangle *BDE* est équilatéral.

2. Soit *I* le centre de gravité du triangle *BDE*.

a. Calculer les coordonnées de *I*.

b. Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points *A*, *I*, *G* ?

3. Prouver que *I* est le projeté orthogonal de *A* sur le plan (*BDE*).

Partie B : une droite particulière

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan P_k de la façon suivante :

* M_k est le point de la droite (*AG*) tel que $\overrightarrow{AM_k}=k\overrightarrow{AG}$;

* P_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (*BDE*) ;

* N_k est le point d'intersection du plan P_k et de la droite (*BC*).

1. Identifier $P_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$, et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.

2. Calcul des coordonnées de N_k.

a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

b. Déterminer une équation du plan P_k dans ce repère.

c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1\,;3k-1\,;0)$.

3. Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (*AG*) et (*BC*) ?

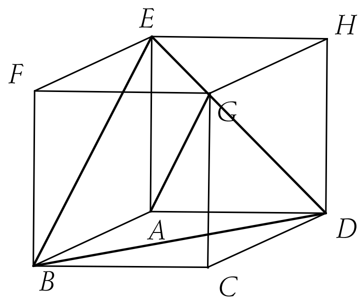
4. Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

5. Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $P_{\frac{1}{2}}$. Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.

1. 50. Barycentre espace, N. Calédonie 2004

On considère le cube *ABCDEFGH* ci-contre.

O_1 et O_2 sont les centres des carrés *ABCD* et *EFGH*, et *I* est le centre de gravité du triangle *EBD*.



Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés : $\{(E\,;1),(B\,;1-m),(G\,;2m-1),(D\,;1-m)\}$.

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.

2. Préciser la position du point G_1.

3. Vérifier que $G_0=A$. En déduire que les points *A*, *I* et *G* sont alignés.

4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m}=m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.

5. a. Vérifier que les points *A*, G_m, *E* et O_1, sont coplanaires.

b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (*EI*).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan ABD.

2. Déterminer les coordonnées du point G_m.

3. Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

1. 51. Barycentre espace, France 2001

Soient trois points de l'espace A, B et C non alignés et k un réel de l'intervalle $[-1\,;1]$. On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de $[BC]$ et construire les points G_1 et G_{-1}.

2. a. Montrer que pour tout réel k de $[-1\,;1]$, on a l'égalité : $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

b. Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$.

c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1\,;1]$.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

5. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (0 ; 0 ; 2), (−1 ; 2 ; 1) et (−1 ; 2 ; 5). Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.

b. Calculer le rayon du cercle Γ, intersection de E et F.

1. 52. Tétraèdre orthocentrique, La Réunion 2005

4 points

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet. Un tétraèdre est *orthocentrique* si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre $ABCD$ issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points

$$A(3\,;2\,;-1),\ B(-6\,;1\,;1),\ C(4\,;-3\,;3) \text{ et } D(-1\,;-5\,;-1).$$

1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x-3y+4z-13=0$.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

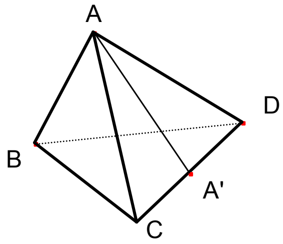
c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$.

d. Le tétraèdre $ABCD$ est-il orthocentrique ?

2. On définit les points $I(1\,;0\,;0)$, $J(0;1;0)$, $K(0\,;0\,;1)$. Le tétraèdre $OIJK$ est-il orthocentrique ?

1. 53. Aires et volumes

Soit ABCD un tétraèdre tel que (AB) et (CD) soient orthogonales et BC = BD.



On note A' le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ACD

Partie A

1. a. Démontrer que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA').

b. Que représente (BA') dans le triangle BCD ? Que peut-on en déduire pour A' ?

c. En déduire la nature du triangle ACD et du plan (ABA').

