Terminale S

Nombres Complexes — Exercices

1. 1. Divers,QCM, France 2003 - 5 points

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et Ω d'affixes respectives : $a=-1+\sqrt{3}+i$ et $\omega=-1+2i$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.

2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1	$\lvert a-\omega\rvert=$	2	4	$\sqrt{3}-1$
2	$\arg(a-\omega)=$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{47\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
3	$(\vec{v},\overrightarrow{\Omega C})=$	$\arg[(\omega-i)]$	$-(\vec{v},\overrightarrow{C\Omega})$	$\frac{2\pi}{3}$
4	$\omega=$	$\frac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b-2i$
5	$\frac{b-d}{a-d}=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}i$	$\frac{\sqrt{3}}{3}i$
6	Le point D est :	l'image de Ω par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$.	l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.	l'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

Annexe

1	Réponses			
2	Réponses			
3	Réponses			
4	Réponses			
5	Réponses			
6	Réponses			

1. 2. QCM, Asie 2009, *4 points*

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) : $f(x)=-2e^{-2x}+3$. Réponse (2) : $f(x)=-2e^{2x}+3$. Réponse (3) : $f(x)=-2e^{-2x}-3$.

Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1) : $\{(A, 1), (C, 2)\}$ Réponse (2) : $\{(A, 1), (B, 2), (C, 2)\}$ Réponse (3) : $\{(A, 1), (B, 2), (C, 1)\}$

Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne : $x-3y+2z=5$ et le point $A(2 ; 3 ; -1)$. Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point :

Réponse (1) : $H_1(3 ; -1 ; 4)$ Réponse (2) : $H_2(4 ; -3 ; -4)$ Réponse (3) : $H_3(3 ; 0 ; 1)$

Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1) : $-\dfrac{\pi}{2}$ Réponse (2) : $\dfrac{\pi}{4}$ Réponse (3) : $\dfrac{\pi}{2}$.

<u>1. 3. QCM, Antilles 2009, *5 points*</u>

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe $-4i$ et l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z-3|=|z+4i|$.

Affirmation : E est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\dfrac{c-a}{b-a}=2i$.

Affirmation : A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

3. On considère le nombre $z=2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Affirmation : z^{2009} est un nombre réel positif.

4. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC. On note F l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$.

Affirmation :F est la sphère de centre de G et de rayon 2.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. S est la sphère $x^2+y^2+z^2=5$. P est le plan d'équation $x + y - 5 = 0$.

Affirmation : Le plan P coupe la sphère S suivant un cercle.

<u>1. 4. QCM, Polynésie rempl. 2005 - 3 points</u>

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2 ; 5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a. $|z-2+5i|^2=3$; b. $|z+2-5i|^2=3$; c. $|z-2+5i|=3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AD]$;

c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $5 + 4i$, et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $\left|z_G-3-2,5i\right|=\frac{5}{6}$; b. $z_G-(1+i)=\frac{1}{3}(4+3i)$; c. $z_G-(3+2,5i)=\frac{1}{3}(4+3i)$.

1. 5. QCM, N. Calédonie nov 2007 - 4 points

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+i$ est :

a. 3 b. i c. $3 + i$

2. Soit z un nombre complexe ; $\left|z+i\right|$ est égal à :

a. $\left|z\right|+1$ b. $\left|z-1\right|$ c. $\left|i\bar{z}+1\right|$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a. $-\frac{\pi}{3}+\theta$ b. $\frac{2\pi}{3}+\theta$ c. $\frac{2\pi}{3}-\theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a. $n = 3$ b. $n = 6k + 3$, avec k relatif c. $n = 6k$ avec k relatif

5. Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\left|z-i\right|=\left|z+1\right|$ est :

a. la droite (AB) b. le cercle de diamètre $[AB]$ c. la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6. Soit le point d'affixe $1-i$.

L'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$ vérifiant $\left|z-1+i\right|=\left|3-4i\right|$ a pour équation :

a. $y=-x+1$ b. $\left(x-1\right)^2+y^2=\sqrt{5}$ c. $z=1-i+5e^{i\theta}$ avec θ réel

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ est :

a. $1-4i$ b. $-3i$ c. $7+4i$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1}=z$ est :

a. $\left\{1-i\right\}$ b. L'ensemble vide c. $\left\{1-i\,;1+i\right\}$

1. 6. QCM d'après des sujets de concours GEIPI

Dans chaque question sont proposées plusieurs réponses, chacune de ces réponses pouvant être vraie ou fausse. Il n'y a pas forcément une seule bonne réponse pour chaque question. Donner pour chaque question les réponses vraies et les réponses fausses. Chaque résultat exact rapportera des points, chaque résultat inexact entraînera une pénalité. Une absence de réponse ne sera pas considérée comme un résultat inexact. Si le total des points, pour une question est négatif, ce total sera ramené à 0.

1. Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :

a. $|1+z|\geq 1$.

b. Si $|z|=|z-1|$ alors $\text{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$.

c. Si $|z|=|z'|$ alors $z = z'$ ou $z = -z'$.

d. $|z+z'|=|z|+|z'|$.

2. On considère les complexes $a=1-i$ et $b=1+i\sqrt{3}$

a. $ab=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

b. Il existe un entier n non nul tel que a^n est un réel.

c. Il existe un entier n non nul tel que a^n et b^n sont tous deux des entiers.

d. Le point A d'affixe a est l'image du point B d'affixe b par une rotation de centre O.

3. Pour tout réel θ de $[0\,;\,2\pi[$ on pose $Z(\theta)=1+e^{i\theta}$. Alors :

a. $Z(\frac{2\pi}{3})=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Pour tout θ de $[0\,;\,2\pi[$, $\overline{Z(\theta)}=Z(-\theta)$.

c. Pour tout θ de $[0\,;\,2\pi[$, $Z(\theta)e^{i\frac{\theta}{2}}$ est réel.

d. L'ensemble des points $M(\theta)$ d'affixe $Z(\theta)$ est un cercle de rayon 1.

4. Soit a un réel de $]\frac{1}{e}\,;e[$ et (E) l'équation d'inconnue z : $z^2-2z\ln a+1=0$. On appelle M et N les points dont les affixes sont les solutoins de (E). Alors :

a. Les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

b. Les points M et N sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1.

c. Il n'existe aucune valeur de a telle que M et N sont symétriques par rapport à O.

d. Si A est le point d'affixe -1, on a $AM < 2$.

1. 7. QCM, La Réunion 2009, *4 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z=1-2i+e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

a. (E) est une droite passant par le point d'affixe $2-2i$.

b. (E) est le cercle de centre d'affixe $-1+2i$ et de rayon 1.

c. (E) est le cercle de centre d'affixe $1-2i$ et de rayon 1.

d. (E) est le cercle de centre d'affixe $1-2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=-iz-2i$.

a. f est une homothétie.

b. Le point d'affixe $-1-2i$ est un antécédent du point d'affixe i.

c. f est la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

d. f est la rotation de centre le point d'affixe $-1-i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\left|z-1+i\right|=\left|z+1+2i\right|$.

Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1-i$, $-1+2i$ et $-1-2i$.

a. C est un point de (F).

b. (F) est la médiatrice du segment $[AB]$.

c. (F) est la médiatrice du segment $[AC]$.

d. (F) est le cercle de diamètre $[AB]$.

4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z+\left|z\right|^2=7+i$. Cette équation admet :

a. Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.

b. Une solution réelle.

c. Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.

d. Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

1\. 8. Vrai-Faux, Centres étrangers 2009, 4 *points*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'afiïxe z, N d'affixe $\bar{z}$ et P d'affixe $\frac{z^2}{\bar{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3. Pour tout nombre complexe z, si $\left|1+iz\right|=\left|1-iz\right|$ alors la partie imaginaire de z est nulle.

4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $\left|z+z'\right|=\left|z-z'\right|$, alors les droites ($OM$) et ($OM'$) sont perpendiculaires.

1\. 9. Basique, Antilles 2007 - 5 points

$(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit A le point d'affixe $1+i$.

Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{1}{2}\left(z+i\bar{z}\right)$.

1. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x'=\frac{1}{2}(x+y)$ et $y'=\frac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite (OA).

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M=M'$.

c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2=\bar{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4+i$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.

b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z'-z=\frac{1}{2}iz_3$. En déduire que $MM'=\frac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM'=\frac{1}{2}OM$.

Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

1. 10. Basique, Antilles 2006 - 5 points

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points

– A d'affixe a, $a \in \mathbb{R}$;

– B d'affixe $b+i$, $b \in \mathbb{R}$;

– C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $(O\,;\vec{v})$.

b. Exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a.

2. Dans cette question, on pose $a=\sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $c = -i$ et D d'affixe $d = 2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}$.

a. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b. Calculer le quotient $\frac{d-a}{c-a}$; que peut-on en déduire pour le triangle ACD ?

c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

e. Déterminer la nature du triangle BEF.

1. 11. Basique, N. Calédonie 2009

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3+4i$. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3}+i\left(-2-\sqrt{3}\right)$ et $z_D = -2\sqrt{3}+i\left(-2+\sqrt{3}\right)$.

L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.

c. Montrer que $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.

1. 12. Basique, La Réunion 2008

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de (C) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a. Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC. Construire les points A, B et C sur la feuille de papier millimétré.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a. Compléter la figure en plaçant les points P, Q et R images respectives des points A, B et C par h.

b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

a. Donner l'écriture complexe de h.

b. Calculer $z_A + z_B + z_C$. En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.

c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

1. 13. 2nd degré et barycentre, Antilles 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+8z\sqrt{3}+64=0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=-4\sqrt{3}-4i$ et $b=-4\sqrt{3}+4i$.

Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c=\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des points pondérés $(O\,;-1)$, $(D\,;1)$ et $(B\,;1)$.

a. Montrer que le point G a pour affixe $g=-4\sqrt{3}+6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure (unité graphique : 1 cm).

c. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

5. a. Justifier l'égalité $\frac{c-g}{a-g}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\frac{GC}{GA}$.

Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

1. 14. 2nd degré, Polynésie 1996

Partie A

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par: $P(z)=z^2+2\sqrt{3}z+4$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Écrire les solutions sous forme trigonométrique.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (unité 4 cm). Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$, $b=-\sqrt{3}+i$ et $c=-\sqrt{3}-i$.

