Analyse - fonctions diverses — Exercices

1. 1. Divers 1
1. 2. Limites (c) 2
1. 3. Etudes 3
1. 4. QCM, Pondicherry 2006 (c) 5
1. 5. Qcm 1 (c) 6
1. 6. Qcm 2, Liban 2005 7
1. 7. Qcm 3, France rempl. 2005 8
1. 8. Qcm 4 (octobre 2012) (c) 9
1. 9. Polynômes (c) 11
1. 10. TVI et tangentes 12
1. 11. Fonction périodique-1 13
1. 12. Fonction périodique-2 13
1. 13. Un peu de trigo 13
1. 14. ROC+dérivées, France remplt 2007 14
1. 15. Dérivabilité 14
1. 16. Cubique et trigonométrie (c) 14
1. 17. Fonction rationnelle et composée de sinus (c) 17
1. 18. Fonction rationnelle de base 1 18
1. 19. Fonction rationnelle 2 (c) 19
1. 20. Fonction rationnelle-3 20
1. 21. Fonction rationnelle-4 20
1. 22. Fonction irrationnelle-1 20
1. 23. Fonction irrationnelle-2 21
1. 24. Fonction irrationnelle-3 21
1. 25. Fonction irrationnelle-4 22
1. 26. Fonction irrationnelle-5 22
1. 27. Fonction définie par morceaux 23
1. 28. Fonction paire, fonction impaire 23
1. 29. Triangle d'aire maximale (c) 25
1. 30. Cissoïde de Dioclès 27
1. 31. Strophoïde droite et inversion 28
1. 32. Sinus cardinal 29
1. 33. Arc tangente,N. Calédonie 2003 29
1. 34. Autour de sin(1/x) 30
1. 35. Suites et sinus 31
1. 36. Camion et Lapin, N. Caledonie 2005 (c) 31

1. 1. Divers

Exercice 1

Un triangle ABC est isocèle. Les mesures en centimètres des côtés sont AB = AC = 10 et BC = 12.

Soit M un point de [AB] tel que AM = x. Par M on mène la parallèle à (BC) qui coupe [AC] en N.

a. Déterminez x pour que le triangle AMN et le trapèze BMNC aient le même périmètre.

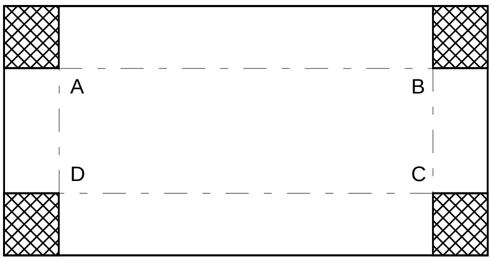
b. Déterminez x pour que les aires du triangle AMN et du trapèze BMNC soient égales.

Exercice 2

Si on augmente la vitesse d'un train de 10 km/h , on gagne 40 minutes sur le trajet effectué par ce train. Si on diminue la vitesse de 10 km/h, on perd une heure sur le même trajet. Quelle est la longueur du trajet ?

Exercice 3

On dispose d'une feuille de carton de 80 cm de long sur 50 cm de large avec laquelle on veut fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela on découpe 4 carrés égaux aux quatre coins de la feuille puis on plie le carton suivant les segment [AB] , [BC] , [CD] et [DA]. On appelle x la mesure en cm du côté de chaque carré découpé.



a. Précisez entre quelles valeurs peut varier x pour que la boîte soit réalisable. On obtiendra un intervalle I.

b. Déterminez le volume V(x) en cm^3 de la boîte obtenue en fonction de x. c. Etudiez les variations de V et en déduire la valeur de x pour laquelle V est maximal. Quelles sont les dimensions de la boîte obtenue ?

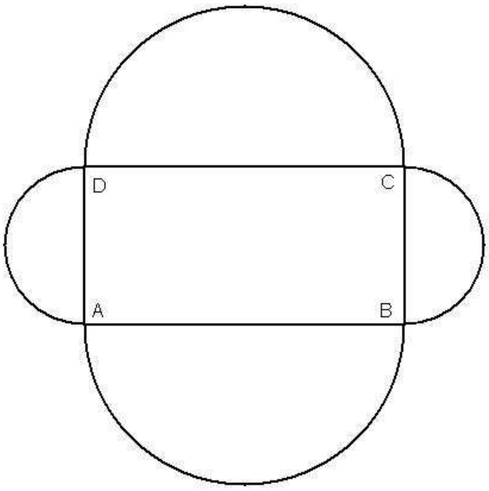
Exercice 4

On considère la figure (F) formée d'un rectangle ABCD et de quatre demi-disques extérieurs à ce rectangle et de diamètres respectifs AB, BC, CD et DA. On suppose que le rectangle a pour périmètre 200 cm. On appelle x la mesure, en cm, du côté AB.

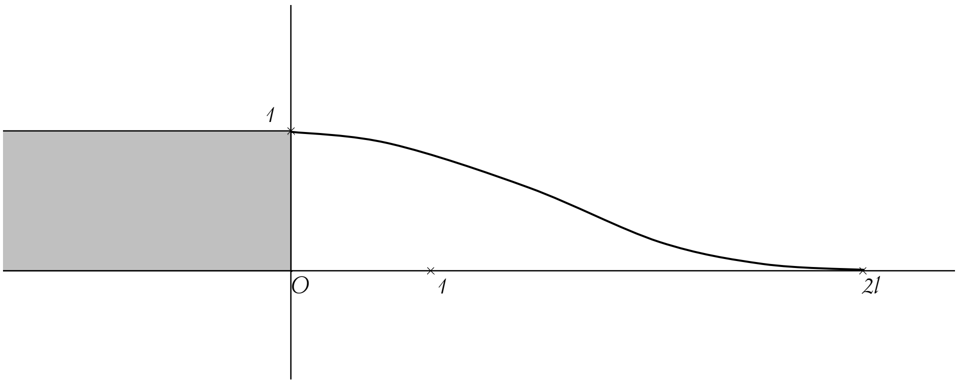
1. Préciser entre quelles valeurs doit se trouver x pour que cette figure soit réalisable.

2. Déterminer l'aire de cette figure, notée $S(x)$.

3. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Quelle est alors la valeur de cette aire et la nature du rectangle ?



Exercice 5



On veut construire une rampe pour handicapés permettant de descendre une marche de hauteur 1 ; trouver une courbe permettant le tracé de la rampe de sorte qu'il n'y ait pas de point anguleux et que la pente maximale de la rampe soit de 10% ; on cherche l'emprise au sol de la rampe (la longueur $2l$).

1. On choisit la fonction f représentant la rampe sous la forme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ dans le repère indiqué sur la figure.

Justifier que les conditions sur f sont alors $\begin{cases} f(0)=1, f'(0)=0 \\ f(2l)=0, f'(2l)=0 \\ f(l)=1/2, |f'(l)|\leq 0,1 \end{cases}$.

Déduisez-en les coefficients a, b, c et d en fonction de l. Appliquez la dernière condition pour donner une valeur minimale de l. Quelle est alors l'emprise minimale ?

2. On choisit une fonction de la forme $f(x)=a\cos(bx+c)$. Refaire le même travail.

3. Conclure.

1. 2. Limites (c)

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x-4}{1-x^2}$, b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-4}{1-x^2}$, c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+3}-3x$, d. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$.

e. Sachant que $0\le f(x)-1\le |2\sin 3x|$ sur l'intervalle] 1 ; 10[déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)$.

Correction

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x-4}{1-x^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-4)=-3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(1-x^2)=0^-$;

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-4}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-x}=0^-$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+3}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+3}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+3-9x^2}{\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{\left(\sqrt{9x^2+3}+3x\right)}=0^+$.

d. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2}{6}\times\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$.

On pose $f(x) = \sin x$, on a $\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}=f'(\frac{\pi}{6})$ car f est dérivable en $\dfrac{\pi}{6}$.

$f'(x) = \cos x$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}=\dfrac{1}{3}f'(\frac{\pi}{6})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

e. $0\le f(x)-1\le |2\sin 3x|$: par passage à la limite, qui conserve l'ordre, on a :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} 0\le \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(f(x)-1\right)\le \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}|2\sin 3x|,$$

et d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(f(x)-1\right)=0$ puisque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}|2\sin 3x|=0$. On conclut donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=1$.

<u>1. 3. Etudes</u>

Pour chacune des fonctions suivantes :

- Expliciter l'ensemble de définition
- Déterminer le domaine de dérivabilité.
- Calculer la dérivée.
- Déterminer le sens de variation de f.

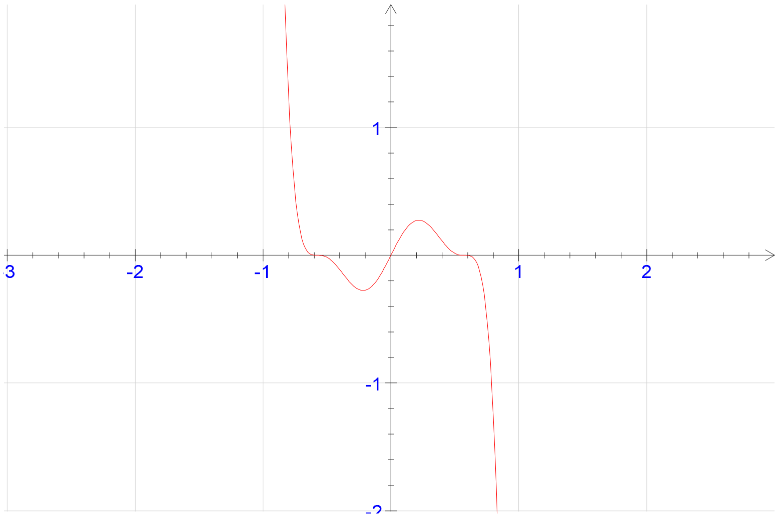
a. $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)=2x(1-3x^2)^3\end{array}$, b. $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)=\dfrac{x^2+3x-6}{x-1}\end{array}$, c. $\begin{array}{l}[-\pi\,;\pi]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)=\sqrt{2\cos x-1}\end{array}$