2. Démontrer que : $\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\right)=0$.

3. Soit G le barycentre du système de points pondérés {(A ; −1) ; (B ; 2) ; (C ; 1) ; (D ; 1)}.

Démontrer que G appartient au plan (ABA') et préciser les coordonnées du point G dans le repère $(A' ; \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'A})$.

Caractériser l'ensemble (*E*) des points M de l'espace tels que :

$$\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=k\left(2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right),\ k\in\mathbb{R}\ .$$

Caractériser l'ensemble (*F*) des points M de l'espace tels que :

$$2\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=3\left\|2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|.$$

Partie B

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace (unité graphique : 1 cm).

On donne les points : A(1 ; 3 ; −2), B(1 ; 1 ; 0), C(4 ; 0 ; −2) et D(2 ; α ; 2).

1. a. Déterminer le réel α pour que le tétraèdre ABCD vérifie les données de l'exercice.

b. Déterminer les coordonnées de A' milieu de [CD].

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABA').

3. Déterminer la distance du point C au plan (ABA').

4. a. Calculer la valeur de $\cos\widehat{ABA'}$ et en déduire la valeur de $\sin\widehat{ABA'}$.

b. En déduire l'aire du triangle ABA'.

5. Calculer le volume du tétraèdre AA'BC et en déduire le volume du tétraèdre ABCD.

6. a. Déterminer les coordonnées du point G (Partie A. 3.)

b. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (*F*). (Partie A 3. c.)

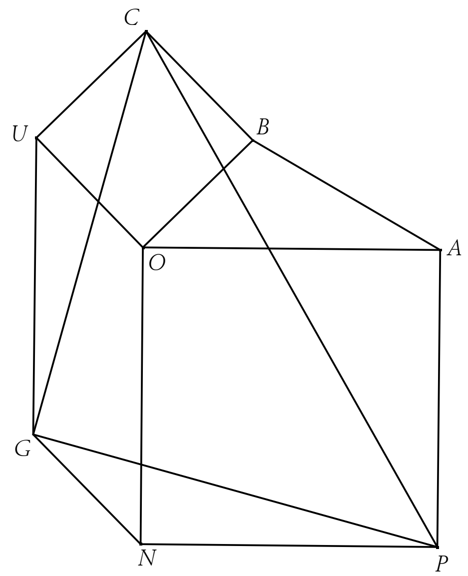
1. 54. Nombres complexes et produit scalaire.

Données :

OAB est un triangle quelconque direct, dans le plan orienté. *OBCU* et *ONPA* sont des carrés construits extérieurement au triangle *OAB*. *OUGN* est un parallélogramme.

But de l'exercice :

Démontrer , en utilisant plusieurs méthodes, que le triangle *CGP* est rectangle isocèle en *G*.



Méthode 1 : Avec les nombres complexes :

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, quelconque, (inutile de le tracer) et on note a, b, c, p, u, g et n les affixes respectives des points A, B, C, P, U, G, et N.

a. Calculez c, p, u, g et n en fonction de a et b.

b. Concluez en utilisant ces calculs.

Méthode 2 : Avec le produit scalaire

a. Démontrez que $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{UO} + \overrightarrow{OA}$.

En déduire que les droites (GP) et (GC) sont orthogonales (*on utilisera une des définitions du produit scalaire*).

b. Montrez que $GC = GP$ en utilisant la relation d'Al -Kashi dans deux triangles bien choisis. Concluez.

Méthode 3 : Avec les outils d'un élève de Seconde .

Faites cette démonstration en utilisant des triangles isométriques ainsi que des considérations élémentaires sur les angles.

1\. 55. Lignes de niveau

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = a et AC = $2a$.

I désigne le milieu de [AC] et G est le barycentre du système {(A ; 3) ; (B ; –2) ; (C ; 1)}.

1\. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG. Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC.