1. Placer les points A, B et C sur une figure.

2. Soit $Z=\frac{a-b}{c-b}$.

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

b. Écrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

c. En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

3. Calculer l'aire du triangle ABC en centimètres carrés.

1. 15. 2nd degré, Inde, 1996

1. a. Démonstration de cours : étudier la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, a, b, c étant trois réels avec a non nul.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On appellera z_1 et z_2 les solutions, z_1 ayant sa partie imaginaire positive.

c. Donner la forme exponentielle de z_1 et z_2 puis celle de $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère othonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

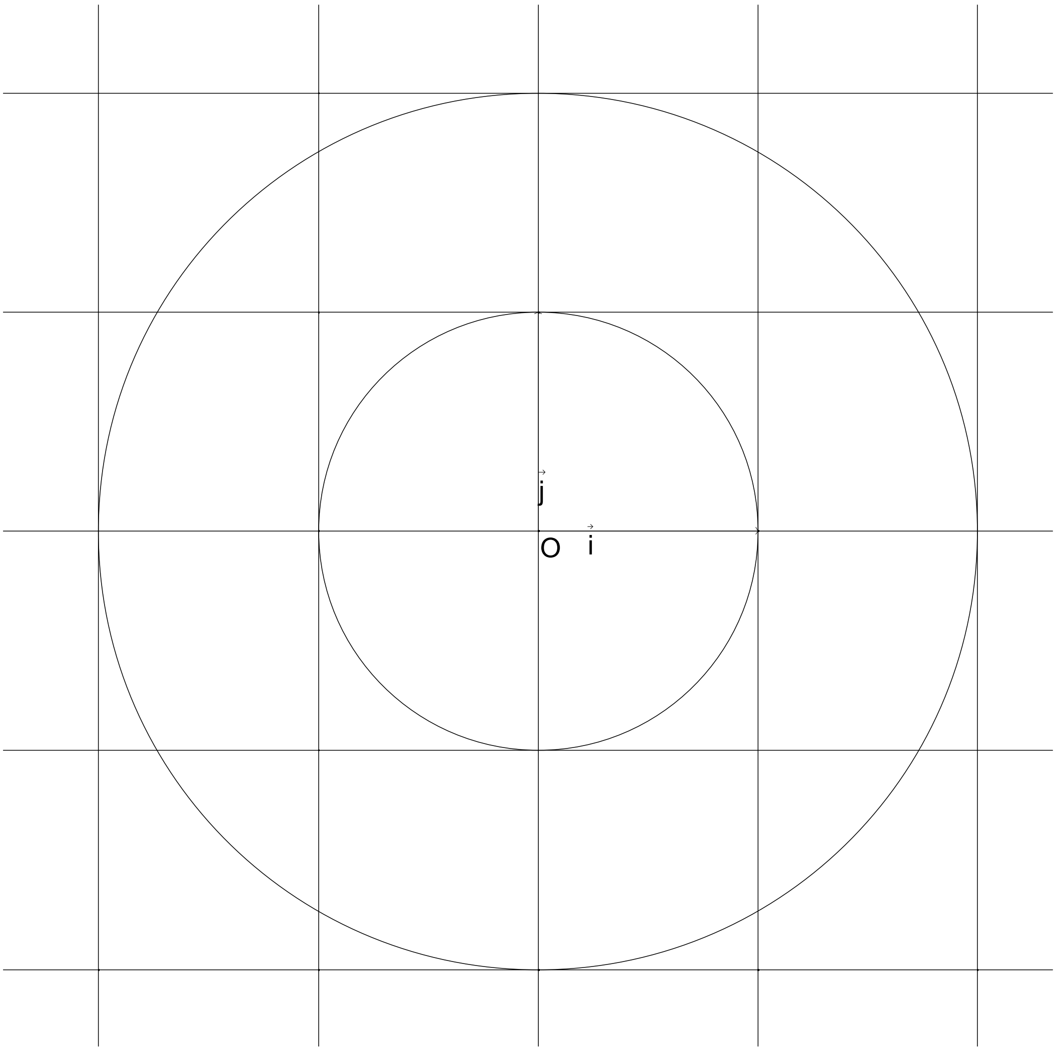
a. Déterminer l'affixe z_3 du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport –3.

b. Déterminer l'affixe z_4 du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c. Représenter les points O, A, M_1, M_2, M_3, M_4

d. Calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$. Que peut-on en conclure ?

1. 16. Petits exos de base



1. Sur la figure ci-dessus placer les points suivants :

$A(1+i)$, $B(2-2i)$, $C(1+i\sqrt{3})$, $D(-\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i)$, $E(1+2i)$, $F(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$, $G(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)$, $H(2ie^{-i\frac{3\pi}{4}})$, $K(-\frac{3}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}})$.

2. Lire sur la figure le module et l'argument de chacun des complexes correspondants.

3. Faire le calcul pour z_B, z_D, z_G, z_H.

4. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle des conjugués de z_B, z_D, z_G, z_H.

5. Calculer $(z_C)^5$, $\frac{(z_A)^3}{(z_H)^4}$, $(z_E)^2(z_K)^6$.

6. Calculer les complexes $z_A - z_E$ et $z_B - z_E$; déterminer leurs modules. Calculer $\frac{z_A - z_E}{z_B - z_E}$, déterminer son module et son argument, en déduire l'angle des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EB}$.

7. On fait une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur les points E, A et B. Si E', A' et B' sont leurs images, quelles sont les affixes de ces trois points. Que vaut alors $\frac{z_{A'} - z_{E'}}{z_{B'} - z_{E'}}$?

8. On veut construire un triangle rectangle isocèle ABM dont l'hypothénuse est $[AB]$. Lire sur la figure les affixes possibles des points M. Donner une méthode pour trouver les points M, l'appliquer.

9. Soient $z_1 = 2$, $z_2 = 3i$ et $z_3 = 1 - 2i$, calculer $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$, $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$, $a = \dfrac{z_1+z_2}{z_3}$ et $b = (z_3)^3$.

10. Soit f la transformation du plan qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que : $z' = 4z + 6 - 3i$. Déterminer l'unique point invariant de f et en déduire la nature et les éléments caractéristique de f.

11. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. $\left|\overline{z}+i\right| = \left|z-3+2i\right|$ b. $(z-1-i)(\overline{z}-1+i)=3$

12. Soit le complexe $Z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$.

a. Ecrire Z sous forme exponentielle.

b. Reprendre la forme initiale de Z pour déterminer sa forme algébrique.

c. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

13. α et β sont des réels fixés. Mettre chacun des complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$-\cos\alpha + i\sin\alpha \quad ; \qquad \sin\beta - i\cos\beta.$$

14. Mettre le complexe suivant sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique : $(1+i\sqrt{3})^5$.

15. Utiliser une formule d'Euler pour exprimer $\sin^3 x$ en fonction de $\sin 3x$ et $\sin x$.

16. Dire, sans justifier si chacune des affirmations a), b), c) est vraie ou fausse .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+i\sqrt{3}$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 2i\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

a. On a $\arg(z_C) = \dfrac{\pi}{12}$.

b. L'écriture algébrique de $\dfrac{z_A}{z_B}$ est $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c. L'écriture trigonométrique de $\dfrac{z_A}{z_B}$ est $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

17. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points $A(-i)$, $B(3)$, $C(2+3i)$ et $D(-1+2i)$.

a. Préciser les affixes des milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

b. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

c. Déduire du b. les propriétés vérifiées par les diagonales de $ABCD$. Quelle est la nature de $ABCD$?

1. 17. Cours, C. étrangers 2006 - 4 points

Partie A : restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

(i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r \geq 0 \end{cases}$$

(ii) Pour tous nombres réels a et b : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.

2. Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.

3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.

4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

1. 18. Basique, STL France, Juin 2006 - 5 points

Partie A

Pour tout nombre complexe z, on note $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$.

1. Calculer $P(2)$. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $P(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right).$$

2. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 1 + i\sqrt{3}$, $c = 1 - i\sqrt{3}$.

1. a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ de centre O.

c. Construire le cercle Γ.

2. Déterminer un argument du nombre complexe b. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

1. 19. Basique, Am. du Sud 11/2008

5 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1+2i$, $b = 1+3i$, $c = 4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Soit I le milieu de $[BC]$ et z_I son affixe.

a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\frac{z - z_I}{z - z_A}$ soit un réel ?

b. Déterminer l'unique réel x tel que $\frac{x - z_I}{x - z_A}$ soit un réel.

c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$; donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3. a. Soit G le point d'affixe –3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'écriture complexe de r_1.

4. Soit A', B' et C' les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.

Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ? En déduire que $b'=\overline{c'}$.

1. 20. Equation, STL, France, Juin 2006 - 6 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère un polynôme P défini par $P(z)=z^3-2z^2+16$ où z est une variable complexe.

1. a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z)=(z+2)\left(az^2+bz+c\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$.

a. Écrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres z_A et z_B.

b. Placer dans le plan P les points A et B.

c. Quelle est la nature du triangle OAB ?

2. On considère la transformation T du plan P dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

a. Caractériser géométriquement la transformation T.

b. Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par la transformation T.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

1. 21. Equation, STL, France, juin 2005 - 5 points

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante, en donnant les solutions sous forme algébrique : $z^2 + 3z + 3 = 0$.

2. On considère les nombres complexes : $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2=\overline{z_1}$.

a. Écrire z_1 sous forme trigonométrique.

b. Construire avec précision dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2. On laissera apparents les traits de construction.

3. On appelle D le point d'affixe $z_3=\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et K le point d'affixe $z_4 = 1$.

a. Montrer que les points A, B et D appartiennent à un cercle C de centre K.

b. Montrer que le point K est le milieu du segment $[AD]$.

c. Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ placer les points K et D et tracer le cercle C. Déterminer la nature du triangle ABD.

1. 22. pi/12, STL, France, juin 2005 - 5 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4cm.

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$. Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b. Représenter dans le plan P les points A d'affixe $\sqrt{3}-i$ et B d'affixe $\sqrt{3}+i$.

c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

2. On considère l'application R de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z$.

a. Caractériser géométriquement l'application R.

b. Placer le point A' image du point A par R.

c. Calculer sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A'.

d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

1. 23. Equation, STL, France, sept. 2004 - 5 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Soit les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives $z_A = 2+2i$; $z_B = 2\sqrt{3}-2i$ et $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a. Calculer le module et un argument de z_A et z_B.

b. Construire les points A, B et C.

c. Calculer $|z_A - z_B|$.

d. Quelle est la nature du triangle OAB ? (justifier la réponse).

3. a. Écrire z_C sous forme algébrique.

b. Montrer que C est le milieu du segment $[OA]$.

4. Quelle est la nature du triangle ABC ? (justifier la réponse).

1. 24. Rotations, STL, France, sept. 2004 - 5 points

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Dans P, les points A et B ont pour affixes respectives 8 et $8i$.

1. On appelle D l'image de A par la rotation R_1 de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et C l'image de B par la rotation R_2 de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Quelles sont les fonctions f_1 et f_2 de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associées respectivement aux rotations R_1 et R_2.

b. Calculer les affixes des points C et D.

2. a. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer le cercle C dans le plan P et représenter les points A, B, C et D.

b. Quelle est la nature du triangle OCD ?

3. On note a l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AD}$ et b celle du vecteur $\overrightarrow{BC}$. Montrer que $b = a\sqrt{3}$. En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

1. 25. Classique, La Réunion 2006 - 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, l'unité graphique est 2 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z}=i$. Écrire la solution sous forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Soient *A*, *B*, *A'* et *D* les points du plan complexe d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 4$, $a' = 2i$ et $d = 2 + 2i$. Quelle est la nature du triangle *ODB* ?

4. Soient *E* et *F* les points d'affixes respectives $e=1-i\sqrt{3}$ et $f=1+i\sqrt{3}$. Quelle est la nature du quadrilatère *OEAF* ?

5. Soit C le cercle de centre *A* et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre *A'* et de rayon 2. Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a. On désigne par *E'* l'image par la rotation *r* du point *E*. Calculer l'affixe *e'* du point *E'*.

b. Démontrer que le point *E'* est un point du cercle C'.

c. Vérifier que : $e-d=\left(\sqrt{3}+2\right)\left(e'-d\right)$. En déduire que les points *E*, *E'* et *D* sont alignés.

6. Soit *D'* l'image du point *D* par la rotation *r*. Démontrer que le triangle *EE'D'* est rectangle.

1. 26. Système, STL, France, juin 2004 - 5 points

1. Résoudre le système suivant d'inconnues complexes *z* et *z'* : $\begin{cases} z+iz'=-1 \\ z-z'=2+i \end{cases}$.

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

a. Placer dans le plan les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = 2i$ et $z_C = -2 + i$.

b. Calculer les modules des nombres complexes : $z_B - z_C$ et $z_B - z_A$. Donner une interprétation géométrique de ces résultats.

c. On note *I* le milieu du segment [*AC*]. Préciser l'affixe du point *I* puis calculer la distance *BI*.

d. Déterminer l'aire en cm^2 du triangle *ABC*.

1. 27. Similitude, STL, France, juin 2004 - 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unite graphique 1 cm. *i* désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$. À tout point *M* d'affixe *z* du plan complexe, on fait correspondre le point *M'* d'affixe *z'* tel que $z'=\left(1+i\right)z-2i$.

1. Determiner le nombre complexe *z* tel que $z' = z$.

2. On considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = -1 + 3i$.

a. Déterminer les affixes des points *A'* et *B'*. Que peut-on dire du point *A'* ?

b. Placer les points *A*, *B* et *B'* dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

c. Démontrer que le triangle *ABB'* est un triangle rectangle et isocèle.