Correction

a. $f(x)=2x(1-3x^2)^3$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$f'(x)=2(1-3x^2)^3+2x\times 3\times(-6x)\times(1-3x^2)^2=2(1-3x^2)^2(1-3x^2-18x^2)$$
$$=2(1-3x^2)^2(1-21x^2)=2(1-3x^2)^2(1-\sqrt{21}x)(1+\sqrt{21}x)$$

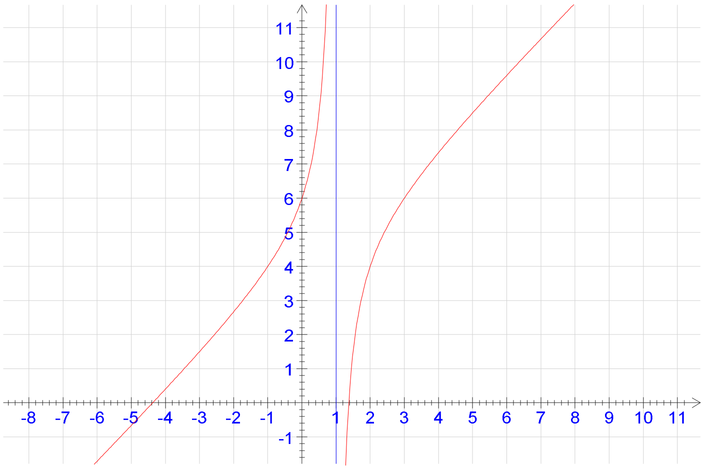
f' est positive sur $[-\frac{1}{\sqrt{21}}\,;\frac{1}{\sqrt{21}}]$, donc f y est croissante. Elle décroissante ailleurs.



b. $f(x)=\frac{x^2+3x-6}{x-1}$. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

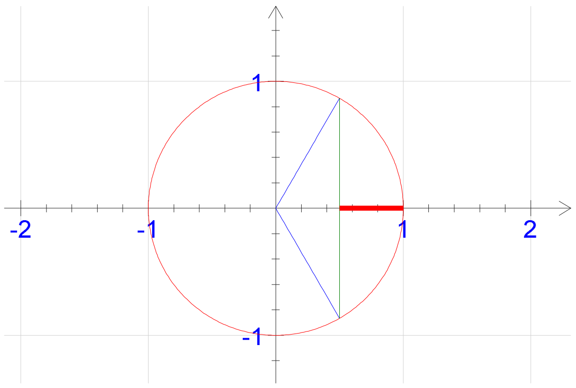
$f'(x)=\frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x-6)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x+6}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$.

Le numérateur est un polynôme du second degré qui ne s'annule jamais ($\Delta<0$) et le dénominateur est positif, donc la dérivée est strictement positive et la fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.



c. $f(x)=\sqrt{2\cos x-1}$. Il faut étudier le signe de 2 cos x – 1.

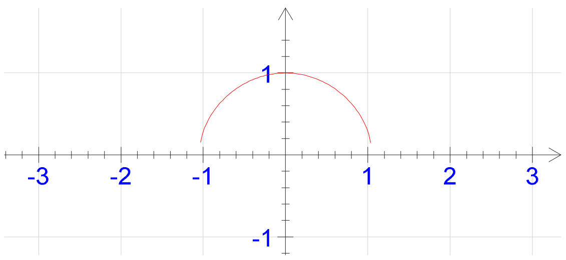
$$2\cos x-1\geq 0\Leftrightarrow 2\cos x\geq 1\Leftrightarrow \cos x\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow(x\geq-\frac{\pi}{3}+2k\pi)et(x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi).$$



f est donc définie sur $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$.

$$f(x)=\sqrt{2\cos x-1}=(2\cos x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times(-2\sin x)(2\cos x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-\sin x}{\sqrt{2\cos x-1}}$$



Pour $x\in\left]-\pi/3\,;0\right]$, la dérivée est positive ($\sin x$ est négatif) donc f est croissante, et pour $x\in[0\,;\,\pi/3]$, f est décroissante.

<u>1. 4. QCM, Pondicherry 2006 (c)</u>

4 points

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1.a. à 3.d. sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.Chaque réponse convenable rapporte 0,4 points. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a.	Pour tous les réels a et b : $\left(e^a\right)^b=e^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b.	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$.
Affirmation 1. c.	La droite d'équation $y=x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a.	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b.	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

Affirmation 2. c.	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a.	Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim(u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3. b.	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas.
Affirmation 3. c.	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. d.	Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

Correction

Affirmation 1. a.	**Faux** : contre-exemple : si $a = 2$ et $b = 3$ alors $\left(e^a\right)^b = e^6 \neq e^{\left(a^b\right)} = e^8$.
Affirmation 1. b.	**Vrai** : revoir le cours.
Affirmation 1. c.	**Faux** : recalculez l'équation de la tangente : $y = ex$.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a.	**Vrai** : sinon il n'y aurait pas cette définition de la dérivée…
Affirmation 2. b.	**Faux** : contre exemple $\lvert x \rvert$.
Affirmation 2. c.	**Vrai** : c'est du cours…

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a.	**Faux** : ça peut faire n'importe quoi…
Affirmation 3. b.	Vrai **: Par exemple, $u_n = n+1$ et $v_n = -n$ alors on a bien** $\lim u_n = +\infty$ **et** $\lim v_n = -\infty$ **mais** $\lim(u_n + v_n) = 1 \neq 0$**.**
Affirmation 3. c.	**Vrai** : la suite diverge vers l'infini en général.
Affirmation 3. d.	**Faux** : par exemple, $u_n = \frac{\ln n}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$ alors on a bien (u_n) et (v_n) qui convergent mais $\frac{u_n}{v_n} = \ln n$ et donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ diverge.

1. 5. Qcm 1 (c)

Dans chacun des énoncés suivants, cinq affirmations sont proposées. Pour chacune d'elles, répondre par VRAI ou FAUX. On ne demande pas de justifications. Les réponses inexactes seront pénalisées.

A. Pour toute fonction f continue sur [0 ; 1], à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

1. Si $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ alors il existe un unique $x \in [0 ; 1]$, tel que $f(x) = 0$.

2. Si f est strictement croissante sur [0 ; 1], alors pour tout $y \in [f(0)\,;f(1)]$ il existe un unique $x \in$ [0 ; 1] tel que $y = f(x)$.

3. Si $f(0)=0$ et $f(1)=1$ alors pour tout $x \in$ [0 ; 1], $f(x)=x$.

4. Si f est dérivable sur [0 ; 1], $f(0)=0$ et $f(1)=1$, alors pour tout $x \in$ [0 ; 1], $f'(x) \geq 0$.

5. Si $f(0)=-1$ et $f(1)=2$ alors il existe $\alpha \in$ [0 ; 1] tel que $f(\alpha)=\alpha$.

B. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. Soit T_1 la droite d'équation $y = 2-x$ et T_2 celle d'équation $y=2x+1$. T_1 est tangente à C au point d'abscisse $x=-1$ et T_2 est tangente à C au point d'abscisse $x = 1$. Alors :

1. $f(-1)=1$.

2. f est une fonction paire.

3. Il existe $a \in [-1\,;1]$ tel que $f'(a)=0$.

4. Il existe $b > 0$ tel que f soit strictement croissante sur $]1-b\ ;\ 1+b\,[$.

5. Il existe $c \in [-1\,;1]$ tel que f admette un minimum local en c.

Correction

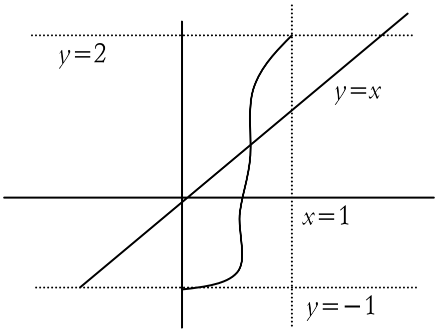
A. 1. **Faux** : si $f(0)=-1$ et $f(1)=1$, on est sûr que f s'annule, mais rien ne dit qu'elle s'annule une seule fois…

2. **Vrai** : si on prend n'importe quelle valeur dans l'ensemble d'arrivée, comme f est monotone, il y aura un unique x correspondant (dont y est l'image par f).

3. **Faux** : ce serait un cas particulier…

4. **Faux** : rien ne dit que f ne peut être décroissante…

5. **Vrai** : lorsque x varie entre 0 et 1, $f(x)$ varie entre -1 et 2, donc elle prend entre autres toutes les valeurs entre 0 et 1 ; il y a donc forcément une valeur de x pour laquelle $f(x) = x$ (voir schéma).



B. T_1 : $y=2-x$ et T_2 : $y=2x+1$. T_1 tangente à C en $x=-1$ et T_2 tangente à C en $x = 1$.

1. **Faux** : si on fait $x = -1$ dans T_1, on a $y = 3$ et non $y = 1$ si on avait $f(-1)=1$.

2. **Faux** : bof…

3. **Vrai** : comme f' change de signe entre -1 (en -1 $f'(-1)=-1$, coeff. directeur de T_1) et 1 (en 1, $f'(1)=2$, coeff. dir. de T_2), elle s'annule quelque part.

4. **Vrai** : dans la mesure où le coefficient directeur de T_2 est 2 et donc positif, aux alentours de 1 f sera strictement croissante sinon f ne serait pas dérivable en cet endroit (retour à la définition du nombre dérivé).

5. **Vrai** : toujours avec ces signes : $f' < 0$ en -1 et $f' > 0$ en 1 donc entre -1 et 1 f va changer de sens de variation et on aura certainement un minimum quelque part (décroissante puis croissante).

<u>1. 6. Qcm 2, Liban 2005</u>

4 points

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».

Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$, g ne s'annulant pas :

« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$ ».

3. « Si f est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $0\le f(x)\le\sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ».

4. On considère un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ».

5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y=(2x+3)e^x$ ».

6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.

« Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $3, -2$ et 1 alors G est le milieu du segment $[CI]$ ».

7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.

« L'ensemble des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».

8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.

« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si $M = A$ ou $M = B$ ».

1. 7. Qcm 3, France rempl. 2005

5 points

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14}=-128\sqrt{3}-128i$. C : $z^{14}=-64+64i\sqrt{3}$.

B : $z^{14}=64-64i$. D : $z^{14}=-128+128i\sqrt{3}$.

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe $4i$. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3|=|3-4i|$.