2\. À tout point M du plan, on associe le nombre réel :

$$f(\mathrm{M}) = 3\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2.$$

a. Exprimer f (M) en fonction de MG et de a.

b. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $f(\mathrm{M}) = 2a^2$.

3\. À tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel :

$$h(\mathrm{M}) = 3\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 - \mathrm{MC}^2.$$

a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{\mathrm{U}}$ non nul tel que : $h(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MB}}.\vec{\mathrm{U}} - 2a^2$.

b. On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que : $h(\mathrm{M}) = -2a^2$.

Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ), préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ).

4\. (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

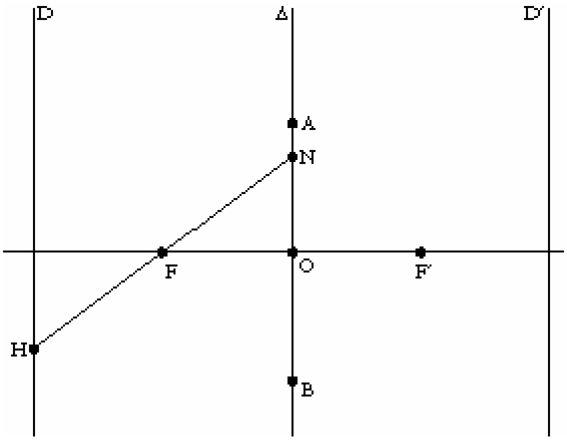
1. 56. Conique - hors programme

On considère deux points distincts donnés F et F' du plan orienté. On note O le milieu de [FF'] et Δ la médiatrice de ce segment. On pose c = OF. On note A et B les points de Δ tels que OA = OB = c.

On note s la symétrie centrale de centre F et r la rotation de centre F et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

Soit D et D' les droites symétriques de D par rapport à F et F'.

Ces différents éléments sont placés sur la figure ci-dessous. Il convient de reproduire cette figure sur la copie.



1. a. On considère les points P = r (A) et Q = s (A). Prouver que r (Q) = B.

Déterminer la nature du quadrilatère APQB et tracer ce quadrilatère sur la figure.

b. Déterminer les images respectives du segment [AB] par s, par r et par $r \circ s$.

c. À tout point N du segment [AB], on associe les points H = s(N), I = r (N) et J=r(H)=(r $\circ$ s) (N).

Déterminer la nature du quadrilatère NIHJ et tracer ce quadrilatère sur la figure.

2. On note Γ le cercle de centre N et de rayon NI.

a. Montrer que, pour tout point M du plan, $MH^2 + MN^2 = 2(MF^2 + NF^2)$.

b. En déduire que Γ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $MH^2 - 2MF^2 = 0$.

3. On note K la projection orthogonale de H sur Δ et on pose α = ON où $0 \le \alpha \le c$.

Exprimer NK en fonction de α, puis NF et NI en fonction de α et de c. En déduire que le cercle Γ coupe la droite (HK) en deux points M_1 et M_2 distincts ou confondus.

4. Prouver que $\frac{M_1F}{M_1H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En déduire que lorsque N parcourt le segment [AB], les points M_1 et M_2 appartiennent à une ellipse E dont F est un foyer et dont on précisera l'excentricité et la directrice associée à F.

Placer les sommets de E et tracer cette ellipse.

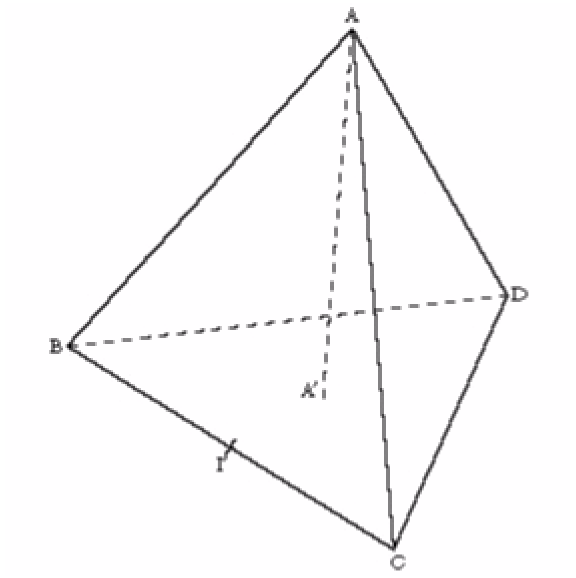
1. 57. Projection d'un cercle dans l'espace - hors prog.