3. a. Vérifier l'égalité : $\left|z'\right|=\sqrt{2}\left|z-\left(1+i\right)\right|$.

b. Soit *C* le point d'affixe $z_C = 1 + i$. Interpréter géométriquement $\left|z\right|$ et $\left|z-\left(1+i\right)\right|$.

c. Déduire des questions précédentes l'ensemble (D) des points *M* d'affixe *z* vérifiant $\left|z'\right|=\sqrt{2}\left|z\right|$ et tracer (D) dans le repère précédent.

1. 28. Transformation ?

A tout nombre complexe *z* on associe le nombre complexe égal à $f(z)=\frac{1}{6}\left(\left(3+4i\right)z+5\bar{z}\right)$

1. Calculer $f(3)$, $f(i)$ et $f(1-4i)$.

2. Exprimer $z'=\dfrac{f(z)-z}{1+2i}$ à l'aide de z et de $\overline{z}$.

3. En déduire que z' est réel pour tout z complexe.

1. 29. Equation

Soit (E) l'équation complexe : $\dfrac{1}{z}-2\overline{z}+z-1=0$.

1. Démontrer que $z = x + iy$ avec x et y réels est solution de (E) si et seulement si : $\begin{cases} -x^2-x-3y^2+1=0 \\ (2x-1)y=0 \end{cases}$.

2. En déduire la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

1. 30. Cercles

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b, et c telles que : $a = 1-i$, $b = 1+i$, $c = -1+i = -a$. On note Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

1. a. Placer sur une figure les points A, B, C et le cercle Γ.

b. Mettre les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique.

c. Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$. Déterminer l'angle de r et le point $r(B)$, image de B par r.
d. Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par r ; placer Γ' sur la figure.

2. On considère un nombre θ dans $]0\,;\,2\pi[$ distinct de π ; on note M le point d'affixe $z=1+ie^{i\theta}$. On désigne par M' l'image de M par r, et on appelle z' l'affixe de M'.

a. Montrer que M est un point de Γ distinct de A et de B.

b. Exprimer z' en fonction de z. Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.

c. Etablir la relation $u=u'\tan\dfrac{\theta}{2}$.

d. Prouver que les points B, M et M' sont alignés. Placer sur la figure un point M et son transformé M'.

1. 31. Rotation

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique : 2 cm), on note B et C les points d'affixes respectives $-i$ et $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Soit R la transformation du plan P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

1. Placer les points B et C dans le plan P et donner l'écriture de leurs affixes respectives sous la forme exponentielle ($re^{i\theta}$).

2. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation R.

3. Déterminer, sous la forme exponentielle, les affixes des images respectives B' et C' par la transformation R des points B et C. Placer B' et C' dans le plan P.
Que peut-on dire du point B' ?
Que peut-on dire des points B' et C' relativement à l'axe des abscisses ?

4. a. En utilisant les points B et C, déterminer et construire l'ensemble D des points M d'affixe z telle que $|z+i|=\left|z-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right|$.

b. Déterminer l'image D' par la transformation R de l'ensemble D.

1. 32. Carrés, rotations et alignement

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère trois points distincts A, B et C d'affixes respectives a, b et c.

a. Interpréter géométriquement l'argument du quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$.

b. Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.

2. Placer sur une figure (unité graphique : 1 cm) les points A_1, B_1 et C_1 d'affixes respectives

$$a_1=2,\quad b_1=i\sqrt{3},\quad c_1=-4+3i\sqrt{3}.$$

Montrer, à l'aide de la propriété précédente, que les points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

3. On considère les points A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 tels que les quadrilatères $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$ soient des carrés directs.

a. Tracer les carrés $OA_1A_2A_3$, $OB_1B_2B_3$, $OC_1C_2C_3$.

b. Donner les affixes a_3 et b_3 des points A_3 et B_3 puis les affixes a_2 et b_2 des points A_2 et B_2.

c. À l'aide de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, calculer l'affixe c_3 de C_3 à l'aide de c_1.

d. En déduire que les points A_3, B_3 et C_3 sont alignés.

4. a. Déterminer le réel a tel que le barycentre du système $\{(O, a), (C_1, 1), (C_3, 1)\}$ soit C_2.

(Rappel : le barycentre G du système $(A,\ \alpha)$, $(B,\ \beta)$,… est tel que $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}+\ldots=\vec{0}$)

b. Calculer l'affixe c_2 de C_2.

c. Montrer que les points A_2, B_2, C_2 sont alignés.

1. 33. ROC+Equation+Rotation, Polynésie 2010, 5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b sont deux nombre réels.

On note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par $\bar{z}=a-ib$.

Questions

a. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

2. On considère le nombre complexe $z_0=1+i$.

a. Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b. Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A=1+i$; $z_B=-1+i$; $z_C=-1-i$ et $z_D=1-i$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$. On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.

2. a. Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1+\sqrt{3}$.

b. Déterminer l'affixe z_F du point F.

c. Démontrer que le quotient $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d. Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

1\. 34. Système+parallélog. Antilles 09/2007, 5 pts

Partie A

1. Déterminer le complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+i)=1+3i \\ i\alpha^2=-4+3i \end{cases}$.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z)=z^2-(1+3i)z+(-4+3i)$. Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-i\alpha)$. En déduire les solutions (sous forme algébrique) de l'équation $f(z)=0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a=2+i$ et $b=-1+2i$. Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure. Montrer que $b=ia$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c=-1+\frac{1}{2}i$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit M le milieu du segment $[BC]$. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$. Prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}=\frac{1}{2}i$.

4. Donner une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OM}\right)$.

5. Prouver que $OM=\frac{1}{2}DA$.

6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$. On admet que le quadrilatère $JKLM$ est un parallélogramme ; démontrer que c'est un carré.

1\. 35. Barycentre, ligne de niveau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm.

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz-2=4i-z$. On donnera la solution sous forme algébrique.

2. On désigne par I, A et B les points d'affixe respectives 1, $2i$ et $3+i$.

a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Calculer l'affixe Z_C du point C image par A de la symétrie de centre I.

c. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. En déduire le module et un argument de ce nombre ; ainsi qu'une interprétation géométrique.

d. Soit D le point d'affixe Z_D telle que $z_D - z_C = z_A - z_B$, montrer que $ABCD$ est un carré.

3. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

b. Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].

c. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Construire Γ.

1. 36. Barycentre + ligne de niveau, Polynésie 2004

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z=\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

d. Soit D le barycentre du système $\{(A, 1)\,;(B, -1)\,;(C, 1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

e. Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$.

a. Montrer que B appartient à Γ_2.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

1. 37. Ligne de niveau, Centres étrangers 2008

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2+4z+8=0$. On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a=2-2i$ et $b=-a$. Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

a. Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d=2-6i$.

c. Placer les points C et D sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α le barycentre du système : $\{(A,1)\,;(B,-1)\,;(C,\alpha)\}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

c. Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = D$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{2}$.

1. 38. Ligne niveau+rotation, Polynésie 2008

4 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 3 - 2i$, $b = 3 + 2i$, $c = 4i$.

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.

3. Montrer que $OABC$ est un parallélogramme.

4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme $OABC$.

5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$.

6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M. On note N l'image du point M par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Montrer que N a pour affixe $\dfrac{5}{2} - \beta + \dfrac{5}{2}i$.

b. Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

1. 39. 3ème degré, barycentre, ligne de niveau

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z : (E) $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$.

a. Vérifier que 8 est solution de cette équation.

Déterminer les nombres réels α, β, γ tels que, pour tout complexe Z,

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z - 8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma).$$

b. Résoudre l'équation (E).

2. $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, l'unité graphique est 1 cm.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}, b = 2 + 2i\sqrt{3}, c = 8$.

a. Calculer le module de a (noté $|a|$) et son argument θ. Placer les trois points A, B et C.

b. Calculer le complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument θ. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le barycentre D des points pondérés $(A, |a|)$, $(B, |b|)$, $(C, |c|)$. Placer D.

d. Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$. Tracer E.

1. 40. 3ème degré, rotation, Pondicherry 2003

Première partie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante : (E) $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)(az^2+bz+c)=0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A=-2-2i$, $z_B=2$ et $z_D=-2+2i$.

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.

3. Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.

b. Placer les points E et F.

4. a. Vérifier que : $\dfrac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$.

b. En déduire la nature du triangle AEF.

5. Soit I le milieu de $[EF]$. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. 41. 3ème degré+rotation, France 2007 - 5 points

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)\left(az^2+bz+c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, $2+3i$ et $2-3i$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par la rotation r.

2. Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

1. 42. Orthocentre, C. étrangers 2007 - 5 points

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z}=-z$.

2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\bar{z}=z$.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\bar{z}=|z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé direct . On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + i$, $b = -1 + 3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas general

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si : $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$.

2. On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$.

a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b. Verifier l'égalité : $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

3. Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b. Prouver que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

<u>1. 43. Produit scalaire</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm). z et z' sont deux nombres complexes et on pose : $\varphi(z,z') = z\bar{z}' + \bar{z}z'$. $\bar{z}$ et $\bar{z}'$ désignent les conjugués respectifs de z et z'.

1. Calculer : $\varphi(i, 3)$; $\varphi(1 + 2i, -2 + i)$, $\varphi(2 + i, -3 + 2i)$, $\varphi\left(e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

Montrer que pour tout couple (z, z') le nombre $\varphi(z, z')$ est réel.

2. a. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; x, y, x', y' réels. Calculer $\varphi(z, z')$ en fonction de x, x', y, y'.

b. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $\varphi(z, 1 + i) = 2\sqrt{2}$. Dessiner D.

3. a. On pose $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$; θ et θ' réels, r et r' réels positifs. Calculer $\varphi(z, z')$ en fonction de r, r' et $\cos(\theta - \theta')$.

b. Exprimer $\varphi(z, z')$ en fonction de r.

c. Déterminer l'ensemble C des points M d'affixe z tels que $\varphi(z, z') = 2$.

d. Dessiner C dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Que peut-on dire de la position relative de C et D ? Justifier la réponse.

<u>1. 44. Forme algébrique & trigo de pi/12 -1</u>

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$, $Z_B = 1 - i$, $Z_C = \dfrac{Z_A}{Z_B}$.

1. a. Écrire Z_C sous forme algébrique.

b. Déterminer le module et un argument de Z_A et de Z_B.

c. Écrire Z_C sous forme trigonométrique ; en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. Soit I le point d'affixe $Z_I = 1$.

a. Quelle est la nature du triangle OIB ?

b. Déterminer les images de I et B dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$. En déduire la nature du triangle OAC.

1. 45. Forme algébrique & trigo de pi/12 -2

Soit les nombres complexes : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

a. Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

b. En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

c. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2$.

Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

1. 46. Forme algébrique & trigo de pi/12 -3

Le plan complexe P est rapporté à un repere orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère dans P les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = -(2+\sqrt{3}) + i$.

1. a. Calculer le module et un argument du nombre complexe $W = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

b. En déduire la nature du triangle ABC.

2. a. Écrire le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.

b. Écrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de $\frac{z_A}{z_B}$.

c. À l'aide des deux questions précédentes donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1. 47. pi/12 –4, France remplt 2007 - 5 points

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007} .

1. 48. Trigo, France 2010, 5 pts

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle C de centre O passant par A.