A : (E) est la médiatrice du segment $[ST]$.

B : (E) est la droite (ST) ;

C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3-4i$, et de rayon 3 ;

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CE}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$. B : -3. C : $-\sqrt{3}$. D : $-\dfrac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y=-1$.

B : Γ n'admet pas d'asymptote.

C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.

D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

A : $f''(x)=\int_0^x -2te^{-t^2}\,dt$.

C : $f''(x)=-2xe^{-x^2}$.

B : $f(x)=\int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

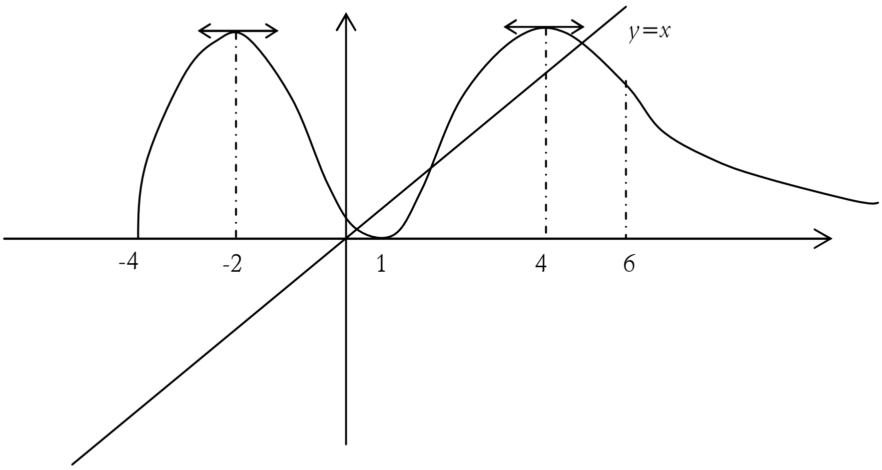
D : $f''(x)=e^{-x^2}$.

1. 8. Qcm 4 (octobre 2012) (c)

Chaque question comporte 5 réponses, chacune vraie ou fausse.

Chaque bonne réponse **rapporte** 1 point, chaque réponse fausse **enlève** 0,5 point, pas de réponse : 0 point.

Répondre simplement en mettant V ou F sur votre copie pour chaque question. Aucune justification n'est demandée.



Question 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-4\ ;\ +\infty[$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

On précise que pour tout $x\in[-4\ ;+\infty[$, $f(x)\geq 0$ et que la courbe de f ne passe pas en dessous de l'axe (Ox).

a. L'équation $f(x)=x$ admet au moins trois solutions sur $[-4\ ;\ +\infty[$.

b. La courbe de f a au plus deux tangentes parallèles à $(y = x)$.

c. Lorsque $f(x)\leq x$, on a $f'(x)\leq 1$.

d. Pour tout $a\in[0\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x)=a$ admet au moins une solution dans $[-4\ ;\ 6]$.

e. Il existe deux réels a et b tels que a est différent de b et $f(a)=f(b)$.

Question 2 : soit $f(x)=x^3(1-2x)^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Alors :

a. $f'(x)=x^2(1-2x)(3-8x)$.

b. 0 est un extrémum de f sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout réel x, $f(x)\leq f\left(\dfrac{3}{8}\right)$.

d. La courbe de f a exactement deux tangentes horizontales.

e. La courbe de *f* est en dessous de l'axe (*Ox*) lorsque $x \le 0$.

Question 3 : soit $h(x) = x - \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et (H) sa courbe représentative.

a. $\lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{x-1} = 2$.

b. La courbe (H) est toujours en dessous de la droite ($y = x$).

c. La courbe (H) ne coupe jamais la droite ($x = 0$).

d. La fonction $h(\cos x)$ a pour dérivée $-\sin x\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)$.

e. La fonction $\cos(h(x))$ a pour dérivée $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

Question 4

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ et (C) sa courbe représentative.

a. Le signe de f' est celui de $x^2 - x + 1$.

b. (C) coupe la droite ($y = 1$) en au moins un point.

c. *f* est toujours décroissante.

d. Il existe deux points de (C) où la tangente à (C) est parallèle à ($y = -x$).

e. (C) coupe l'axe horizontal en –1 et 1.

<u>Correction</u>

Question 1

a. Vrai, la courbe de la fonction coupe la droite y=x 3 fois.

b. Faux : Il faut voir si $f'(x) = 1$ quelque part : au moins 3 fois…

c. Faux : $f'(x) \le 1$ c'est quand la pente de la tangente est inférieure à celle de $y=x$ et la courbe est sous $y=x$: on voit qu'entre 1 et 1,6 environ ce n'est pas vérifié…

d. Faux : Si *a* est supérieur au maximum de *f*, l'équation $f(x) = a$ n'a pas de solution.

e. Vrai : pour tous les *a* entre –4 et 6 on peut trouver au moins un *b* tel que $f(a) = f(b)$. Il suffit de tracer la droite $y=f(a)$ et de regarder les intersections avec C.

Question 2 : soit $f(x) = x^3(1-2x)^2$

a. Faux : $f'(x) = 3x^2(1-2x)^2 + x^3(2)(-2)(1-2x) = x^2(1-2x)(3-10x)$.

b. Faux : en 0 *f'* s'annule mais ne change pas de signe.

c. Faux : évident…

d. Faux, elle en a 3 : en x=0, 1/2 et 3/10.

e. Vrai : *f* est négative lorsque $x^3 \le 0 \Leftrightarrow x \le 0$.

Question 3 : soit $h(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$, $h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

a. Vrai : $\lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)}{x} = 2$.

b. Faux : $h(x) - x = -\frac{1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x < 0$: lorsque x<0 (H) est au-dessus de la droite ($y = x$).

c. Vrai : 0 est une valeur interdite !

d. Faux : $\left[h(\cos x)\right]' = (\cos x)' \times h'(\cos x) = -\sin x\left(1+\frac{1}{(\cos x)^2}\right)$.

e. Faux : $\left[\cos(h(x))\right]' = h'(x)\left(-\sin(h(x))\right) = -\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Question 4 : $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative.

a. Vrai : $f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-1)-(x^2-2x)(2x)}{(x^2-1)^2}=\ldots=\frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}$

b. Vrai : $f(x)=1 \Leftrightarrow x^2-2x=x^2-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

c. Faux : Le signe de x^2-x+1 est + car son discriminant est <0 donc *f* est croissante sur chaque intervalle où elle est définie.

d. Faux : la dérivée est positive et ne peut jamais valoir –1…

e. Faux : –1 et 1 sont les valeurs interdites de *f*. C coupe (O*x*) en 0 et 2.

1. 9. Polynômes (c)

On considère les fonctions $P_1(x)=1+x$, $P_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$ et $P_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$.

1. Etudier les variations de ces trois fonctions et préciser leurs positions relatives. Tracer leur courbes représentatives.

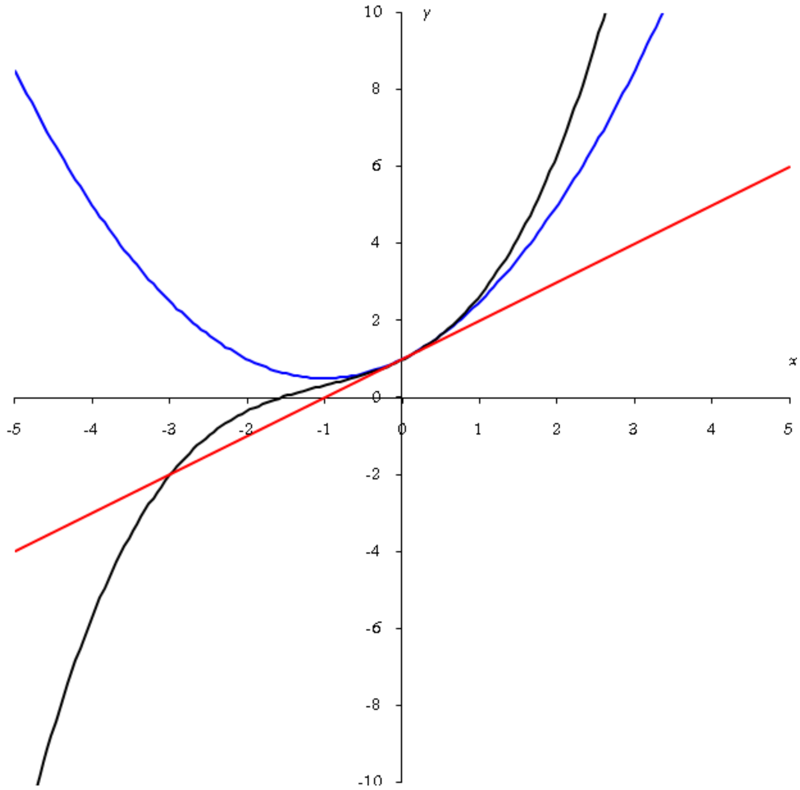
2. On cherche une racine de l'équation $P_3(x)=0$. Montrer que cette équation a une solution *r* unique. Donner un encadrement de *r* à 10^{-2} près.

3. On pose $t=-r$; montrer que *t* vérifie la relation $t=3\frac{2+t^2}{6+t^2}$. Quelle autre équation que $P_3(x)=0$ pourrait-on utiliser pour caractériser *r* ¿ Proposer une méthode de résolution graphique de l'équation précédente.

Correction

P_1 est une droite, P_2 une parabole de sommet $(-1,\ 1/2)$, $P_3'(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2>0$.

On a les représentations immédiatement :



La fonction P_3 est continue monotone strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle s'annule donc une seule fois. A la machine on a $P_3(-1,60) = -0,0027$ et $P_3(-1,59) = 0,0041$ donc $-1,60 < r < -1,59$.

3. On a donc $P_3(r) = 0 = P_3(-t) = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{6}\left(6 - 6t + 3t^2 - t^3\right)$; reprenons

$$t = 3\frac{2+t^2}{6+t^2} \Leftrightarrow 6t + t^3 = 6 + 3t^2 \Leftrightarrow 0 = 6 - 6t + 3t^2 - t^3.$$

C'est la même chose.

