1. Chaines de Markov

1.1 Doudou, le hamster paresseux

1.1.1 Le problème

Doudou, le hamster paresseux, ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres et son activité se représente aisément par une chaine de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation *processus sans mémoire* n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.

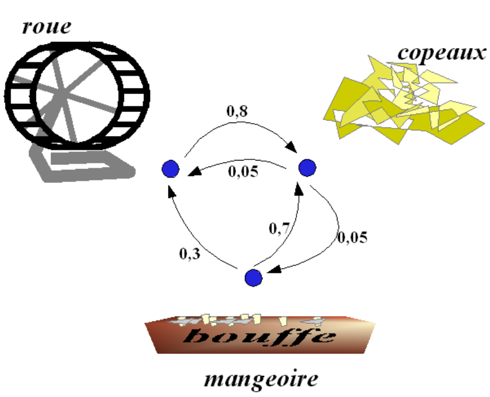
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.

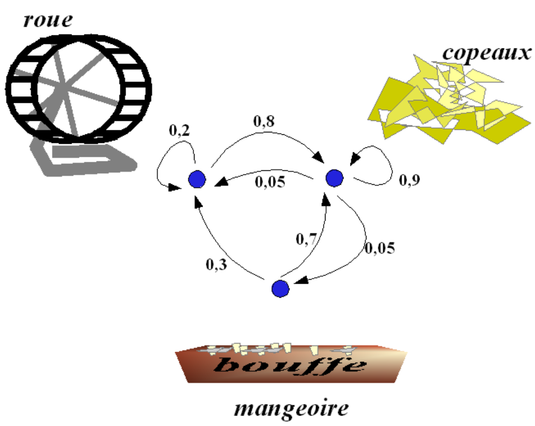
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.

- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.

- Courir est fatigant : il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute, sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

1.1.2 Graphe des états





Les diagrammes peuvent montrer toutes les flèches, chacune représentant une probabilité de transition. Cependant, c'est plus lisible si on ne dessine pas les flèches de probabilité zéro (transition impossible) ni les boucles *(flèche d'un état vers lui-même)*. Cependant elles existent et leur probabilité est sous-entendue car on sait que la somme des probabilités des flèches partant de chaque état doit être égale à 1.

1.1.3 Matrices

Le *vecteur d'état* est $X=(1,2,3)$ où 1=dormir, 2=manger et 3=tourner la roue. La *matrice de transition* de Doudou est la suivante :

$$\begin{array}{r c} \nearrow & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{r} 1=Dormir \\ 2=Manger \\ 3=Roue \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

Par exemple Doudou dort et est dans l'état initial X avec la distribution de probabilité $\pi_0=(1,0,0)$; on le retrouve alors dans l'état $\pi_1=\pi_0 P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,05 & 0,05\\ 0,7 & 0 & 0,3\\ 0,8 & 0 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9 & 0,05 & 0,05\end{pmatrix}$ puis

$$\pi_2=\pi_1 P=\pi_0 P^2=\begin{pmatrix}0,9 & 0,05 & 0,05\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0,05 & 0,05\\ 0,7 & 0 & 0,3\\ 0,8 & 0 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,885 & 0,045 & 0,07\end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Très vite on arrive à $\pi_n=\pi_{n-1}P=\pi_0 P^n=\begin{pmatrix}0,884 & 0,044 & 0,072\end{pmatrix}$: Doudou dort 88,4 % du temps…

Évidemment c'est la matrice P^n qui est importante : celle-ci converge si et seulement si la chaine de Markov est **apériodique** et **irréductible** (tout état du graphe est accessible à partir de n'importe quel autre état du graphe, voir plus bas).

Dans ce cas on a $\pi_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi$ et donc $\pi P=\pi \Leftrightarrow \pi P=\pi I \Leftrightarrow \pi(P-I)=0$: ici cela donne avec $\pi=(a,b,c)$ et $a+b+c=1$ (on évite les solutions triviales…) le vecteur limite $\pi=\begin{pmatrix}0,884 & 0,044 & 0,072\end{pmatrix}$.

On peut remarquer également que dans ce cas 1 est valeur propre de P.

1.1.4 Avec GeoGebra

* Noter que les calculs se font à l'aide d'un logiciel de calcul formel, de GeoGebra ou de la calculatrice.

Pour GeoGebra la syntaxe (ligne de saisie) est par exemple :

Instruction Geogebra	Action
P = {{0.9, 0.05, 0.05}, {0.7, 0, 0.3}, {0.8, 0, 0.2}}	Définition de la matrice P
P_n = Séquence[D^n, n, 1, 5]	Puissances de P de P à P^5.
p = {{1, 0, 0}}	Distribution initiale
p_n = Séquence[p*Elément[D_n, k], k, 1, 5]	Distributions successives

Pour résoudre avec le CAS (calcul formel) installer la version 4.2 (en vrai numérotée 4.1.xx, ouarff !)