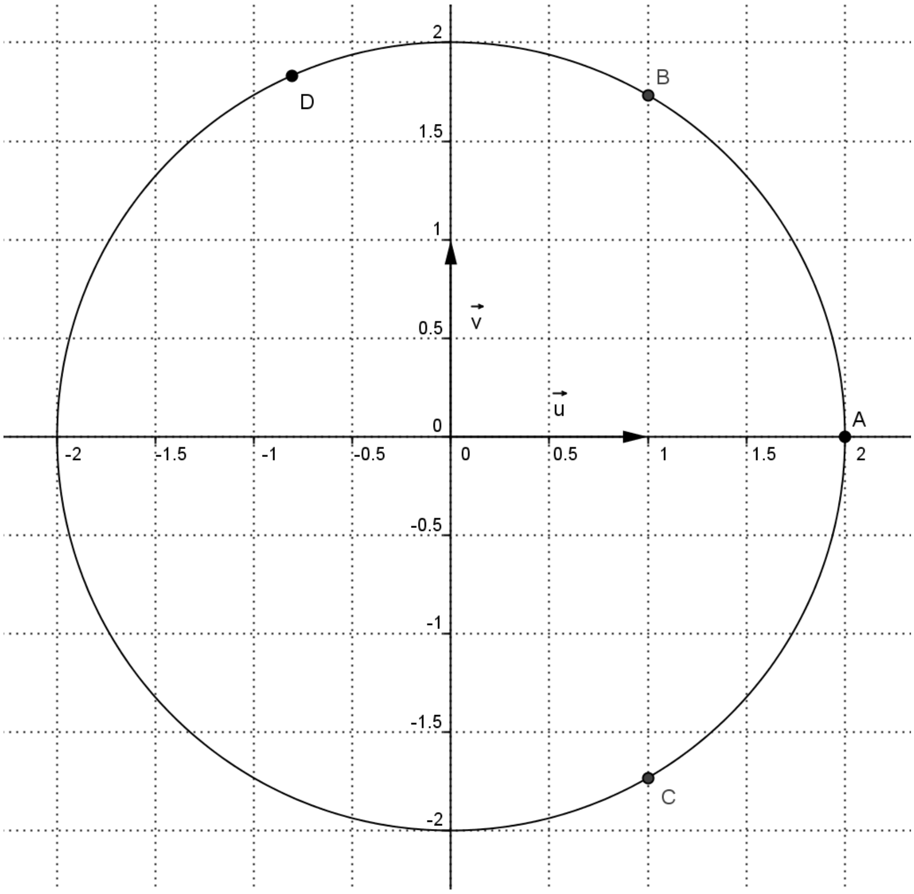
Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α .

1. a. Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle C.

2. Soit D un point du cercle C d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $\left]-\pi\,;+\pi\right]$.

a. Construire sur la figure donnée ci-dessous le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



b. Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a. Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b. On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$. Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a. En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-\pi\,;+\pi\right]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$. Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\pi\,;+\pi\right]$. Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

1. 49. Equation du second degré - 1

On désigne par P le plan complexe. Unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 - 2z + 4 = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre. Donner le module et l'argument de chacun des nombres z_1, z_2, z_1^2, z_2^2. Ecrire sous forme algébrique z_1^2 et z_2^2.

2. On considère dans le plan les points $A(1+i\sqrt{3})$, $B(1-i\sqrt{3})$, $C(-2+2i\sqrt{3})$ et $D(-2-2i\sqrt{3})$.

a. Représenter les points A, B, C et D dans le plan P. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

b. Montrer que les points O, A et D d'une part et les points O, B et C d'autre part sont alignés. Quel est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$?

c. Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

1. 50. Equation du second degré - 2

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$, défini par : $P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$.

1. a. Calculer $P(1)$.

b. En déduire l'existence de trois réels a, b, c tels que $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$. Déterminer a, b et c.

c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère trois nombres complexes : $z_1 = 1$; $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$; $z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$.

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

1. 51. Médiatrice - 1

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$. Soit (D) l'ensemble des points M de (P) d'affixe z vérifiant (1) : $|z-3i| = |z+2-i|$.

1. En écrivant $z = x + i\,y$, montrer par le calcul que (D) est une droite dont on donnera une équation.

2. On se propose dans cette question de vérifier le résultat du 1. Soit A le point d'affixe $3i$ et B le point d'affixe $-2 + i$.

a. Placer A et B dans le repère $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

b. En interprétant géométriquement la relation (1) à l'aide des points A et B, re-démontrer que (D) est une droite. Tracer (D).

c. Retrouver alors par le calcul l'équation de (D) obtenue au 1.

1. 52. Médiatrice - 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 3 cm.

1. Placer les points B et D d'affixes respectives $z_B = \sqrt{3}+i$, $z_D = \sqrt{3}-i$. On complètera la figure dans les questions suivantes.

2. Montrer que le triangle ODB est un triangle équilatéral.

3. Soit E le point d'affixe $z_E = e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

a. Le point A est l'image de E par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe z_A du point A et vérifier que A est le milieu du segment $[OB]$.

b. Le point C est l'image de E par la translation t de vecteur $2\vec{v}$. Déterminer l'affixe z_C du point C.

4. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et déterminer un argument de ce nombre complexe.

5. Déduire des questions précédentes que la droite (CD) est la médiatrice du segment $[OB]$.

1. 53. Suite géométrique

On désigne par M_n le point du plan complexe d'affixe z_n définie par:

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3})$$

où n est un nombre entier naturel et où M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$.

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles z_n est réel.

2. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal. $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité = 8 cm).

a. Représenter dans P les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4.

b. Calculer en fonction de n les longueurs des trois côtés du triangle OM_nM_{n+1}. Montrer que ce triangle est rectangle.

3. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Calculer $l_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k$. Déterminer la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$.

4. a. Calculer en fonction de n l'aire b_n du triangle OM_nM_{n+1}.

b. Calculer $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} b_k$. Déterminer la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$.

1. 54. Suite arithmético-géométrique, Asie 2007 - 5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + i \end{cases}$.

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.

a. Vérifier les égalités : $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda + 1)i$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.

b. Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul, $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}i$.

2. Étude du cas $\lambda = i$.

a. Montrer que $z_4 = 0$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

c. Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d. Représenter les points M_0 ,M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

3. Caractérisation de certaines suites (z_n).

a. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+k} = z_n$.

b. Réciproquement, monter que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$ alors : $\lambda^k = 1$.

1. 55. Suite de carrés, Asie 2000 - 5 points

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -i$; $z_B = 3$; $z_C = 2+3i$ et $z_D = -1+2i$.

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.

2. a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

b. Calculer le complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments $[AC]$ et $[BD]$?

3. a. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère $ABCD$.

4. a. Placer sur la figure précédente les points A_1, B_1, C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1C}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à $[DC]$, le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant un carré situé àl'extérieur du quadrilatère $ABCD$.

b. Tracer le carré $A_1B_1C_1D_1$ et déterminer son aire s_1.

5. a. On continue par le même procédé : un carré $A_nB_nC_nD_n$ étant déterminé, on considère les points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{D_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = \overrightarrow{B_{n+1}C_n}$ où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[D_nC_n]$, le quadrilatère $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $A_nB_nC_nD_n$.

Tracer le carré $A_2B_2C_2D_2$.

b. Soit s_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$. Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, puis de n. En déduire s_n, en fonction de n.

c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère $ABCD$ et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, . . . et $A_nB_nC_nD_n$.

d. La suite (s_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

1. 56. Inversion 1

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -\dfrac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. a. Déterminer une relation entre les arguments de z et de z'.

b. En déduire que les points O, M et M' sont alignés.

2. Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

On nomme A et B les points d'affixes respectives 1 et – 1. On désigne par C le cercle de centre A contenant le point O et par C* le cercle C privé du point O.

3. On suppose dans cette question que le point M appartient à C*.

a. Justifier l'égalité : $|z-1| = 1$. Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.

4. Le point M étant un point du plan, d'affixe z non réelle, on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.

a. Calculer $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de z. Exprimer alors l'argument de $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$.

b. Comparer les angles $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B})$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

c. Démontrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

1. 57. Inversion 2, Antilles 2005 - 5 points

$(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan P. Soit A le point d'affixe 1; soit B le point d'affixe -1.

Soit F l'application de P privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. a. Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note C_1 le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de C_1 par l'application F.

2. a. Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F. Calculer l'affixe de K'.

b. Soit C_2 le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de C_2 par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi\,;+\pi\right[$. R appartient au cercle C_3 de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$. En déduire que : $|z'+1| = |z'|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+e^{i\theta}$, $\theta \in \left]-\pi\,;+\pi\right[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du 3. a.

1. 58. Inversion 3, Am. du Sud 2005

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique 2 cm.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.

3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.

4. a. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que $OP = 3$, et construire géométriquement son image P' par f.

5. On considère le cercle C_1, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de C_1, distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

1. 59. Inversion 4, Asie 06/2008

4 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour le dessin : $\|\vec{u}\| = 4$ cm.

M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A. Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul.

Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.

2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

B. Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.

On note (C) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble (C) ?

2. Soit M un point de (C) d'affixe z, distinct du point O.

a. Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $|z'+1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?

3. Tracer l'ensemble (C) sur une figure. Si M est un point de (C) , décrire et réaliser la construction du point M'.

1. 60. Homographie, Am. du Nord 2010 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2i$ et D d'affïxe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z $(z \neq i)$ associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $(z'+2i)(z-i) = 1$.

b. En déduire que pour tout point M d'affixe z $(z \neq i)$: $BM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

4. a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b. En utilisant les résultats de la question 3. b, placer le point E' associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.

5. Quelle est la nature du triangle $BD'E'$?

1. 61. Homographie, France 2009, *5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives $-i$, $1-i$ et i. On désigne par Δ la médiatrice du segment [AB] et par C le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point M d'affixe z distincte de $1-i$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{i(z+i)}{z-1+i}$. M' est appelé image du point M.

1. Calculer les affixes des points A' et O'.

2. Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice (unité graphique 4 cm).

3. Montrer que l'équation $z=\dfrac{i(z+i)}{z-1+i}$ admet deux solutions que l'on précisera. On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions. Justifier que les points E et F appartiennent au cercle C et les placer sur la figure.

4. Soit M un point distinct du point B et M' son image.

a. Exprimer la distance OM' en fonction des distances AM et BM.

b. Montrer que si le point M décrit la droite Δ, alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si le point M décrit la droite (AB) privée du point B, alors le point M' appartient à une droite que l'on précisera.

1. 62. Homographie, Polynésie sept 2006 - 4 points

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On pose $a = 3$, $b = 5-2i$ et $c = 5+2i$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.

a. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

b. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2i}$.

c. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2-i$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b. Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

1. 63. Homographie+ROC, Asie 2006 - 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z|=\|\vec{w}\|$ et $\arg z=(\vec{u},\vec{w})$ à $2k\pi$ près.

Partie A : restitution organisée de connaissances

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz')=\arg z+\arg z'$.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg z-\arg z'$.

Partie B

On note A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $3i$. On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\dfrac{iz+3}{z+i}$.

1. Étude de quelques cas particuliers.

a. Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre $[AB]$. Placer ces points sur le dessin.

b. On note C le point d'affixe $c=-2+i$. Démontrer que le point C', image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que $\arg z' = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \frac{\pi}{2}$ à $2k\pi$ près.

3. Étude de deux ensembles de points.

a. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.

b. Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre $[AB]$ privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M' ?

1. 64. Homographie 1

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -2i$, $z_B = 4-2i$, $z_C = 4+2i$, $z_D = 1$.

1. a. Placer les points A, B, C et D sur une figure, qui sera peu à peu complétée. On prendra pour unité graphique 2 cm.

b. Préciser la nature du triangle ABC.

2. On désigne par F l'application qui, à tout point M de P, d'affixe z et distinct de A, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-(4+2i)}{z+2i}$.

a. Déterminer les images de B et C par F.

b. Déterminer l'ensemble E des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$. Construire E.

3. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z distinct de $-2i$, on a : $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$.

b. En déduire que si M est sur un cercle de centre A et de rayon r, M' est sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. De même montrer que si M est sur une droite passant par A, alors M' est sur une droite passant par D.

Variante originelle

3. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z distinct de $-2i$, on a : $(z'-1)(z+2i) = -4-4i$.

b. Montrer que, pour tout point M, distinct de A, et dont l'image par F est notée M', on a :

$$\begin{cases} M' \neq D \\ DM' \times AM = 4\sqrt{2} \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

1. 65. Homographie 2

Soit un plan P rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. On note A le point d'affixe i et B celui d'affixe $-2i$. M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'.