On peut donc résoudre l'équation précédente avec $-r = 3\frac{2+r^2}{6+r^2}$ en remettant $-r$ à la place de t. Il suffit donc de tracer la courbe $f(r) = 3\frac{2+r^2}{6+r^2}$ et la droite $y = -r$ et faire leur intersection.

1. 10. TVI et tangentes

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) \text{ et } g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α, avec $0 < \alpha < 1$. (On ne cherchera pas à calculer α). Préciser le signe de g suivant les valeurs de x.

3. Dresser le tableau des variations de la fonction f . On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de (C) d'abcisse -1 et par J le point de (C) d'abcisse $+1$.

   a. Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à (C).

   b. Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C) .

   c. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (C) (on prendra 2/3 comme valeur approchée de α).

1. 11. Fonction périodique-1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin^2 x-\sin x$

1. Prouver que la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de la courbe (C) de f.

2. Justifier que l'intervalle d'étude de f peut se limiter à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Etudier sur cet intervalle les variations de f et construire son tableau de variations.

4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 0.

5. Construire la courbe de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ (on utilisera un repère d'unités : 8 cm pour π sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées). Faire figurer (T) sur la figure.

1. 12. Fonction périodique-2

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x)=x^2(2-x) \text{ si } x\in[0\,;2] \\ f(x+2)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$.

1. Etudier la restriction f_0 de f à l'intervalle [0 ; 2]. Construire la courbe représentative C de f_0.

2. Comment peut-on déduire de C la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[2n\,;2n+2]$?

3. Démontrer que si x est dans $[2n\,;2n+2]$ alors $f(x)=(x-2n)^2(2n+2-x)$.

4. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Dérivable sur $\mathbb{R}$?

1. 13. Un peu de trigo

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi\,;+\pi]$, l'équation : $\tan 3x=\sqrt{3}$.

2. Formules d'addition.

a. Rappeler les formules exprimant $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$ et $\sin b$.

b. En utilisant $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Equation et inéquation.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;+\pi]$: $\cos 3x = \sin x$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;+\pi]$: $\frac{1}{2}\le\cos^2 x\le\frac{3}{4}$.

4. Fonction Tangente.

a. Rappeler la définition de la fonction tangente ainsi que la formule liant $\cos^2 x$ à $\tan^2 x$.

b. Sachant que $\tan\frac{6\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, calculer $\cos\frac{6\pi}{5}$ et $\sin\frac{6\pi}{5}$.

NB : On pourra remarquer que $(1+\sqrt{5})^2 = 6+2\sqrt{5}$.

5. Formules et valeurs remarquables

Rappeler les trois formules liant $\cos 2x$ à $\sin x$ et $\cos x$; en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\sin\frac{5\pi}{8}$.

6. Equations et inéquations

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\,;+\pi]$ les équations suivantes :

* $\sin 2x = \cos 3x$ * $\cos x + \tan x = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x$ * $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

b. Résoudre dans $]-\pi\,;+\pi]$ les inéquations suivantes :

* $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. * $2\sin^2 x - 1 \leq 0$.

1. 14. ROC+dérivées, France rempIt 2007

5 points

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a. Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.

b. Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

1. 15. Dérivabilité

Soit f la fonction définie par $f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. a. Justifier que f est dérivable sur $]-2\,;2[$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que, sur $]-2\,;2[$, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 2$.

3. Etudier la dérivabilité de f en $x = -2$, puis en $x = 2$; donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

4. Donner alors le tableau de variations de f.

5. Construire (C).

1. 16. Cubique et trigonométrie (c)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et que $f'(x) = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x < 1$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Représenter graphiquement la fonction f.

2. a. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ admet une seule solution x_1 dans $]-\infty\,;0]$ et que $-\dfrac{1}{3}<x_1<0$.

b. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet exactement deux solutions x_2 et x_3 dans $[0\,;1]$ et que $0<x_2<\dfrac{2}{3}<x_3<1$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de x_1.

3. a. On pose $u=\dfrac{3}{2}(x-\dfrac{1}{3})$. Montrer que l'équation (E) : $\left|x\sqrt{1-x}\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ est équivalente à (E') :

$$8u^3-6u-1=0.$$

b. Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i=\dfrac{3}{2}(x_i-\dfrac{1}{3})$. Montrer qu'il existe un unique réel θ_i de $[0\,;\pi]$ tel que $u_i=\cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ pour tout θ réel.
(On rappelle que $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$ et $\sin 2a=2\sin a.\cos a$)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$. Résoudre cette équation dans $[0\,;\pi]$ et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

Correction

1. a. $f(x)=x\sqrt{1-x}$, $D_f=\,]-\infty\,;1]$.

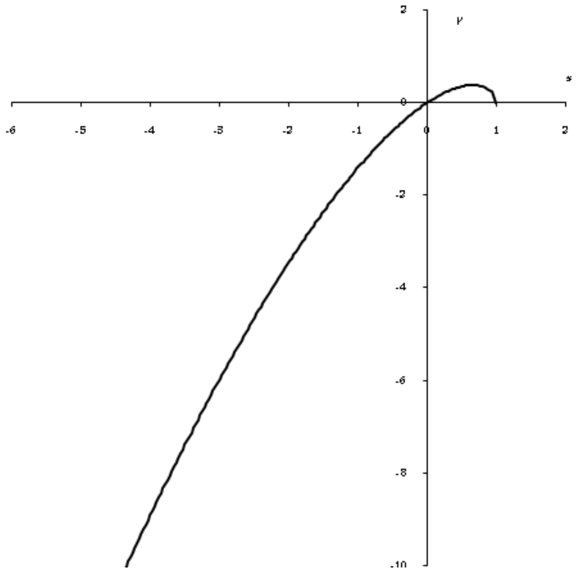
b. $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)\sqrt{-h}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)(-\cancel{h})}{\cancel{h}\sqrt{-h}}=-\infty$. Donc pas dérivable, tangente verticale en 1.

c. f est un produit de fonctions dérivables donc dérivable. $f'(x)=\sqrt{1-x}+x\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$.

d. $f(2/3)=\dfrac{2}{3}\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

La limite en $-\infty$ est évidemment $-\infty$.

x	$-\infty$		$2/3$		1
f'		+	0	−	||
f	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0



2. a. Comme *f* est strictement croissante dans $]-\infty\,;0]$ et que l'ensemble des images est également $]-\infty\,;0]$, on est sûr que l'équation $f(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ a une seule solution x_1 dans l'intervalle de départ $]-\infty\,;0]$. Après il faut calculer $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{-2}{3\sqrt{3}}<\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}=f(x_1)<f(0)=0$ ce qui justifie l'encadrement de x_1.

b. Entre 0 et 1, *f* est croissante puis décroissante et est toujours positive. Son maximum est $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ qui est supérieur à $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; il existe donc bien deux valeurs de *x* dans $[0\,;1]$ pour lesquelles $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; de plus ces deux valeurs encadrent l'abscisse du maximum de *f*, soit 2/3.

A la calculatrice on a $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ = 0,19245009 et *f*(0,217)=0,19201741, *f*(0,218)=0,19277907 ; ces deux valeurs encadrent x_1.

3. a. $u=\dfrac{3}{2}(x-\dfrac{1}{3})\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}u+\dfrac{1}{3}=x$; par ailleurs si on élève au carré :

$$\left|x\sqrt{1-x}\right|=\frac{1}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow x^2(1-x)=\frac{1}{27}\Leftrightarrow\left(\frac{2u+1}{3}\right)^2\left(1-\frac{2u+1}{3}\right)=\frac{1}{27}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 8u^3-6u-1=0\,.$$

b. $u_i=\dfrac{3}{2}(x_i-\dfrac{1}{3})$. Pour que $u_i=\cos\theta_i$, il faut et il suffit que

$$-1\le u_i\le 1\Leftrightarrow-\frac{2}{3}.-1+\frac{1}{3}\ge-\frac{2}{3}u_i+\frac{1}{3}\ge-\frac{2}{3}.1+\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1\ge x_i\ge-\frac{1}{3}\,.$$

C'est bien le cas donc il existe un unique réel θ_i de [0 ; π] tel que $u_i=\cos\theta_i$.

c. On calcule avec les formules d'addition :

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

d. On pose donc $u=\cos\theta$ dans (E') :

$$8u^3-6u-1=0\Leftrightarrow 8\cos^3\theta-6\cos\theta-1=0\Leftrightarrow 2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=1\Leftrightarrow\cos 3\theta=\frac{1}{2}\,.$$

Les solutions de $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$ sont $3\theta=\pm\frac{\pi}{3}(2\pi)\Leftrightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{9}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. On ne garde que 3 des solutions (par ex. les positives), ce qui donne $\theta_1=\frac{\pi}{9}$, $\theta_2=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{9}$, $\theta_3=\frac{\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}=\frac{13\pi}{9}$ d'où en remontant les solutions exactes : $x_1=\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}\cos\frac{7\pi}{9}+\frac{1}{3}$, $x_3=\frac{2}{3}\cos\frac{13\pi}{9}+\frac{1}{3}$. Il peut être judicieux de vérifier à la calculatrice…

1. 17. Fonction rationnelle et composée de sinus (c)

A. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $f(x)=\frac{1-x^2}{2+x}$.

1. Pour tout x réel différent de -2, trouver trois réels a, b, c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$.

2. Etudier les variations de *f* et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal.

3. Montrer que si (C) admet un centre de symétrie, alors on peut déterminer son abscisse. Démontrer que (C) admet un centre de symétrie.

B. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t)=\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$.

1. Pour tout réel t, montrer que $\varphi(\pi-t)=\varphi(t)$. Expliquer comment l'étude des variations de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ.

2. a. On pose $a=\sqrt{3}-2$. Justifier l'existence et l'unicité de $t_0\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(t_0)=a$.

b. En utilisant φ comme composée de fonctions, étudier les variations de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2};t_0\right]$ puis sur $\left[t_0;\frac{\pi}{2}\right]$.

c. Soit φ' la dérivée de φ. Pour tout nombre réel t, prouver l'égalité : $\varphi'(t)=f'(\sin t)\cos t$. Retrouver alors les valeurs pour lesquelles $\varphi'(t)$ s'annule sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

d. Tracer la courbe représentative de φ sur $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Correction

A. 1. $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\2a+b=0\\2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=-3\end{cases}$.