Voir ici http://code.google.com/p/geogebra/downloads/list

Pour les commandes : http://wiki.geogebra.org/fr/Commandes_Calcul_formel

Résolution :

Instructions du CAS	Action
X:={a,b,c}	Vecteur solution inconnu
U:=X*(D-I)	Création des équations sous forme matricielle
L_1:=Elément[U,1,1]	Récupération des éléments de U
L_2:=Elément[U,1,2]	
L_3:=Elément[U,1,3]	
L:={L_1=0,L_2=0,L_3=0,a+b+c=1}	Création de la liste des équations (on rajoute la contrainte de probabilité)
S=Solutions[L,X]	Recherche des solutions

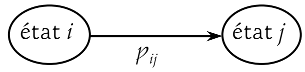
1.2 Quelques éléments théoriques

Soit M un ensemble de résultats d'une épreuve, appelé *espace d'états* (souvent $\mathbb{N}$ sinon l'espace M est un sous espace de $\mathbb{R}^n$ muni d'une structure adéquate) et $X_n \in M$ une variable désignant l'état à l'instant $n\in\mathbb{N}$ d'un système soumis à une loi d'évolution aléatoire (par exemple $X_n=(1,2,\ldots,m)$ correspondant aux m états possibles).

Dans de nombreuses situations l'évolution temporelle de X_n vérifie la propriété suivante : « la loi de X_{n+1} ne dépend de l'histoire X_0, X_1, …, X_n du système que par l'état présent X_n ». Pour résumer : le résultat d'une épreuve ne dépend que du résultat de l'épreuve précédente.

Cette propriété s'appelle la *propriété de Markov* et la suite (X_n) *une chaine de Markov*[1].

Ces chaines de Markov apparaissent dans des domaines aussi divers que la physique, la biologie, l'économie, l'informatique, et sont un objet essentiel de l'étude des processus évolutifs.
Comme ce qui compte est finalement la connaissance des graphes des états



ou des probabilités conditionnelles (les nombres i_k, i, j sont des éléments des vecteurs X)

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_n=i_n\right)=\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n\right)=p_{ij},$$

on peut créer une matrice (dite de transition ou de passage) listant toutes ces probabilités :

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

de sorte que $X_n P = X_{n+1}$.

Quelques règles et définitions :

- Un état i est *absorbant* lorsque $p_{ii}=1$; l'ensemble des états absorbants est le *bord* de l'ensemble des états : lorsque tout chemin conduit à un état absorbant, on dit que la chaine est *absorbante*.
- La probabilité de réaliser un parcours fixé est le produit des probabilités des transitions situées sur le parcours.
- La probabilité de transition $p_{ij}^{(n)}$ de passer en n étapes de l'état i à l'état j est le terme ij de la matrice P^n.
- La probabilité de commencer le processus à l'état i est notée $\pi_i^{(0)}$; la distribution de probabilité initiale est $\pi_0=\left(\pi_1^{(0)}, \ldots, \pi_m^{(0)}\right)$; à la n-ième transition la distribution de probabilité devient $\pi_n=\left(\pi_1^{(n)}, \ldots, \pi_m^{(n)}\right)$. On a alors $\pi_n=\pi_0 P^n$.
- Une distribution de probabilité est *constante* ou *stationnaire* si on a k tel que $\pi_k=\pi_k P$. Si la distribution π_k n'est pas stationnaire mais converge vers une distribution limite π_∞, alors on a $\pi_\infty=\pi_\infty P$.
- S'il existe un entier n pour lequel tous les termes p_{ij} sont strictement positifs, alors P est dite *régulière*.

La matrice P peut être fixe ou évolutive (les p_{ij} changent au cours du temps), le temps lui même peut être discret (états dénombrables) ou continu : voir Renyi pour une introduction simple, Frugier pour des exercices divers et assez didactiques, Lefebvre ou Foata & Fuchs pour un cours et des exercices intéressants, Benaïm & El Karoui pour plus élaboré.

1.3 Le collectionneur

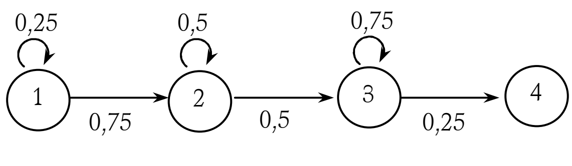
Dans chaque paquet de café BlackSabbath on trouve une figurine de collection.

La série complète comprend 4 figurines : on note T le nombre de paquets qu'il faut acheter pour obtenir la collection complète.

1. Représenter le processus par une chaine de Markov.
2. Établir la matrice de transition. Calculer le vecteur de distribution de probabilité à la troisième transition.
3. Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\operatorname{var}(T)$.