Soit f l'application du plan complexe définie par : $f(z) = z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

1. Soit z un complexe différent de i.

a. On désigne par r et θ le module et un argument de $z-i$. Interpréter géométriquement r et θ.

b. Montrer que $(z'+2i)(z-i) = 1$.

c. On désigne par r' et θ' le module et un argument de $z'+2i$. Interpréter géométriquement r' et θ'.

2. Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1. Montrer que si M appartient à (C), son image M' par f appartient à un cercle (C') de centre B dont on donnera le rayon.

3. Soit T le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

a. Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$; en déduire que T appartient au cercle (C).

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AT}\right)$. Tracer le cercle (unité 2 cm) et placer T.

c. En utilisant les questions précédentes, construire l'image T' de T par f.

1. 66. Homographie 3, N. Calédonie 1996

A tout complexe z différent de $3-i$ on associe le complexe $f(z)=\dfrac{2iz-4+2i}{z-3+i}$.

1. Calculer $f(1+i)$.

2. Déterminer le complexe z tel que $f(z)=1+i$.

3. On appelle x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z. Déterminer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$.

4. Dans le plan complexe, on appelle A le point d'affixe $-1-2i$, B le point d'affixe $3-i$ et M le point d'affixe z. Montrer que $|f(z)|=\dfrac{2MA}{MB}$.

Donner une interprétation de $\arg(f(z))$ à l'aide de l'angle $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})$.

1. 67. Homographie 4, Amérique du Sud 2002

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et −2. À tout point M d'affixe z, z différent de 2, on associe le point N d'affixe $\overline{z}$ et M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{2z-4}{\overline{z}-2}$.

1. Calculer z' et $|z'|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + i$.

2. a. Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $|\overline{z}-2|$.

b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'|=2$. En déduire une information sur la position de M'.

3. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z ($z \neq 2$) tels que $M' = B$.

4. On note $Z_{\overrightarrow{AM}}$ et $Z_{\overrightarrow{BM}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$. Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas E, le quotient $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AM}}}{Z_{\overrightarrow{BM}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.

5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas E, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M'. On illustrera par une figure.

1. 68. Homographie 5, Centres étrangers 2010

5 points

Dans le plan complexe (P)muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f, du plan (P) dans lui-même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z'=\dfrac{iz}{z+1}$.

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$OM'=\frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}\right)+\frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. a. Soit B le point d'affixe $b=-\dfrac{1}{2}+i$. Placer dans le repère le point B et lamédiatrice (Δ) du segment $[OA]$.

b. Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f.

Établir que B' appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.

Placer le point B' et tracer le cercle (C) dans le repère.

c. En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle (C).

d. Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct. En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (on laissera apparents les traits de construction).

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a. et b. peuvent être traitées de façon indépendante.

a. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.

Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à : $\mathrm{Im}(z') = \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

b. À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

1. 69. Homog.+construction, France et La Réunion 09/2008

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + i$.

On note (C) le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (T) la tangente au cercle (C) en A.

À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$.

Le point M' est appelé l'image de M.

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I' image de I. Vérifier que I' appartient à (C).

2. a. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $OM' = \dfrac{MB}{MA}$.

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ).

On cherche à construire géométriquement son image M'.

1. Démontrer que M' appartient à (C).

2. On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T). (d) recoupe (C) en N.

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.

Après avoir justifié que $\left(\overrightarrow{AO}\,;\overrightarrow{AN}\right) = \left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\right)$, démontrer que $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)$.

b. En déduire une construction de M'.

1. 70. Homographie+cercles, France 2002 - 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par : $Z = \dfrac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1. a. Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-i$.

b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.

a. Montrer l'égalité : $Z = \dfrac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$.

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3. a. Écrire le nombre complexe $(1 - i)$ sous forme trigonométrique.

b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que Z est un réel non nul si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

1. 71. Homographie, La Réunion 2004 - 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+i$ et $-1+i$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{iz+2}{z-i}$.

1. a. Déterminer les images de B et de C par l'application f.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation $(z'-i)(z-i) = 1$.

c. Soit D le point d'affixe $1+2i$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm). Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l' application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif. Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. a. Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

b. Soit Δ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer l' image de la droite Δ privée du point A par l'application f.

1. 72. Carré

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on considère le point M d'affixe $z_M = 2+im$ (où m est un nombre réel) et le carré $MNPQ$ de centre O et tel que N soit l'image de M par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

1. a. Déterminer, en fonction de m les affixes z_N, z_P, z_Q des points N, P et Q.

b. Représenter le carré $MNPQ$ dans le cas particulier où le point M a pour affixe $2 + 3i$.

2. M étant le point d'affixe $z_M = 2 + im$, on note I le milieu du segment $[MN]$ et J le milieu du segment $[NP]$ d'affixes respectives z_I et z_J. Calculer le nombre complexe $w = \dfrac{z_M - z_J}{z_Q - z_I}$.

Donner l'interprétation géométrique du module et de l'argument de w et expliquer le résultat obtenu par un raisonnement géométrique.

3. Soit A le point d'affixe 2.

a. Calculer l'affixe Z du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Calculer le module de Z, puis, en distinguant les cas $m < -2$ et $m > -2$, déterminer un argument de Z.

b. En déduire l'ensemble Δ décrit par le point I quand M décrit la droite D d'équation $x = 2$.

Représenter Δ.

1. 73. ROC+triangles, Antilles-Guyane 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure α si et seulement si : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \quad (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha + k2\pi,\, k \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$.

a. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.

Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b. En déduire l'expression de z' en fonction de z, α et ω.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4\sqrt{3}\,z + 16 = 0$.

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

a. Écrire a et b sous forme exponentielle.

b. Faire une figure et placer les points A et B.

c. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8i$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Placer les points C et D. Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4i$.

5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

6. Montrer que OAD est un triangle rectangle.

1. 74. Rotation et suite, La Réunion sept. 2010, 5 pts

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 4 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right)z$.

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f\left(M_n\right)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = e^{\frac{i3n\pi}{4}}$.

b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

c. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

1. 75. Rotation, France, sept. 2010, 5 pts

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2i$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$. Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

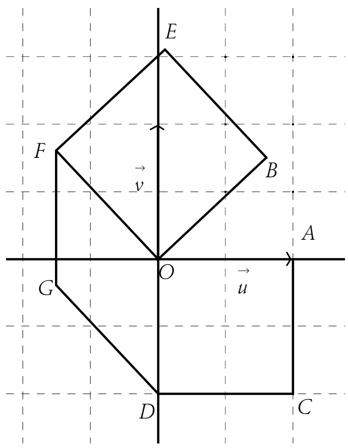
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

1. 76. Rotation, Asie 2009

5 points



Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On place, dans ce repère, les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.

On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés directs $ODCA$ et $OBEF$ comme indiqué sur la figure ci-contre.

1. Déterminer les affixes c et d des points C et D.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de r.

b. En déduire que l'affixe f du point F est ib.

c. Déterminer l'affixe e du point E.

3. On appelle G le point tel que le quadrilatère $OFGD$ soit un parallélogramme. Démontrer que l'affixe g du point G est égale à $i(b - 1)$.

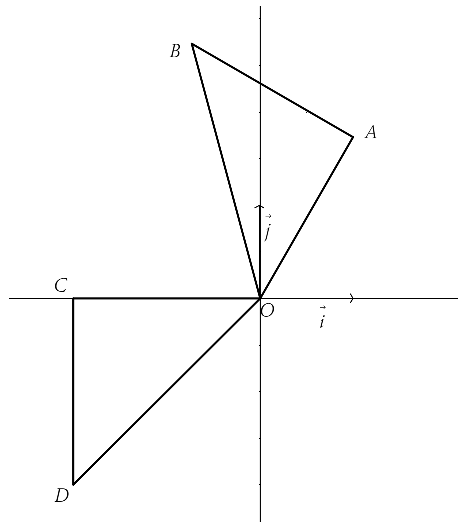
4. Démontrer que $\frac{e-g}{c-g} = i$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.

1. 77. Rotations, Am du Nord 2009

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

Soit A le point d'affixe $a=1+i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b=1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.



Partie A : étude d'un cas particulier

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r.

La figure est donnée ci-contre.

1. a. Exprimer $\frac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.

b. En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

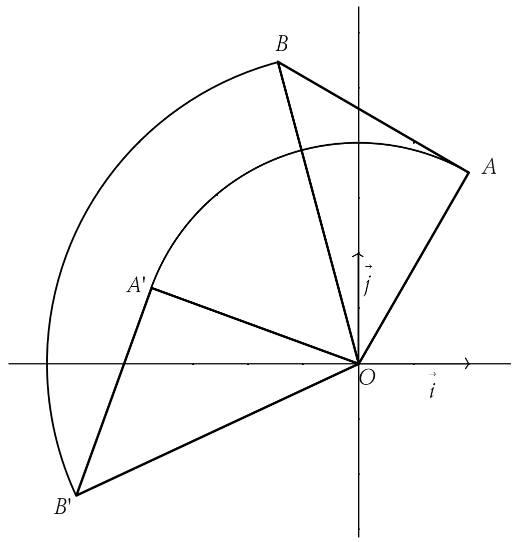
2. Démontrer que $c = -2$. On admet que $d = -2-2i$.

a. Montrer que la droite (AC) a pour équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x+2\right)$.

b. Démontrer que le milieu du segment $[BD]$ appartient à la droite (AC).

Partie B : étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;2\pi\right[$. On considère la rotation de centre O et d'angle θ.



On note A' le point d'affixe a', image du point A par la rotation r, et B' le point d'affixe b', image du point B par la rotation r.

La figure est donnée ci-contre.

L'objectif est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en son milieu.

1. Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ.

2. Soit P le point d'affixe p milieu de $[AA']$ et Q le point d'affixe q milieu de $[BB']$.

a. Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ.

b. Démontrer que $\frac{-p}{q-p}=\frac{-a}{b-a}$.

c. En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

d. Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA').

<u>1. 78. Rotation+Cercle, Pondicherry 2009</u>

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3-i$, $b = 1-3i$ et $c = -1-i$.

1. a. Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.

b. En déduire une expression de n en fonction de m.

3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe. Montrer que $q=\frac{(1-i)m}{2}+2+i$.

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m=\sqrt{10}\,e^{i\theta}$.

b. Calculer $|q-2-i|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

1. 79. ROC + Similitude, Polynésie 2009, *5 points*

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct. On supposera connus les résultats suivants :

- Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec $A\neq C$ et $A\neq B$:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=\frac{AB}{AC} \text{ et } \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+k\times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif ;}$$

- Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel :

$$z=e^{i\theta} \text{ si et seulement si } |z|=1 \text{ et } \arg(z)=\theta+k\times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Démontrer que la rotation r d'angle θ et de centre Ω d' affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=iz+4+4i$.

1. a. Déterminer l'affixe ω du point Ω telle que $f(\omega)=\omega$.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe z on a : $z'-4i=i(z-4i)$.

c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4-2i$ et $b = -4+6i$.

a. Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on completera au fur et à mesure des questions.

b. Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B par f.

3. On appelle m, n, p et q les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments $[AA']$, $[A'B]$, $[BB']$ et $[B'A]$.

a. Déterminer m. On admettra que $n = 1+7i$, $p = -3+3i$ et $q = 1-i$.

b. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

c. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{q-m}{n-m}$. En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$.

4. Démontrer que les droites $(B'A)$ et (ΩN) sont perpendiculaires.

1. 80. Homothétie+rotation, Polynésie, nov 2010, 5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, (unité : 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera au fur et àmesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2 + 4i$, $b = -4 + 2i$, $s = -5 + 5i$ et $\Omega = -2 + 2i$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.

On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de h.

b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4 + 2i$ et que le point D a pour affixe $d = -2-4i$.

2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Démontrer que la droite $(S\Omega)$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

4. Soit P le milieu du segment $[AC]$.

a. Déterminer l'affixe p du point P.

b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}i$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{P\Omega}\right)$.