Donc $f(x)=-x+2-\frac{3}{x+2}$ (on utilise cette écriture de *f* par la suite).

2. $f'(x)=-1+0-\frac{-3}{(x+2)^2}=\frac{3-(x+2)^2}{(x+2)^2}=\frac{\left(\sqrt{3}-2-x\right)\left(\sqrt{3}+2+x\right)}{(x+2)^2}$.

Asymptote : $y=-x+2$, etc.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
f′		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$4+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$4-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

3. Le centre de symétrie de (C) s'il existe est au milieu des extrema, soit en A(-2 ; 4). Montrons que A est bien centre de symétrie : $f(-2+x)+f(-2-x)=4-x-\dfrac{3}{x}+4+x+\dfrac{3}{x}=8 \Rightarrow \dfrac{f(-2+x)+f(-2-x)}{2}=4$, c'est bon.

B. 1. On sait que $\sin(\pi-t)=\sin t$ donc $\varphi(\pi-t)=\varphi(t)$. Si on sait tracer φ pour $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ alors on sait le faire pour $-\dfrac{\pi}{2}\le\pi-t\le\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\pi-\dfrac{\pi}{2}\le -t\le-\pi+\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3\pi}{2}\ge t\ge\dfrac{\pi}{2}$, on sait donc le faire entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$, soit sur un intervalle de longueur 2π. Or sin a pour période 2π, on sait alors tracer φ sur $\mathbb{R}$.

2. a. Il est immédiat que $-1<a<1$, il existe donc une unique valeur t_0 de $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ qui a pour image a par sin (lire sur le cercle trigonométrique).

b. Pour $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le t_0$, comme sin est croissante, on a $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\le\sin t\le\sin t_0\Leftrightarrow -1\le\sin t\le a=\sqrt{3}-2$.
Comme $\varphi(t)=f(\sin t)$, que sin est croissante et que f est croissante entre -1 et a, on a φ croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};t_0\right]$.

Sur $\left[t_0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, sin reste croissante mais f est décroissante donc φ est décroissante.

c. On peut faire un calcul direct :

$$\varphi(t)=\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}=\frac{\cos^2 t}{2+\sin t}\Rightarrow\varphi'(t)=\frac{-2\sin t\cos t(2+\sin t)-\cos t\cos^2 t}{(2+\sin t)^2}=\cos t\frac{-4\sin t-2\sin^2 t-(1-\sin^2 t)}{(2+\sin t)^2}, \text{ soit}$$

$$\varphi'(t)=\cos t\frac{-1-4\sin t-\sin^2 t}{(2+\sin t)^2}, \text{ soit } \varphi'(t)=\cos t f'(\sin t).$$

On peut également utiliser la dérivation des fonctions composées auquel cas le résultat est immédiat : $\varphi'(t)=(\sin t)'f'(\sin t)=\cos t f'(\sin t)$.

Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos t$ est positif, le signe est donc celui de f', ce qui redonne bien les résultats précédents.

1. 18. Fonction rationnelle de base 1

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminez a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

2. Calculez $f'(x)$, déduisez en les variations de f. Déterminez ses limites, ainsi que son tableau de variation.

3. Déterminez la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = ax+b$. Tracez D et C.

1. 19. Fonction rationnelle 2 (c)

Partie A

Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $\varphi(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I de coordonnées (0 ; 3) à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}$; α et β étant deux réels que l'on déterminera.

2. Etudier les variations de f. Préciser ses limites en l'infini et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).

5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le repère proposé.

Correction

Partie A

$\varphi(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ est tangente en I si $\varphi(0)=3$ et $\varphi'(0)=4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$\varphi(0)=b=3$ et $\varphi'(x)=\dfrac{(6x+a)(x^2+1)-2x(3x^2+ax+3)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow\varphi'(0)=a=4$.

Partie B

1. $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha(x^2+1)+\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\alpha}{x^2+1}\Rightarrow\alpha=3,\beta=4$.

2. $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ d'où les racines -1 et 1. Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.

A l'infini $\dfrac{4x}{x^2+1}\approx\dfrac{4x}{x^2}=\dfrac{4}{x}$ qui tend vers 0 donc f tend vers 3, asymptote horizontale $y = 3$.

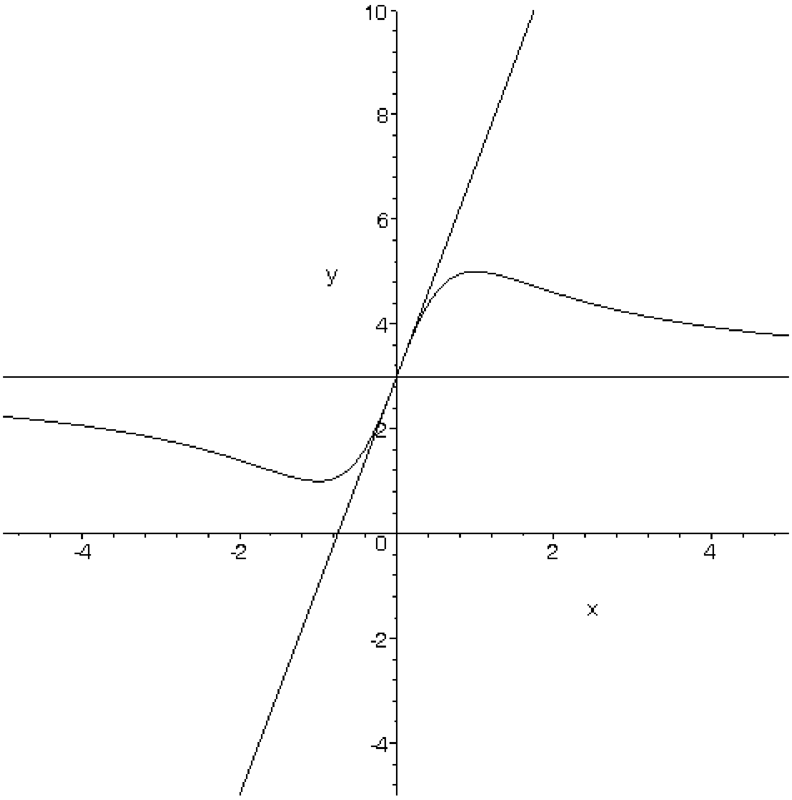
3. La tangente a évidemment pour équation $y = 4x + 3$. On fait le signe de

$$f(x)-(4x+3)=3+\frac{4x}{x^2+1}-4x-3=\frac{4x-4x(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-4x^3}{x^2+1}$$

qui est du signe de $-x$, soit (C) est au dessus de (T) pour $x\le 0$ et en-dessous pour $x\ge 0$.

4. Pour que le point $\Omega(u,v)$ soit centre de symétrie de (C) il faut que $f(u+x)+f(u-x)=2v$; ici ça donne :

$f(x)+f(-x)=3+\dfrac{4x}{x^2+1}+3-\dfrac{4x}{x^2+1}=6=2.3$, ok !



1. 20. Fonction rationnelle-3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé (unités : 5 cm).

2. On note A et B les points de (Γ) d'abscisses respectives 0 et 1. Tracer la droite (AB) ainsi que les tangentes à (Γ) en A et en B. Etudier la position de (Γ) par rapport à (AB) et à ces deux tangentes.

1. 21. Fonction rationnelle-4

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=4x^3-3x-8$.

a. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$.

a. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ sur $[1\,;\,+\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;\,+\infty[$.

c. En utilisant la définition de α, démontrer que : $f(\alpha)=\dfrac{3}{8}\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

1. 22. Fonction irrationnelle-1

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$; soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par

$$f(x)=x-2\sqrt{x}+1.$$

On appelle (Γ) sa courbe représentative.

Partie A

1. Etudier les variations de f.

2. Démontrer que pour tout x de [0 ; 1] on a $f\circ f(x)=x$. En déduire que la courbe (Γ) est symétrique par rapport à la droite $y = x$.

3. Construire (Γ).

Partie B

Onconsidère les points $A_\lambda\left(\frac{1}{2}+\lambda\,;0\right)$ et $B_\lambda\left(0\,;\frac{1}{2}-\lambda\right)$ où λ est un réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. On note (D_λ) la droite passant par ces deux points.

1. Déterminer une équation de (D_λ) sous la forme $a(\lambda)x+b(\lambda)y+c(\lambda)=0$ où a, b et c sont trois fonctions de λ.

2. Soit (D'_λ) la droite d'équation $a'(\lambda)x+b'(\lambda)y+c'(\lambda)=0$ où a', b' et c' sont les dérivées des fonctions a, b et c. Vérifier que pour toute valeur de λ, (D_λ) et (D'_λ) sont sécantes en un point M_λ.

3. Montrer que les coordonnées de M_λ sont $x_\lambda=\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2$, $y_\lambda=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2$.

4. Démontrer que lorsque λ décrit $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, M_λ décrit la courbe (Γ) de la première partie.

5. Démontrer que la droite (D_λ) est tangente à (Γ) au point M_λ.

1. 23. Fonction irrationnelle-2

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur [0 ; 1] par $f_n(x)=x^n\sqrt{x(1-x)}$. On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 10 cm).

1. Montrer que C_0 est un demi-cercle de rayon 1/2 , dont on précisera le centre.

2. Soit $n\geq 1$.

a. Calculer $f_n'(x)$ pour $0 < x < 1$ et montrer que $f_n'(x)$ et $(n+\frac{1}{2})-(n+1)x$ ont même signe.

b. Etudier la dérivabilité de f_n en 0 et 1.

c. Donner le tableau de variations de f_n (on ne demande pas le calcul du maximum de f_n).

3. Soit $x\in[0\,;1]$ et $n\geq 0$; étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$; en déduire les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

4. Tracer sur la même figure les courbes C_0, C_1, et C_2.

1. 24. Fonction irrationnelle-3

Soit la fonction numérique f définie sur [1 ; +∞ [par $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, de courbe représentative C dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 2 cm).

1. a. Démonter que la droite D d'équation $2y - x + 2 = 0$ est asymptote « oblique » à C quand x tend vers $+\infty$.

b. Justifier que pour tout $x\in$ [1 ; +∞ [, $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}<1$. En déduire la position relative de C et D sur [1 ; +∞ [.