Sur la figure ci-après, ABCD est un tétraèdre régulier :

AB = AC = AD = BC = CD = DB = d, où d est un réel strictement positif.

On nomme I le milieu de [BC] et A´ le centre de gravité du triangle BCD. La droite (AA´) est alors orthogonale au plan (BCD) (propriété admise).

On désire tracer l'image du cercle circonscrit au triangle ABC par la projection orthogonale sur le plan (BCD).



1. On désigne par (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.

a. En se plaçant dans le plan (ABC), représenter en vraie grandeur le triangle ABC et le cercle (C) (on prendra pour cette figure : $d = 8$ cm). On nomme Ω le centre du cercle (C).

b. Exprimer le rayon R de (C) en fonction de la distance d.

c. On nomme E le point défini par : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$. Démontrer que [AE] est un diamètre de (C).

2. On désigne par p la projection orthogonale sur le plan (BCD). On nomme Ω' et E´ les images respectives de Ω et E par p.

a. En se plaçant dans le plan (BCD), représenter en vraie grandeur le triangle BCD ($d = 8$ cm).

Préciser les images par p des points A, B, C et I.

b. Démontrer que $\overrightarrow{I\Omega'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA'}$ et que Ω' est le milieu de [E'A'].

c. On nomme F et G les extrémités du diamètre de (C) parallèle à (BC).

On désigne respectivement par F´ et G´ leurs images par p.

Montrer que la droite (F´G´) est parallèle à (BC) et que F´G´ = FG.

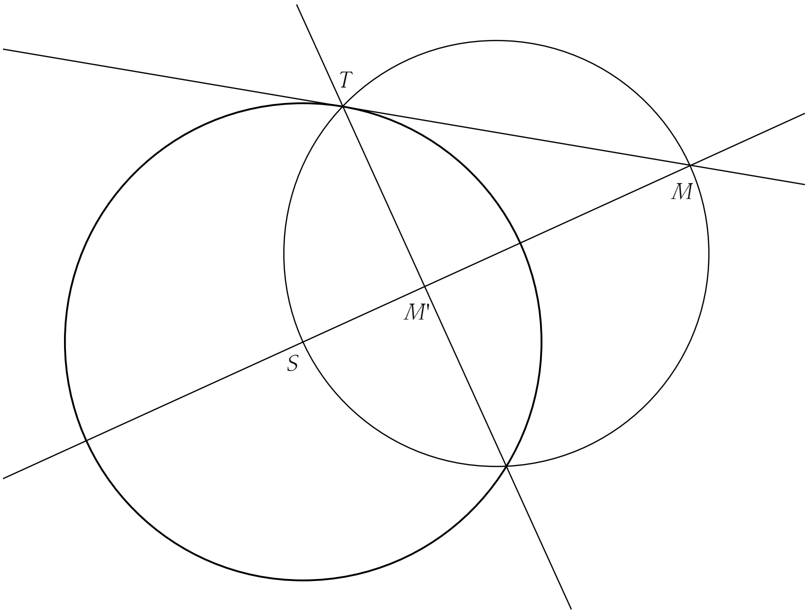
3. L'image du cercle (C) par la projection p est une courbe Γ contenant les points A', E', F' et G'.

a. Quelle est la nature de la courbe ?

b. Tracer Γ sur la figure 2 (on précisera les tangentes à Γ aux points A´, E´, F´ et G´).