5. Soit Q le milieu du segment $[BD]$. Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

1. 81. Rotation et homothétie

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 2cm.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

b. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$, exprimer a et b sous forme exponentielle.

c. Placer $A(a)$ et $B(b)$ dans le repère précédent.

2. a. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Donner l'expression complexe de r, puis déterminer l'image A' de A par cette rotation (*On exprimera a' sous forme algébrique et exponentielle*). Placer A' dans le repère précédent.

b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Donner l'expression complexe de h, puis déterminer l'image B' de B par cette homothétie (*On exprimera b' sous forme algébrique et exponentielle*). Placer B' dans le repère précédent.

1. 82. Homothéties

On considère deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs r et $2r$, tangents extérieurement en A, de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AA']$.

Soit M un point quelconque de (C) , distinct de A et B, et M' le point de (C') tel que le triangle AMM' soit rectangle en A (on prendra pour la figure $r = 2$cm).

1. a. Déterminer en justifiant les réponses :

- le rapport de l'homothétie h_1 de centre A qui transforme (C) en (C').
- le centre I de l'homothétie h_2, distincte de h_1 qui transforme (C) en (C'). Placer I sur la figure.

b. On note $M_1 = h_1(M)$. Montrer que M_1 est le point de (C') diamétralement opposé à M'. Déterminer $h_2(M)$ et en déduire que la droite (MM') passe par un point fixe lorsque M décrit le cercle (C) privé des points A et B.

2. Soit Ω le milieu de $[MM']$. Montrer que Ω appartient à un cercle fixe dont on donnera le centre et le rayon.

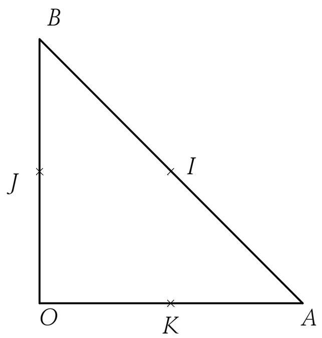
3. On considère le repère orthonormé direct du plan complexe constitué par O et les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ (orthogonal à $\overrightarrow{OA}$, et de longueur 1, on considère donc que $r = 1$). Soit M d'affixe z un point de (C). On a donc $z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$.

a. Calculer en fonction de z les affixes des points M_1 puis M'. En déduire l'affixe de I.

b. Vérifier que $\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}$ pour tout θ. Montrer que l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})$ est droit.

1. 83. Rotation-translation

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$. Soient I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.



On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et on pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

2. Déterminer la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$. Chercher l'image de A par cette transformation et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

Soit M un point du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.

3. Déterminer $g \circ f^{-1}(M_1)$. Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

4. On choisit le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Déterminer les affixes des points I, J et K. Donner l'expression complexe de f et celle de g. Déterminer les affixes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$. Conclure.

1. 84. Rotations, Paris 1996

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$. Soit I le point tel que le triangle CAI soit rectangle isocèle avec $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice, on prendra $AB = 5$ cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images par f de A et B.

b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O.

c. Quelle est la nature du quadrilatère $CABO$?

2. Soit s la similitude de centre O qui transforme A en C. On appelle C' l'image de C par s, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par s.

a. Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à (OA).

b. Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.

c. Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OCB.

1. 85. Varignon, N. Calédonie 2004 - 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère le quadrilatère $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\alpha[2\pi]$, $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)=\beta[2\pi]$, $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$.

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que

$$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi],\ \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DQ}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi],\ \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi],\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi].$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)+b,\ n=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,\ p=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-d)+d,\ q=e^{i\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

a. Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogrammme.

b. Démontrer que l'on a : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{QP}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$, $AC = QP$, $\left(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et NP = BD.

3. Démontrer que $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ vérifient $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{6}[\pi]$.

1. 86. 3ème degré+Hyperbole, Am Nord 2004 - 5 pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive : $(z-2)(z^2+az+b)=0$.

b. Résoudre (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $z^2-4=4-\bar{z}^2$.

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M. Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3-i\sqrt{5}$, $-3+i\sqrt{5}$.

Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).

- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- En utilisant la question 2. a. prouver que : M' appartient à (H') si et seulement si $x'y' = -2$.

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C', la courbe (H'), puis la courbe (H).

1. 87. Conjugué, Centres étrangers 2004 - 4 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique : 2 cm. On appelle A le point d'affixe $-2i$. À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=-2\bar{z}+2i$.

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.

Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.

2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).

3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $|z'+2i|=2|z+2i|$; interpréter géométriquement cette égalité.

4. Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de $z+2i$.

a. Justifier que θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.

b. Démontrer que $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel négatif ou nul.

c. En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.

d. Que peut-on en déduire pour les demi-droites [*AM*) et [*AM'*) ?

5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point *M'* associé au point *M*.

1. 88. ROC+homographie, La Réunion 2010, 5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Soient *A*, *B* et *C* trois points du plan d'affixes respectives *a*, *b*, *c*. On suppose que *A* et *B* sont distincts, ainsi que *A* et *C*. On rappelle que $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(b-a\right)\left[\bmod 2\pi\right]$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\left[\bmod 2\pi\right]$.

Partie II

On considère le point *A* d'affixe $1+i$.

On associe, à tout point *M* du plan d'affixe *z* non nulle, le point *M'* d'affixe $z'=\dfrac{z-1-i}{z}$.

Le point *M'* est appelé le point image du point *M*.

1. a. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point *B'*, image du point *B* d'affixe *i*.

b. Montrer que, pour tout point *M* du plan d'affixe *z* non nulle, l'affixe *z'* du point *M'* est telle que $z'\neq 1$.

2. Déterminer l'ensemble des points *M* du plan d'affixe *z* non nulle pour lesquels l'affixe du point *M'* est telle que $|z'|=1$.

3. Quel est l'ensemble des points *M* du plan d'affixe *z* non nulle pour lesquels l'affixe du point *M'* est un nombre réel ?

1. 89. Transf. + ROC, Pondicherry 2007, 5 pts

1. Dans cette question il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit *R* la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par *R* d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega)=\Omega$;
- pour tout point *M* du plan, distinct de Ω, l'image *M'* de *M* est définie par $\Omega M'=\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta\left[2\pi\right]$.

On rappelle que pour des points *A* et *B* d'affixes respectives *a* et *b*, $AB=|b-a|$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(b-a\right)\left[2\pi\right]$.

Question : montrer que les affixes *z* et *z'* d'un point quelconque *M* du plan et de son image *M'* par la rotation *R* sont liées par la relation $z'-\omega=e^{i\theta}\left(z-\omega\right)$.

2. On considère les points *I* et *B* d'affixes respectives $z_I=1+i$ et $z_B=2+2i$. Soit *R* la rotation de centre *B* et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de *R*.

b. Soit *A* l'image de *I* par *R*. Calculer l'affixe z_A de *A*.

c. Montrer que *O*, *A* et *B* sont sur un même cercle de centre *I*. En déduire que *OAB* est un triangle rectangle en *A*. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.

a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?

c. Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

1. 90. Transf.+médiatrice, C. étrangers 2005 - 5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 8 cm.

On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1. On appelle E l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.

À tout point M d'affixe z appartenant à E, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble C des points M appartenant à E tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si

$$|z+1|^2 + |z|^2 = 1.$$

b. Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$.

c. En déduire l'ensemble C cherché.

3. Soit M un point de E et z son affixe, on désigne par r le module de z et α l'argument de z avec $\alpha \in \left]-\pi\,;+\pi\right]$.

a. Démontrer que l'ensemble F des points M de E tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

b. Représenter les ensembles C et F dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

c. Déterminer les affixes des points M de E tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

1. 91. Fonction complexe, France 2009, *5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$. Le point M' est appelé l'image du point M.

1. a. Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivante $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}\right) = -\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ à 2π près.

b. Le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2. Construire le point A' image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2. a. Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

b. Soient B et C les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C.

c. Placer les points B, C, B' et C' sur la figure.

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives –1 et 1.

1. 92. Transf. non linéaire, Liban 2007 - 5 pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que : $z'=\frac{z}{|z|}(2-|z|)$.

Le cercle C_1, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Pour z complexe non nul, on note $z=re^{i\alpha}$, r étant lemodule de z et α un argument de z.

1. Montrer que $z'=(2-r)e^{i\alpha}$.

2. Déterminer l'affixe a' du point A', image par f du point A d'affixe $a = 3$.

3. Soit B le point d'affixe $b=-\sqrt{3}+i$.

a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Déterminer l'affixe b' du point B', image du point B par f.

4. Placer A, B, A' et B' sur la figure.

5. a. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.

b. Représenter E sur la figure.

6. Montrer que le cercle C_1 est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.

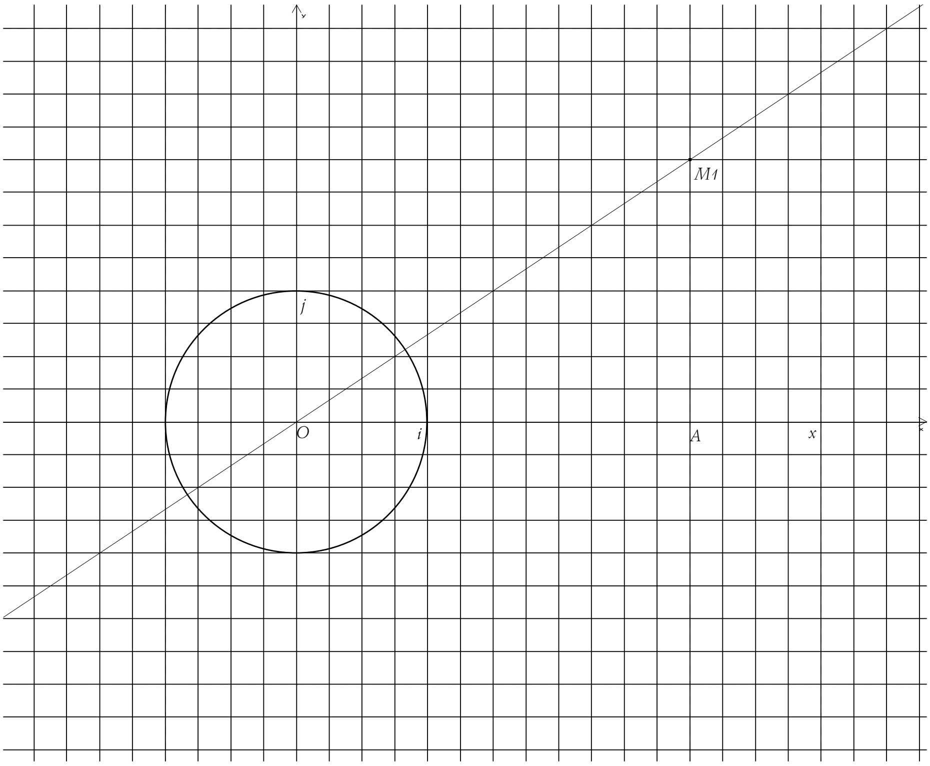
7. Pour cette question, M est un point du plan, distinct de O, n'appartenant pas au cercle C_1.

On appelle I le milieu du segment $[MM']$ où M' est l'image de M par f.

a. Montrer que I appartient à C_1.

b. Montrer que I appartient à la demi-droite $[OM)$.

c. Sur la figure donnée est placé un point nommé M_1. Construire le point M'_1, image par f du point M_1.



1. 93. Transformation, Antilles 2008

5 points

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, le point A a pour affixe i.

On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}.$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M.

1. Un exemple : on considère le point K d'affixe $1 + i$.

a. Placer le point K.

b. Déterminer l'affixe du point K' image de K par f.

c. Placer le point K'.

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas

a. On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$. Déterminer son image L' par f. Que remarque t-on ?

b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.

Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3. Un procédé de construction

On nomme G l'isobarycentre des points A, M, M' et g l'affixe de G.