2. a. Justifier que pour tout $h > 0$: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}-\frac{h+2}{(1+h)\sqrt{h^2+2h}}$.

b. Calculer : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Interpréter le résultat pour f en $x_0=1$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. Soit la fonction numérique g définie sur $]1\ ;\ +\infty\ [$ par $g(x)=x^2\sqrt{x^2-1}-2$.

a. Calculer $g(\sqrt{2})$.

b. Monter que g est strictement croissante sur $]1\ ;\ +\infty\ [$ (on ne calculera pas les limites de g).

Déduire de ce qui précède le signe de g sur $]1\ ;\ +\infty\ [$.

4. Calculer $f'(x)$. Montrer que f' est du signe de g sur $]1\ ;\ +\infty\ [$. Dresser le tableau de variation complet de f sur $[1\ ;\ +\infty\ [$.

5. Représenter graphiquement la courbe C (*avec asymptote et tangentes.).*

1. 25. Fonction irrationnelle-4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $g(x)=x^2(x+2)$.

1. Etudier les variations de g sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

2. Démontrer que l'équation $g(x)=4$ admet, sur $\left[0\,;+\infty\right[$, une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2}.

3. En déduire la résolution de l'inéquation $g(x)>4$ sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}+x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1. Etudier la parité de f.

2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Peut-on en déduire une ou plusieurs droites asymptotes à la courbe (C_f) ?

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à (C_f) en $-\infty$.

4. a. Démontrer que f est dérivable sur les intervalles $\left]-\infty\,;0\right[$ et $\left]0\,;+\infty\right[$ puis que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{g(x^2)}-2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.

b. Déduire de la partie A que $f'(x)>0$ sur $\left]\sqrt{\alpha}\,;+\infty\right[$.

c. En déduire les variations de f sur $\left]0\,;+\infty\right[$ puis sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

6. Tracer la courbe (C_f) en vous aidant de tous les renseignements obtenus précédemment.

1. 26. Fonction irrationnelle-5

Soit f la fonction définie par $f(x)=x+\sqrt{x^2-6x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Peut-on en déduire l'existence d'une ou plusieurs asymptotes à la courbe (C_f) représentative de f ?

3. a. Démontrer que la droite $\Delta : y = 2x - 3$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $+\infty$.

b. Etudier les positions relatives de la droite Δ et de la courbe (C_f) sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]6\,;+\infty[$.

4. a. Etudier la dérivabilité de la fonction *f* en 0 et en 6.

b. Quelles sont les conséquences graphiques des ces calculs ?

1. 27. Fonction définie par morceaux

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3 \text{ si } x \in \left]-\infty;1\right[\\ f(1) = -2 \\ f(x) = \sqrt{x-1} - 2 \text{ si } x \in \left]1;+\infty\right[\end{cases}$

1. *f* est-elle continue en $x = 1$?

2. *f* est-elle dérivable en $x = 1$?

3. Quelles conséquences graphiques peut-on tirer des résultats précédents ? Tracer la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal. (Aucune étude de variations n'est demandée.)

1. 28. Fonction paire, fonction impaire

Partie préliminaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

a. On définit deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associées à *f*, notées respectivement f_p et f_i par :

$$f_p(x) = \frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right] \text{ et } f_i(x) = \frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right].$$

Montrer que f_p est une fonction paire et f_i est une fonction impaire.

b. Supposons qu'il existe une fonction paire *g* et une fonction impaire *h*, définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f = g + h$. Montrer que nécessairement $g = f_p$ et $h = f_i$.

c. Déduire des questions précédentes que toute fonction *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Les fonctions f_p et f_i sont appelées respectivement « partie paire » et « partie impaire » de *f*.

1. Etude de deux cas particuliers

a. Fonction polynomiale.

On considère la fonction polynomiale *P* définie par : $P(x) = 5x^6 + 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Vérifier que la partie paire P_p et la partie impaire P_i de la fonction *P* sont des fonctions polynômes dont on donnera l'expression.

Quelle remarque peut-on faire sur la partie paire et sur la partie impaire d'une fonction polynôme ?

b. Fonction exponentielle.

Dans cette question, on pose $f(x) = \exp(x)$ et l'on note respectivement **ch** et **sh** les fonctions f_p et f_i associées.

i/ Calculer les dérivées ch' et sh'.

ii/ Montrer que pour tout réel *x*, on a : $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

iii/ Montrer que, pour tout réel *x*, on a : $\text{ch}(2x) = 2\text{ch}^2(x) - 1$ et $\text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x)$.

Note : à cause de certaines analogies frappantes dans les relations précédentes avec cosinus et sinus, les fonctions **ch** et **sh** sont appelées respectivement « cosinus hyperbolique » et « sinus hyperbolique ».

2. Détermination d'une solution d'équation « fonctionnelle différentielle ».

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout réel *x* :

$$f''(x)+f(-x)=x+x^2.$$

a. Montrer que chacune des fonctions f_p et f_i associées à f est solution d'une équation différentielle du second ordre.

b. Déterminer une fonction polynomiale vérifiant chacune des équations différentielles précédentes. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

3. Décomposition et ramification d'une fonction polynôme.

a. Montrer que pour toute fonction polynôme P peut s'écrire de manière unique sous la forme $P(x)=P_0(x^2)+xP_1(x^2)$ où P_0 et P_1 sont des fonctions polynômes. (Utiliser la question 1.)

P donne donc naissance à deux polynômes P_0 et P_1.

De même ces deux derniers polynômes donnent respectivement P_{00}, P_{01}, P_{10} et P_{11} selon le schéma suivant :

$$P$$

$$P_0 \qquad\qquad P_1$$

$$P_{00} \quad P_{01} \qquad\qquad P_{10} \quad P_{11}$$

$$P_{000} \quad P_{001} \quad P_{010} \quad P_{001} \qquad P_{100} \quad P_{101} \quad P_{110} \quad P_{111}$$

… … … … … … … … … … … … … … … …

Présentation d'un exemple : avec $P(x)=5x^6+3x^5-4x^3+2x^2-x+1$.

$$P(x)=5x^6+3x^5-4x^3+2x^2-x+1$$

$$P_0(x)=5x^3+2x+1 \qquad\qquad P_1(x)=3x^2-4x-1$$

$$P_{00}(x)=1 \quad P_{01}(x)=5x+2 \qquad\qquad P_{10}(x)=3x-1 \quad P_{11}(x)=-4$$

$$P_{000}(x)=1 \quad P_{001}(x)=0 \quad P_{010}(x)=2 \quad P_{011}(x)=5 \qquad P_{100}(x)=-1 \quad P_{101}(x)=3 \quad P_{110}(x)=-4 \quad P_{111}(x)=0$$

b. Inversement, existe-t-il une fonction polynôme P vérifiant les conditions :

$P_{111}(x)=4$; $P_{110}(x)=0$; $P_{101}(x)=0$; $P_{100}(x)=3$; $P_{011}(x)=5$; $P_{010}(x)=3$; $P_{001}(x)=-1$; $P_{000}(x)=6$?

1. 29. Triangle d'aire maximale (c)

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R=(O\,;\vec{i},\vec{j})$ le cercle Γ de centre O et de rayon 1. Soient les points de Γ : A (1 ; 0) et $A'(-1\,;0)$.

1. Par tout point H du segment [AA'], distinct de A et de A' on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overline{OH}=x$. Calculer l'aire du triangle AMM'.

2. Soit f la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans R (unités graphiques 4 cm).

a. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1. En déduire les tangentes à (C) aux points d'abscisses -1 et 1.

b. Dresser le tableau de variations de f.

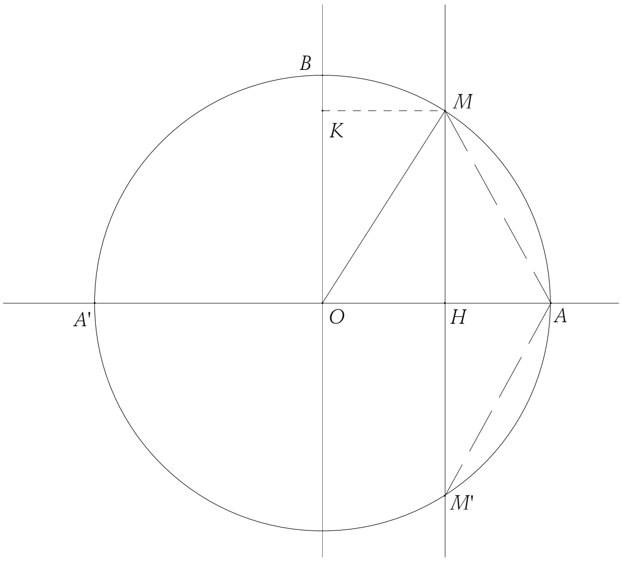
c. Tracer (C).

3. Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

4. a. Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions α et β ($\alpha<\beta$) et donner en le justifiant une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

b. Discuter graphiquement suivant les valeurs de m réel le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

5. On considère la courbe (U) donnée par l'équation $y^2-(1-x)^2(1-x^2)=0$. Montrer que (U) est constituée de deux courbes (C) et (C'), (C') étant l'image de (C) par une transformation que l'on précisera.