1. 58. Inversion

Soit S un point du plan et ($\mathcal{C}$) le cercle de centre S de rayon a ; on considère la transformation f suivante qui à tout point M du plan associe M' tel que :



* si M est un point du plan extérieur à ($\mathcal{C}$) alors M' est la projection orthogonale du point de contact T de la tangente à ($\mathcal{C}$) issue de M sur la droite (SM) ,

* si M est à l'intérieur de ($\mathcal{C}$), T est l'intersection entre la perpendiculaire à (SM) passant par M et ($\mathcal{C}$) et M' est l'intersection entre la tangente à ($\mathcal{C}$) passant par T et (SM).

1. Vérifier que f est une involution : $f \circ f = Id$; quelle est la réciproque de f ?

2. On prend S à l'origine du plan et a quelconque. Déterminer l'écriture complexe de f.

3. Déterminer l'image d'une droite par f : deux cas suivant qu'elle passe par S ou pas.

4. Image d'un cercle par S : deux cas : de centre S ou pas.

1. 59. Courbe paramétrée - hors programme

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 3 cm). Soit C la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{2+\cos\theta} \\ y(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{2+\cos\theta} \end{cases}$$

1. a. Comparer les points M de paramètres θ et $-\theta$. Quelle conclusion peut on en tirer pour C ? Expliquer alors comment on peut obtenir C à partir de la construction de C_1 correspondant à $\theta \in [0, \pi]$.

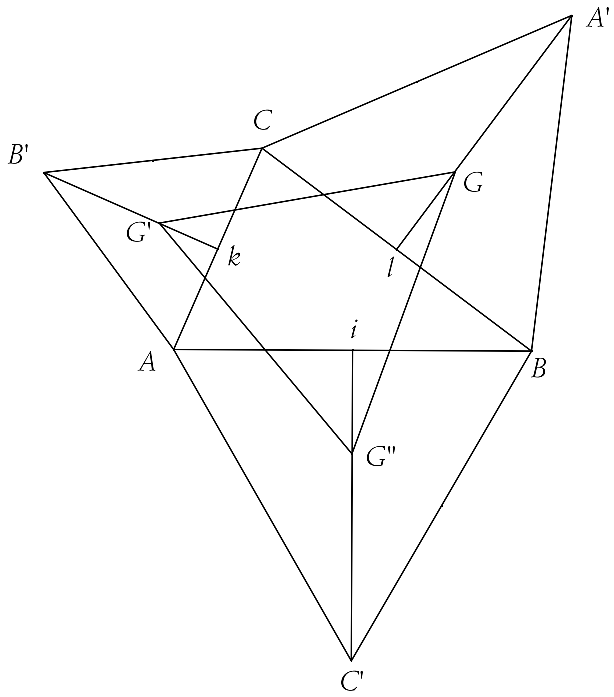
b. Etudier les variations des fonctions x et y sur $[0, \pi]$. En déduire que C admet une tangente en chacun de ses points. Préciser les points de C_1 où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

c. Préciser les points d'intersection de C_1 avec l'axe vertical et donner une équation cartésienne de la tangente en ce point.

d. Tracer la courbe C en faisant apparaitre les éléments précédents.

2. M_θ désignant le point de paramètre θ, exprimer en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite d'équation $x = 1$. En déduire que M_θ appartient à une conique E dont on précisera le foyer, la directrice et l'excentricité. Préciser son centre, ses sommets, ses axes de symétrie. Donner une équation cartésienne de E dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. 60. Le théorème de Napoléon 1



Le théorème de Napoléon (déjà connu à son époque …)

On se place dans le plan complexe avec $A(0)$, $B(1)$ et $C(u)$; on construit sur chaque côté du triangle ABC un triangle équilatéral à l'extérieur : donner les affixes des points A', B' et C'.

Soient G, G' et G'' les centres de gravité des triangles BCA', ACB' et ABC'. Montrer que $GG'G''$ est un triangle équilatéral.