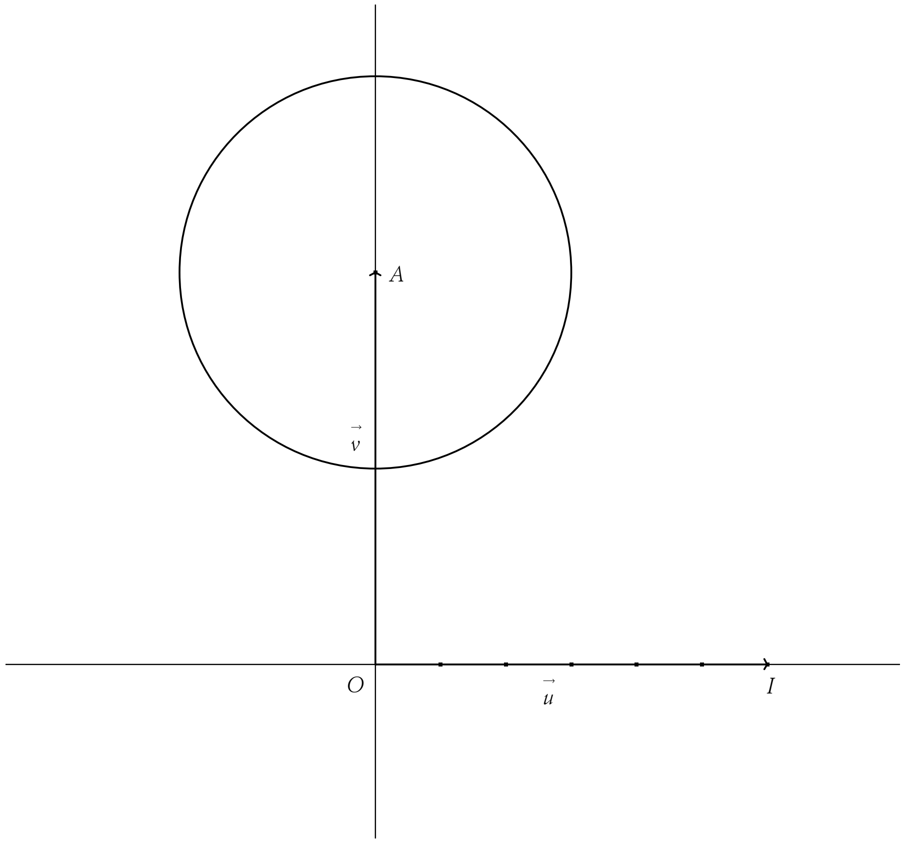
a. Vérifier l'égalité $g = \dfrac{1}{3(z-i)}$.

b. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

c. Démontrer que $\arg(g) = -\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.

d. Marquer un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. On nomme D' l'image de D par f. Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur la figure.

Sur la figure ci-dessous le segment $[OI]$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.



1. 94. Fonction carré, Liban 2009, *5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B=\overline{z_A}$ et $z_C=-3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z du plan, associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1}{3}iz^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

b. Placer les points A', B' et C'.

c. Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f. Déterminer les affixes des points G et G'.

Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

1. 95. $f(z)=z^2+1$, N. Calédonie 2003 - 5 pts

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la transformation ponctuelle f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=z^2+1$.

1. Déterminer les antécédents du point O.

2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.

3. Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?

4. Soit A le point d'affixe $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par f puis prouver que les points O, A et A' sont alignés.

5. Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$ et N le point d'affixe $e^{i\theta}$.

a. Montrer que N appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

b. Lorsque θ varie, montrer que N', image du point N par f reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Vérifier que $\overrightarrow{ON'}=(2\cos\theta)\overrightarrow{ON}$. En déduire que les points O, N et N' sont alignés.

d. Expliquer la construction du point N'.

1. 96. $f(z)=z^2$, Polynésie 2004 - 5 pts

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point M d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives $z'=z-2$ et $z''=z^2$.

1. a. Déterminer les points M pour lesquels $M''=M$.

b. Déterminer les points M pour lesquels $M''=M'$.

2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M_1', M_1'', M_2', M_2'' appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.

3. On pose $z=x+iy$ où x et y sont des nombres réels.

a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z''-z}{z'-z}$.

b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.

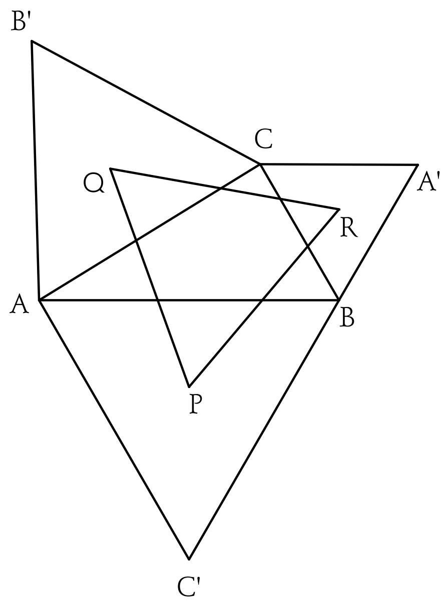
4. On pose $z=\sqrt{3}e^{i\theta}$ où $\theta\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M.

b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente.

c. Dans cette question $\theta=\frac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ, et les points M_3', M_3'' associés. Montrer que le triangle $M_3M_3'M_3''$ est rectangle. Est-il isocèle ?

1. 97. Napoléon, Antilles 2004 - 5 pts



Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'. On considère respectivement les points P, Q et R, centres de gravité respectifs des triangles BCA', ACB' et ABC'.

On note a, b, c, a', b', c', p, q et r les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C', P, Q et R.

1. a. Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

b. Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.

2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.

3. En déduire que les triangles ABC, A'B'C' et PQR ont même centre de gravité.

4. Montrer que : $3(q - p) = (b' - c)+(c - a')+(a - b)$.

On admettra que, de même :

$$3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b).$$

5. Justifier les égalités suivantes : $a - c = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(b' - c\right)$; $b - a' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(c - a'\right)$; $c' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(a - b\right)$.

6. Déduire des questions 4. et 5. que le triangle PQR est équilatéral.

1. 98. $f(z)=z^2-4z+6$, Polynésie 2004

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives 2 et 3.

On fera un dessin (unité graphique : 2 cm) qui sera complété selon les indications de l'énoncé.

On désigne par f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par l'égalité : $z' = z^2 - 4z + 6$.

1. Cette transformation admet-elle des points invariants ?

2. a. Déterminer le(s) point(s) admettant l'origine O comme transformé.

b. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives : $z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$. Déterminer la forme algébrique du complexe $\dfrac{z_1 - 3}{z_1}$, donner son argument et en déduire la nature du triangle OBM_1.

c. Démontrer, sans nouveau calcul, que les points O, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle (C) que l'on précisera et construira. Placer les points M_1 et M_2.

3. a. Vérifier que pour tout point M du plan d'affixe z on a : $z' - 2 = (z - 2)^2$.

b. On désigne par (Γ) le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. Justifier que les points M du cercle (Γ) sont caractérisés par une affixe z vérifiant : $z = 2 + \sqrt{2}\,e^{i\theta}$, où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

c. Montrer, à l'aide des deux questions précédentes, que si M appartient au cercle (Γ), alors l'affixe z' de M' vérifie : $z' = 2 + 2e^{2i\theta}$.

d. En déduire que M' est situé sur un cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon. Construire Γ'.

e. Déterminer l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'})$ en fonction de $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})$.

4. Application : On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$; D' est son image par f.

a. Ecrire sous forme exponentielle le complexe $d-2$. En déduire que D est situé sur le cercle (Γ).

b. A l'aide de la question **3. d.** donner une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AD'})$ et placer le point D' sur le dessin.

c. Démontrer que le triangle OAD' est équilatéral.

1. 99. Projection orthogonale, Am. du Sud 2003

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm).

Soit I le point d'affixe 1. On note (C) le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

Partie I : On pose $a_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle C.

2. Soit B le point d'affixe b, avec $b=-1+2i$, et B' le point d'affixe b' telle que $b'=a_0b$.

a. Calculer b'.

b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie II : Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe. À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$.

b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O},\overrightarrow{M'M}\right)=\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle C privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O. On note x son affixe. On choisit a de manière que A soit un point de C différent de I et de O.

Montrer que le point M' appartient à la droite (OA). En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

1. 100. $f(M)=MA.MB$, Antilles 2002

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct, (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in[0\,;2\pi]$.

On considère l'application f qui tout point M de (C), associe $f(M)=MA\times MB$

a. Montrer, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha}-1=2ie^{i\alpha}$.

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3. a. En utilisant 2. c., montrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b. En utilisant 2. c., montrer qu'il existe un seul point M de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

1. 101. Hyperbole+rotation, Polynésie 09/2005 - 7 pts

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la courbe H d'équation $y^2-x^2=16$.

1. Montrer que H est la réunion de deux courbes C et C′ où C est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ et où C′ est l'image de C par une transformation simple que l'on précisera.

2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).

a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de C.

b. Tracer H dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On nomme A et B les points de la courbe H d'abscisses respectives −3 et 3. On considère le domaine D du plan constitué des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant $-3\le x\le 3$ et $\sqrt{x^2+16}\le y\le 5$. Hachurer le domaine D et exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de r.

b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image par r du point $M(x\,;\,y)$ du plan.

Vérifier que $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$. Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A' et B' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. Soit H' l'hyperbole d'équation $xy = 8$.

a. Tracer H' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Montrer que H' est l'image de H par la rotation r.

3. Soit D′ l'image de D par la rotation r. On admet que D′ est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2}\le x\le 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x}\le y\le 5\sqrt{2}-x$.

a. Hachurer D'.

b. Calculer l'aire de D' exprimée en cm^2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de D.

1. 102. Conique

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que

$$z^2-(1+i)^2=\bar{z}^2-(1-i)^2$$

a. Déterminer et construire E.

b. Déterminer et construire l'ensemble F des points M tels que $[z-(1+i)][\bar{z}-(1-i)]=8$

c. Vérifier qu'il existe un point de $E\cap F$ où les deux courbes ont même tangente.

1. 103. Spirale

Dans cet exercice on essaie de calculer la longueur d'une portion de spirale. La figure jointe au sujet sera complétée au fur et à mesure des besoins et rendue avec la copie.

1. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ de sorte que le point A ait pour affixe 1.

a. Donner sous forme algébrique et sous forme exponentielle l'affixe du point B du cercle de centre O, de rayon 1, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

b. Calculer la distance AB à 10^{-2} près. En considérant que l'arc $\widehat{AB}$ du cercle trigonométrique a une longueur de $\frac{\pi}{4}$, donner alors une valeur approchée de π à l'aide de la distance AB.

c. Placer sur la figure le point M_1, image de A par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$, placer de même les points M_k tels que $M_{k+1} = R(M_k)$ avec $1 \le k \le 15$. Que peut-on dire de M_{16} ?

d. On appelle z_1 l'affixe de M_1 ; montrer que $z_1^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et vérifier que $z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Calculer alors la distance AM_1 à 10^{-3} près et donner une nouvelle valeur approchée de π.

2. On construit maintenant les points N_k de la manière suivante : $N_0=A$ et pour tout k, $1 \le k \le 15$, $ON_{k+1} = \frac{3}{4}ON_k$ et N_k appartient au segment $[OM_k]$.

a. Placer sur la figure les point N_k, $1 \le k \le 16$. Que peut-on dire de N_{16} ? Quelle est la nature de la suite $d_k = ON_k$? Exprimer sous forme trigonométrique l'affixe Z_k des points N_k.

b. Justifier que les triangles N_kON_{k+1} sont tous semblables. Quelle est la nature de la suite $D_k = N_kN_{k+1}$? Donner son expression en fonction de k et de D_0 ; exprimer en fonction de k et D_0 la somme $S_n = D_0 + D_1 + \ldots + D_n$ où n est un entier quelconque.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la longueur $D_0 = N_0N_1$, en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la longueur de la ligne polygonale $N_0N_1N_2 \ldots N_{15}N_{16}$. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini ? Quelle signification concrète a cette limite ?