Correction

1. On a $\overline{OH}=x$ d'où avec Pythagore :

$$OM^2=OH^2+HM^2 \Leftrightarrow HM=\sqrt{1-x^2}.$$

L'aire de AMM' est

$$\frac{1}{2}AH.MM'=\frac{1}{2}(1-x)2\sqrt{1-x^2}=(1-x)\sqrt{1-x^2}.$$

2. f représente évidemment l'aire du triangle AMM'…

a. On calcule en 1 (à gauche car à droite la fonction n'existe pas) :

$\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{-h\sqrt{1-(1+h)^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}-\sqrt{-2h-h^2}=0$; la fonction est dérivable et il y a une tangente horizontale en 1. De même à droite de -1 :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2-h)\sqrt{1-(-1+h)^2}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2-h)\cancel{h}(2-h)}{\cancel{h}\sqrt{2h-h^2}}=+\infty .$$

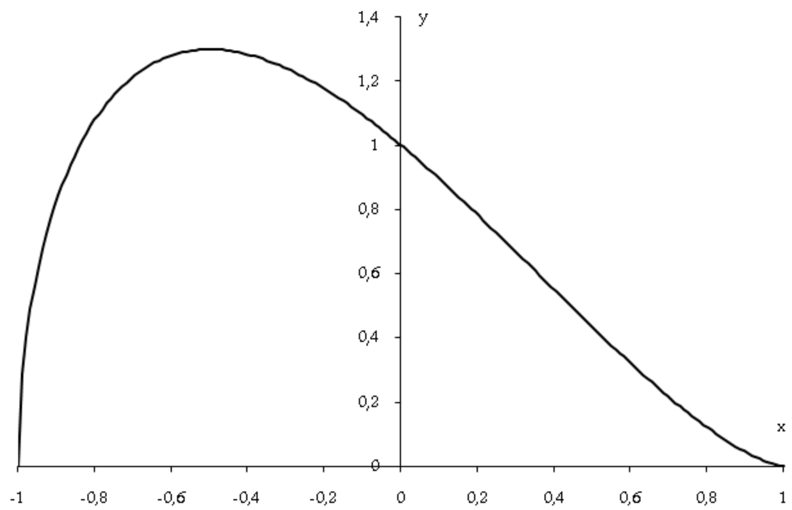
La fonction n'est pas dérivable, il y a une tangente verticale en -1.

b. $f'(x)=-\sqrt{1-x^2}+\frac{(1-x)(-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(1-x^2)-x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

qui a pour racines 1 et $-\frac{1}{2}$.

$f(-1/2)=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

x	-1		$-1/2$		1
f′	∞	$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

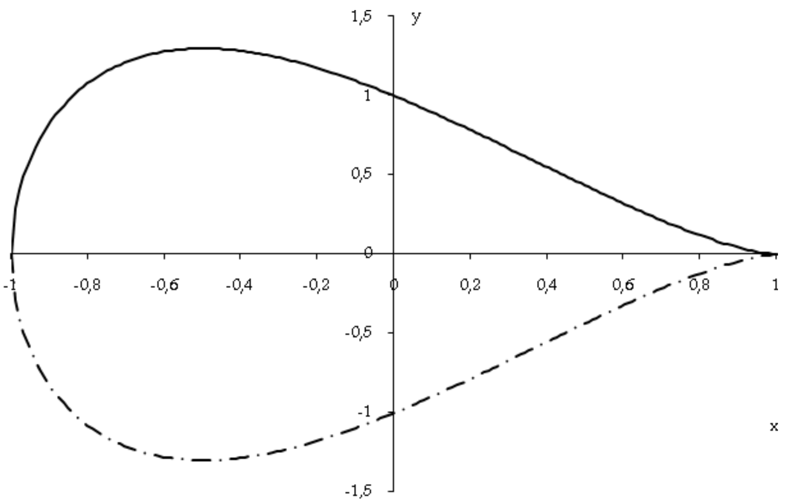


c. L'aire de *AMM'* est maximale lorsque $x = -1/2$, soit lorsque le triangle est équilatéral (dans ce cas M est à l'affixe $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$).

4. a. On a immédiatement que $f(x) = 1$ a comme solution 0 ($f(0) = 1$) et une autre solution α. On met la machine en route : on a alors $f(-0{,}8395288) = 0{,}99944395 < 1$ et $f(-0{,}83926702) = 1{,}00004531 > 1$ par exemple. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires on en déduit que f vaut 1 entre ces deux valeurs et donc $\alpha\approx -0{,}839$.

b. Lorsque $m < 0$ il n'y a pas de solution ; lorsque $0\le m<\frac{3\sqrt{3}}{4}$ on a deux solutions, lorsque $m=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ il y a une seule solution ($-1/2$), enfin pour $m>\frac{3\sqrt{3}}{4}$ il n'y a pas de solution.

5. A partir de $y=(1-x)\sqrt{1-x^2}$ on élève au carré ce qui donne : $y^2-(1-x)^2(1-x^2)=0$. En fait cette courbe est la réunion de $y=(1-x)\sqrt{1-x^2}$ et de $y=-(1-x)\sqrt{1-x^2}$. Il suffit de symétriser la courbe de f par rapport à (Ox) pour obtenir la courbe entière (très joli).



1. 30. Cissoïde de Dioclès

f est la fonction définie pour tout x de l'intervalle [0 ; 1[par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

1. *f* est-elle dérivable en 0 ? Dressez le tableau de variation de *f*.

2. On note (C_1) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a. Ecrivez une équation de la tangente T à la courbe (C_1) au point d'abscisse 1/2.

b. Sur le même graphique tracez (C_1) et T, puis la courbe (C_2) symétrique de (C_1) par rapport à l'axe des abscisses.

Démontrez que « $M(x\,;\,y)$ appartient à $\Gamma=C_1\cup C_2$ » est équivalent à « les coordonnées de M vérifient l'équation E : $x(x^2+y^2)-y^2=0$ ».

La courbe Γ est appelée **cissoïde de Dioclès**.

3. Interprétation géométrique de (E).

I est le point de coordonnées (1 ; 0), (C) est le cercle de diamètre [OI] et Δ est la tangente à (C) au point I. (d) est la droite passant par O et de coefficient directeur t (t est un réel).

a. Déterminez les coordonnées de M, point d'intersection, autre que O, de (C) et (d).

b. Déterminez les coordonnées de M', point d'intersection, autre que O, de Γ et (d).

c. Déterminez les coordonnées de M, point d'intersection de Δ et (d).

d. Démontrez que $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{MN}$.

e. Déduisez-en un procédé permettant de construire Γ point par point à partir de M et N. Construisez Γ .

4. *Prolongements*

La droite (IM') coupe l'axe des ordonnées en P.

a. Démontrez que $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{NO}=NI^2$ et que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OI}=OI^2$.

b. Déduisez-en que $NI^2=OM'\times NO$ et que $OI^2=OM\times ON$. Démontrez que $\dfrac{OP}{NI}=\dfrac{OM'}{M'N}=\dfrac{OM'}{OM}$.

c. Déduisez des questions précédentes que $OP\times OI^2=IN^3$ ou encore $OP=IN^3$.

En choisissant $OP=2$, il vient $IN=\sqrt[3]{2}$.

Expliquez comment la cissoïde de Dioclès permet de résoudre le problème suivant :

« Etant donné un cube d'arête a, construire l'arête x d'un cube dont le volume est le double du cube précédent. »

1. 31. Strophoïde droite et inversion

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on considère le point A de coordonnées (−1 ; 0).

Partie A

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ pour $x\in[-1\,;1[$.

1. Etudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative S_1. Préciser les tangentes ou demi-tangentes à S_1 aux points A et O.

2. Soit S_2 l'image de S_1 par la réflexion d'axe (Ox). Donner une équation de S_2. Vérifier que la courbe $S=S_1\cup S_2$ a pour équation $x^3+xy^2+x^2-y^2=0$. Tracer S.

3. Soit λ un réel non nul et N le point de coordonnées $(0\,;\lambda)$. Ecrire une équation cartésienne, notée (1), de la droite (AN) en fonction de λ. Vérifier que le cercle C_λ, de centre N, passant par O, a pour équation :

$$(2)\quad x^2+y^2-2\lambda y=0\,.$$

Pour tout λ non nul, (AN) et C_λ se coupent en deux points distincts d'ordonnée non nulle. Exprimer λ en fonction de x et y à l'aide de l'équation (2). Reporter l'expression trouvée dans (1) et vérifier que les deux points d'intersection de (AN) et C_λ appartiennent à S.

4. En déduire une construction de S, par points, à la règle et au compas (utiliser un logiciel de construction dynamique).

Partie B

M est un point de P ; on se propose d'étudier, s'ils existent, les points M' de P vérifiant à la fois les deux conditions suivantes :

- A, M, M' sont alignés
- $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=0$

Soit (C) le cercle de diamètre [OA].

1. Déterminer l'ensemble des points M' dans chacun des cas suivants :

a. M est en O.

b. M est en A.

c. M est un point de (C) autre que O et A.

d. M est un point de l'axe des abscisses autre que O et A.

e. M est un point de l'axe des ordonnées autre que O.

2. On suppose que M n'est pas sur (C) ; montrer qu'il n'existe qu'un seul point M' satisfaisant aux conditions. Donner une construction géométrique de M'.

3. Soit f l'application de P privé de (C) vers P privé de (C) qui à M associe M'. Montrer que $f\circ f=Id$. Quelle conséquence en tirez-vous ?

Partie C

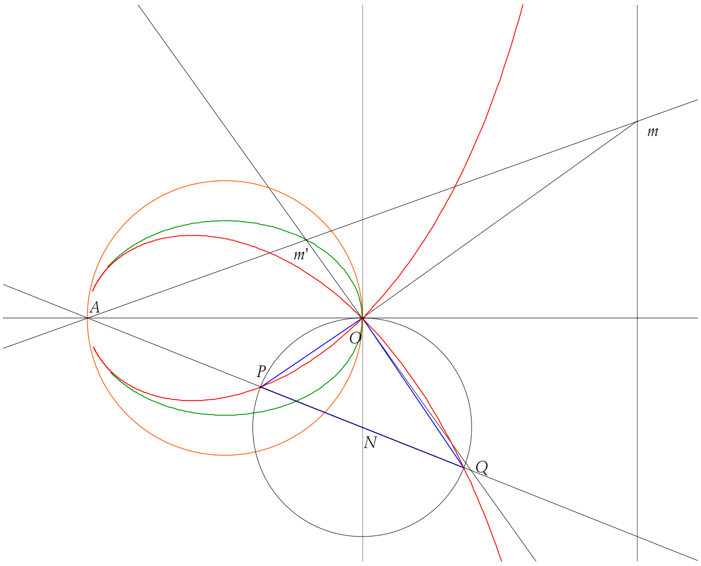
1. On appelle S* la courbe S privée de A et O. Déterminer une construction géométrique de l'image f(S*) de S*.

2. Exprimer les coordonnées de $M'(x'\,;y')$ en fonction des coordonnées de $M(x\,;y)$.

3. On considère la droite D* d'équation $x = 1$ et privée de son point d'ordonnée nulle. Déterminer une équation de son image f(D*). Tracer cette image.