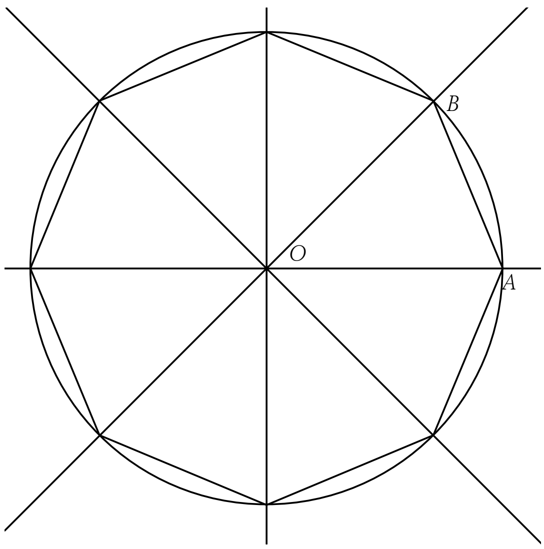


Figure à compléter.

1. 104. Courbe paramétrée+conique (prog. 1985)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), unité graphique : 2 cm.

1. Étude d'une courbe paramétrée (C)

On considère la courbe (C) définie paramétriquement par : $\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{t^2}{2} + t \\ y = g(t) = -\dfrac{t^2}{2} + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

a. Étudier conjointement les variations sur R des fonctions f et g.

b. Préciser les points de (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

c. Préciser les points d'intersection de (C) avec chacun des axes Ox et Oy.

Donner un vecteur directeur des tangentes aux points obtenus. Dessiner (C).

2. On se propose de démontrer que la courbe (C) est une parabole, en étudiant son image par une transformation particulière du plan.

a. Le plan est assimilé au plan complexe. On considère l'application R qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe : $z' = \dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}} z$.

Quelle est la nature de R ? Déterminer ses éléments géométriques.

b. Calculer en fonction de t l'affixe de M' lorsque M est le point d'affixe : $f(t) + ig(t)$. En déduire l'expression en fonction de t des coordonnées x' et y' du point M'.

c. Écrire une équation cartésienne de la courbe (C') image par R de la courbe (C). Représenter (C') sur la même figure que (C). Pourquoi peut-on affirmer que (C) est une parabole ?

1. 105. Hyperbole et complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par M, N, P trois points distincts de ce plan d'affixes respectives m, n, p.

1. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si le complexe $i\dfrac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.

2. Dans cette question, M, N, P sont d'affixes respectives z, z^2, z^4.

a. Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N, P soient distincts deux à deux ?

b. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ du plan tels que le triangle MNP soit rectangle en N est une conique Γ d'équation $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.

3. Préciser la nature de Γ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).

4. Représenter Γ et mettre en place sur la figure les sommets, les foyers et les asymptotes de Γ.

1. 106. Bissectrice (recherche)

Soit a et b deux nombres réels, on considère les nombres complexes z et z' de module 1 et d'arguments respectifs a et b.

1. Montrer, en utilisant la forme exponentielle de z et z', que $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un réel positif ou nul.

2. En déduire que $\arg[z + z'] = \dfrac{1}{2}(\arg[z] + \arg[z'])$.

3. On appelle M et M' les images de z et z' dans le plan muni d'un repère orthonormé direct de centre O et N le point tel que OMNM' soit un parallélogramme. Interpréter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.

1. 107. Birapport

Quelques définitions :

- On dira qu'une application f est involutive si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$.

- Quatre points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si ils appartiennent au même cercle Γ.

- On montre que quatre points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\left(AC, AD\right) = (BC, BD)\left[\pi\right]$ (attention, ce sont des angles de droites…)

On désigne par P le plan complexe, par Ω le point d'affixe i et P'=P$-\{\Omega\}$. M un point quelconque de P' a pour affixe z.

Pour tout réel non nul m, on désigne par f_m l'application de P' dans P' telle que

$$f_m : M(z) \to M'(z') / z' - i = \frac{m}{\overline{z} + i}.$$

1. On suppose m donné. Montrer que f_m est involutive. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_m. Démontrer que pour tout point M de P', les points Ω, M et M' sont alignés et que $\overrightarrow{\Omega M} . \overrightarrow{\Omega M'} = m$ (produit scalaire).

2. Soit m et λ deux réels non nuls. Pour tout point M de P', on désigne par M' le point $f_m(M)$ et par M'' le point $f_\lambda(M')$. Montrer que M'' est l'image de M par une transformation que l'on précisera. Quelle est la nature de cette transformation ?

3. Le nombre m est toujours supposé fixé. Soit A, B, C, D quatre points distincts de P', d'affixes respectives a, b, c et d.

On appelle **birapport** de ces quatre points, noté (A, B, C, D), le nombre complexe $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$.

a. Démontrer que $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$.

b. Démontrer que (A, B, C, D) est un nombre réel si et seulement si les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques.

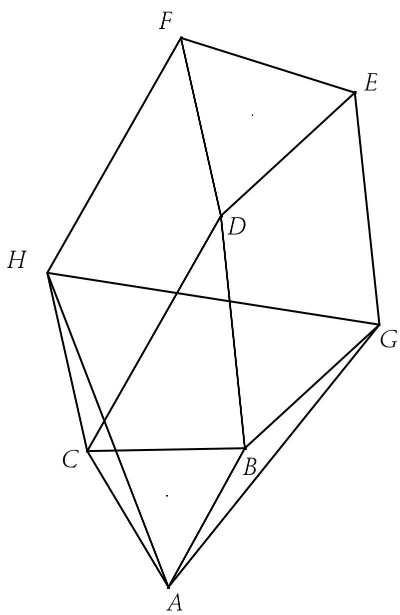
c. On désigne par A', B', C', D' les images respectives des points A, B, C et D par f_m. Montrer que (A, B, C, D) et (A', B', C', D') sont conjugués.

4. Déduire de la question précédente que, quels que soient les points M et N appartenant à P', les points M, N, M' et N' sont alignés ou cocycliques.

5. On désigne par Δ une droite ou un cercle du plan P et par Δ_1 son intersection avec P'. Démontrer que l'image de Δ_1 par f_m est l'intersection d'une droite ou d'un cercle avec P'.

1. 108. Triangles équilatéraux, Am. du Sud 1992

Dans la figure ci-contre, ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux direct, $BDEG$ et $CDFH$ sont des parallélogrammes. Le but de l'exercice est de prouver que le triangle AGH est équilatéral.



On appelle a, b, c, d, e, f, g, h les affixes des points A, B, C, D, E, F, G, H.

Première méthode :

1. a. Démontrer que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

b. Exprimer $(f - d)$ en fonction de $(e - d)$.

2. a. En déduire l'expression de g et h en fonction b, c, d, e, f.

b. Montrer que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(g - a\right)$, conclure.

Deuxième méthode :

1. On appelle R la rotation de centre D, d'angle $\frac{\pi}{3}$, t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$. Donner l'expression complexe de R, t_1, t_2.

2. On appelle T la transformation $T = t_2 \circ R \circ t_1$.

a. Donner l'expression complexe de T, en déduire la nature de T.

b. Déterminer $T(B)$ et le centre de T. Déterminer enfin $T(G)$ et conclure.

1. 109. Somme de distances, Asie 2010, 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe demodule 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives : $a = -2$, $b = 2-2i\sqrt{3}$, $c = 3+3i\sqrt{3}$ et $p = 10$.

PARTIE A : Étude de la configuration

1. Construction de la figure.

a. Placer les points A et P dans le repère.

b. Déterminer les modules des nombres complexes b et c.

c. Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.

2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3. On note r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Vérifier que l'image Q du point C par r_A a pour affixe : $q = -4+4i\sqrt{3}$.

b. Vérifier l'égalité : $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.

a. Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b. Établir que : $AP = BQ = CR$.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par : $f(M) = MA+MB+MC$.

1. Calculer $f(O)$.

2. Soient M un point quelconque et N son image par la rotation r_A.

Démontrer que : $MA = MN$ puis que $MC = NQ$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f(M) \geq 12$.

1. 110. Produit de distances, C. étrangers 1991

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives 1, i, -1, $-i$.

1. Montrer que le point M d'affixe le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ est sur le cercle de centre B et de rayon 1 si et seulement si $r\cos\theta = \frac{1}{2}$ ou $r = 0$.

2. Montrer que le produit $P = MA \times MB \times MC \times MD$ est égal à $P = \left|z^4 - 1\right|$.

3. En déduire une condition (portant sur r et θ) pour que P soit égal à 1.

4. Déterminer les points M de l'axe des réels tels que P est égal à 1.

5. Déterminer les points M du cercle de centre O, de rayon 1 tels que P est égal à 1.

1. 111. Logarithme complexe, EFREI 2001

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes privé du nombre complexe nul.

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire de façon unique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ lorsqu'on suppose que θ vérifie les inégalités $-\pi \leq \theta < \pi$ et que $r>0$.

Dans cet exercice, on étudie l'application F de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à tout nombre complexe non nul $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ le nombre complexe $Z = \ln r + i\theta$.

On propose de transformer au moyen de F des régions de $\mathbb{C}^*$.

1. Déterminer les images par F des demi-cercles de centre O, tracés dans $\mathbb{C}^*$ de rayon R et dont les extrémités sont placées sur l'axe des imaginaires aux points d'affixes iR et $-iR$. Déterminer de même les images des segments de droite portés par des demi-droites d'origine O et dont aucune des extrémités n'est située en O.

2. On définit la région D limitée par les demi-droites ((Δ_1) et (Δ_2) d'origine O telles que $(Ox, \Delta_1) = \theta_1$ et $(Ox, \Delta_2) = \theta_2$ où on suppose que θ_1 et θ_2 appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et vérifient $\theta_2 > \theta_1$ et par les deux arcs de cercles (Γ_a) et (Γ_b) de centre O et de rayons a et b entièrement situés dans le secteur limité par les deux demi-droites précédentes. Dessiner cette région qui est donc un « secteur de couronne circulaire ». Définir l'image de la frontière de cette région qui est donc constituée de deux arcs de cercles et de deux segments. Montrer que l'intérieur de cette région D est transformé par F en l'intérieur d'un rectangle que l'on définira précisément à l'aide des angles θ_1 et θ_2 et des réels a et b.

3. Déterminer les conditions liant θ_1 et θ_2 d'une part et a et b d'autre part pour que ce rectangle soit centré en O. On pose alors $\theta = \theta_2$ et $R = a$. Trouver la relation entre θ et R pour que ce rectangle devienne un carré de centre O.

4. Soit le cercle C qui passe par O et qui est centré au point d'affixe 1.

En utilisant son équation cartésienne, trouver la relation fournissant r en fonction de θ pour qu'un point d'affixe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ appartienne à ce cercle. On suppose $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

L'image par F d'un point quelconque de C étant défini par son affixe $X + iY$, déterminer X en fonction de Y.

Étudier les variations de X en fonction de Y et, en prenant garde à l'échange des coordonnées, dessiner la courbe image de C par F.

Définir l'image par F de la région D' intérieure à ce cercle et comprise entre deux arcs de cercle de rayon R et $\frac{1}{R}$.

5. Soit la parabole (P) d'équation $y^2 = 2x$. Déterminer la relation entre θ et r pour qu'un point d'affixe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ appartienne à cette courbe. Soit alors la région D" comprise dans l'intérieur de cette parabole et entre deux cercles de rayons R et $\frac{1}{R}$.

L'image d'un point $x + iy$ de la portion de parabole (P) comprise entre les deux arcs de cercle précédents étant désignée par $X + iY$, exprimer X en fonction de Y Étudier les variations de X en fonction de Y et en déduire l'image de cette portion de la parabole (P).

Sans prétendre à la précision, dessiner l'allure de l'image de la région D".