4. On considère la courbe H $(y=\dfrac{1}{x})$. Donner une équation de son image f(H). La tracer.

http://www.mathcurve.com/courbes2d/strophoiddroite/strophoiddroite.shtml



1. 32. Sinus cardinal

On désigne par g la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $g(x)=x\cos x-\sin x$.

1. Etudier g et dresser son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $[0\,;\pi]$.

2. Soit f la fonction définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x\in[-\pi\,;\pi]\setminus\{0\} \end{cases}$.

a. Montrer que f est paire. Qu'en déduit-on pour sa courbe représentative (Γ) ?

b. Etudier les variations de f. On vérifiera particulièrement que f est continue en 0.

c. Prouver que pour tout réel x positif ou nul, on a $0\le x-\sin x\le \frac{1}{6}x^3$. En déduire que f est dérivable à droite de 0. Que peut-on dire sur la dérivabilité de f à gauche de 0 ?

d. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. 33. Arc tangente,N. Calédonie 2003

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par :

$$f_0(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul } f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note C_n, la courbe représentative de f_n, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

On désigne par I_n l'intégrale $I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$.

Partie A

1. a. Étudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?

b. Étudier les variations de f_1.

c. Tracer la courbe C_1.

d. Calculer I_1.

2. a. Étudier les limites de f_3 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_3.

c. Tracer la courbe C_3 sur le même dessin qu'au 1. c.

3. Calculer I_1+I_3. En déduire la valeur de I_3.

4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes C_1, C_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

1. a. Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier les variations de f_0.

2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par $a_n=\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

a. Interpréter graphiquement a_n.

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

c. Montrer que pour tout réel t : $\frac{1}{1+t^2}\le 1$ et en déduire que $a_1\le 1$.

d. Montrer que pour tout réel t non nul : $\frac{1}{1+t^2}\le\frac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel non nul, $\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt\le 1-\frac{1}{n}$.

e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n\le 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Partie C

Soit F la fonction telle que : $F(0) = 0$, F dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1. On pose, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan(x)]$.

a. Calculer $H(0)$.

b. Montrer que H est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

c. En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.

d. Montrer que $F(1)=\frac{\pi}{4}$.

2. On pose, pour tout x réel positif ou nul, $k(x)=F\left(\frac{1}{x+1}\right)+F\left(\frac{x}{x+2}\right)$.

a. Montrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $k'(x)$.

b. En déduire la valeur de $F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)$.

1. 34. Autour de sin(1/x)

La fonction f est définie par : $f(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Déterminer la fonction dérivée de f.
4. Montrer que la courbe de f est située dans une « bande ».

5. En quels points la courbe de la fonction coupera-t-elle l'axe des abscisses ?

1. 35. Suites et sinus

On considère les fonctions suivantes définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\sin x\,,\ g(x)=-1+\frac{1}{2}x^2+\cos x\,,\ h(x)=-x+\frac{1}{6}x^3+\sin x\,.$$

1. Etudier les variations de f ; en déduire que f est positive ou nulle sur $[0\,;+\infty[$.

2. a. De la même manière, justifier, en étudiant leurs variations, que g et h sont positives ou nulles sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déduisez en l'encadrement $x-\frac{1}{6}x^3\le \sin x\le x$ pour $x\ge 0$.

3. On considère les suites u_n et v_n définies pour tout entier naturel n non nul de la manière suivante :

$$u_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\ldots+\sin\frac{n}{n^2}\ \text{ et }\ v_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\,.$$

a. Montrez que $v_n=\frac{n(n+1)}{2n^2}$ et que v_n converge vers $\frac{1}{2}$.

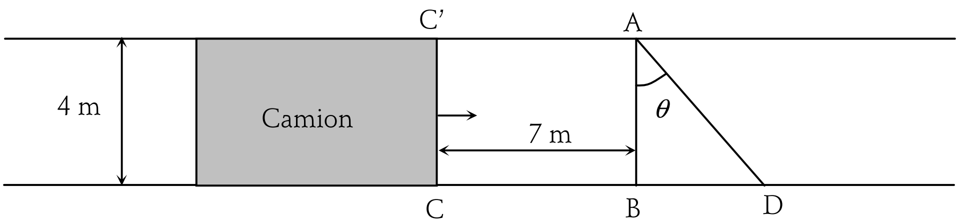
b. Montrez par récurrence que $1^3+2^3+\ldots+n^3\le n^4$ pour tout n entier naturel non nul.

c. Déduisez de l'inégalité du 2.b. que $v_n-\frac{1}{6}\times\frac{1}{n^2}\le u_n\le v_n$.

d. En déduire que u_n converge et déterminez sa limite.

1. 36. Camion et Lapin, N. Caledonie 2005 (c)

5 points



Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.

Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta=\widehat{BAD}$ avec $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ (en radians).

1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2. On pose $f(\theta)=\frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta}$.

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta)>0$.

3. Conclure.

Rappel :

La fonction $x \to \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée la fonction $x \to \frac{1}{\cos^2 x}$.

Correction

1. On appelle v la vitesse du lapin, et donc $2v$ celle du camion.

$\frac{AB}{AD} = \cos\theta \Rightarrow AD = \frac{AB}{\cos\theta} = \frac{4}{\cos\theta}$ d'où $t_1 = \frac{AD}{v_{Lapin}} = \frac{4}{v\cos\theta}$.

$\frac{BD}{AB} = \tan\theta \Rightarrow BD = 4\tan\theta$ d'où $t_2 = \frac{CB}{v_{Camion}} + \frac{BD}{v_{Camion}} = \frac{7}{2v} + \frac{4\tan\theta}{2v}$.

2. Le temps mis par le camion doit être supérieur à celui mis par le lapin (si le lapin veut éviter le camion…), il faut donc

$$t_2 > t_1 \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2v} > \frac{4}{v\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2} > \frac{4}{\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta} > 0 \Leftrightarrow f(\theta) > 0.$$

3. A priori on ne sait pas trop résoudre l'inéquation proposée, on va plutôt regarder les variations de f :

$$f'(t) = 2\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{-4(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = 2\frac{1-2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

qui s'annule pour $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$: lorsque $\theta < \frac{\pi}{6}$, $\sin\theta < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(\theta) > 0$, f croissante, $\frac{\pi}{6}$ donne l'abscisse du maximum de f, qui est alors de

$$f(\pi/6) = \frac{7}{2} + 2\tan\frac{\pi}{6} - \frac{4}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{7}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 0,036.$$

Comme $f(0) = 3,5 - 4 = -0,5 < 0$ et que $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$, la fonction s'annule deux fois : une première fois vers 0,4, une deuxième vers 0,65 ; le lapin doit donc choisir un angle dans ces zones-là pour avoir une chance de survivre…

On peut essayer de résoudre directement : $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{4}{\cos\theta} = \frac{7\cos\theta + 4\sin\theta - 8}{2\cos\theta}$;

utilisons les formules d'Euler :

$$7\cos\theta + 4\sin\theta - 8 = 7\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} + 4\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} - 8 = 7\frac{ie^{2i\theta}+i}{2ie^{i\theta}} + 4\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}} - 8\frac{2ie^{i\theta}}{2ie^{i\theta}}$$
$$= \frac{7ie^{2i\theta} + 7i + 4e^{2i\theta} - 4 - 16ie^{i\theta}}{2ie^{i\theta}};$$

posons $z = e^{i\theta}$, soit l'équation $7iz^2 + 7i + 4z^2 - 4 - 16iz = 0 \Leftrightarrow (7i+4)z^2 - 16iz + 7i - 4 = 0$.

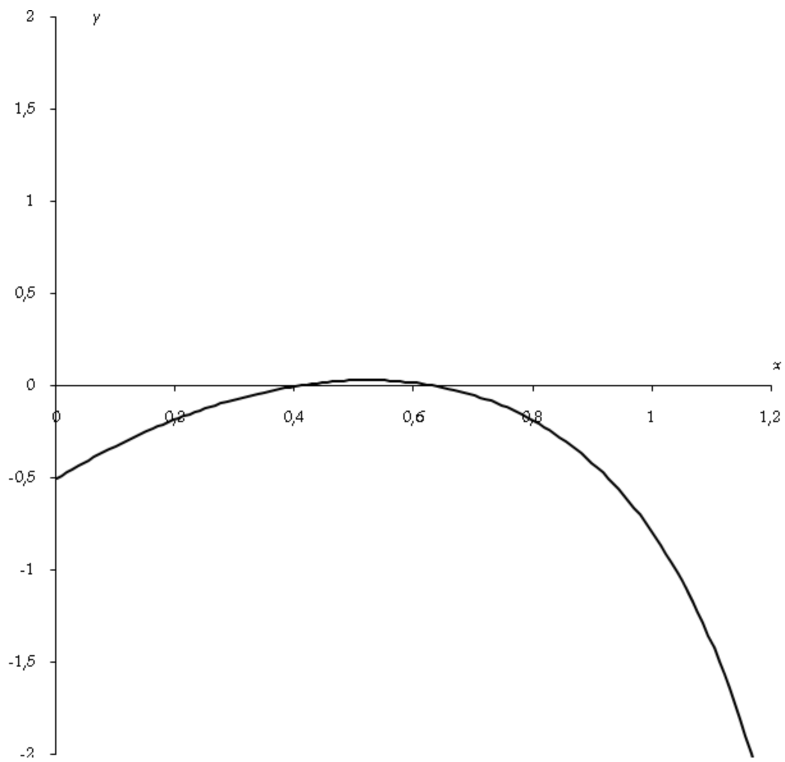
$\Delta = (-16i)^2 - 4(7i+4)(7i-4) = -256 - 4(-49-16) = \ldots$; on met les solutions sous la forme $e^{i\theta}$, les solutions étant alors l'argument du résultat. Comme on peut le voir directement, avec Maple, ça tombe en deux coups de cuiller à pot :

```
> f:=z->7/2+2*tan(z)-4/(cos(z));
> v:=[solve(f(z)=0)];evalf(v);
```

$$f := z \to \frac{7}{2} + 2\tan(z) - \frac{4}{\cos(z)}$$

$$v := \left[\arctan\left(\frac{3}{4}\right), \arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right]$$

$[0.6435011088, 0.3947911197]$



2
y
1,5
1
0,5
0
x
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
-0,5
-1
-1,5
-2