Solution :

1. Le graphe est constitué du nombre de figurines différentes obtenues : 1, 2, 3, 4.



---

[1] Andreï A. Markov, 1856-1922, travailla en analyse puis en probabilités. Élève de Tchebychev il généralisa la loi des grands nombres et le théorème central-limite.

2. La matrice P est alors : $P=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. La distribution initiale est $\pi_0=(1,0,0,0)$ (on a une figurine grâce à l'achat d'un paquet).

Au bout de 3 achats la matrice vaut $P^{(3)}=\begin{pmatrix} 0,0156 & 0,3281 & 0,5625 & 0,0938 \\ 0 & 0,125 & 0,5938 & 0,2813 \\ 0 & 0 & 0,4219 & 0,5781 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\pi_3 \approx (0,016\,;0,33\,;0,56\,;0,09)$

(probabilité d'avoir 1 figurine = 0,016, 2 figurines = 0,33, etc.).

3. Notons X_i le nombre de paquets à acheter pour passer de l'état i à l'état $i+1$:

pour $X_1=k$, il faudra rater k–1 fois et réussir au k-ième achat : $\mathbb{P}(X_1=k)=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{3}{4}$,

pour $X_2=k$: $\mathbb{P}(X_2=k)=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2}$, pour $X_3=k$, $\mathbb{P}(X_3=k)=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right)$.

L'espérance de X_1 est $\mathbb{E}(X_1)=\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X_1=k)=\frac{1}{3/4}=\frac{4}{3}$, de X_2 est $\frac{1}{1/2}=2$ et de X_3 est $\frac{1}{1/4}=4$ (espérance d'une loi géométrique : $\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=-p\left(\frac{-1}{(1-(1-p))^2}\right)=\frac{1}{p}$) ;

Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on a alors $\mathbb{E}(T)=\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\mathbb{E}(X_3)=\frac{22}{3}$.

La variance d'une loi géométrique est $\frac{1-p}{p^2}$; l'indépendance donne $\mathrm{var}(T)=\mathrm{var}(X_1)+\mathrm{var}(X_2)+\mathrm{var}(X_3)=\frac{130}{9}$.

1.4 Transmettre

Un message codé de façon binaire est transmis à travers un réseau. Chaque bit est transmis avec une probabilité d'erreur égale à a pour un passage de 0 à 1, égale à b pour un passage de 1 à 0 (a et b différents de 0 et 1).

Le résultat de la transmission au n^e relais est X_n à valeurs dans $\{0,1\}$; on suppose que les relais se comportent indépendamment les uns des autres et que les erreurs sur les bits sont indépendantes. On souhaite calculer la taille du réseau (la valeur de n) au delà de laquelle la probabilité de recevoir une erreur est supérieure à ε.

On note L la longueur du message.

1. L = 1 : la matrice de transition est $P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array}$.

La probabilité $p_n=\mathbb{P}(X_n=0)$ d'avoir un 0 au n^e relais suit la relation $p_{n+1}=(1-a)p_n+b(1-p_n)$; le point fixe est $p=\frac{b}{a+b}$, soit $p_{n+1}-p=(1-a-b)(p_n-p)\Rightarrow p_n-p=(1-a-b)^n(p_0-p)$.

Si on envoie un 0 la probabilité que le message ne soit pas erroné au n^e relais est $r_n(0)=\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}(1-a-b)^n$ et si on envoie un 1 : $r_n(1)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}(1-a-b)^n$.

2. Si on a $L>1$, on a $X_n=\left(X_1^L,X_2^L,...,X_n^L\right)$ où les variables sont indépendantes de même loi. La probabilité que le message ne soit pas erroné est alors $r_n=\prod_{i=1}^{L}r_n\left(X_0^i\right)\geq\left[\alpha+(1-\alpha)(1-a-b)^n\right]^L$ où $\alpha=\inf\left\{\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right\}$.

La taille du réseau doit être inférieure à $n_0 = \dfrac{\ln(1-\alpha)-\ln\left((1-\varepsilon)^L-\alpha\right)}{-\ln(1-a-b)}$.

1.4.1 Exercices

Exercice 1

Aux mois de décembre, janvier et février, le temps à Brest est à peu près le suivant : s'il pleut un jour alors il repleut le jour suivant avec la probabilité 2/3, il fait beau avec la probabilité 1/3 ; s'il fait beau, alors il refait beau avec la probabilité 3/4 et il pleut avec la probabilité 1/4.

1. Quelle est la proportion de beaux jours en hiver ?

2. Aujourd'hui il fait beau (resp. il pleut) ; combien de temps en moyenne attendrons nous un autre jour de beau temps ? (resp. mauvais temps)

Solution : 1. Les états sont par exemple 1=beau, 2=pluie, la matrice P vaut : $P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$; on cherche π :

$\begin{cases} \pi=(a,b) \\ \pi P=\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{3}b=a \\ \dfrac{1}{4}a+\dfrac{2}{3}b=b \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{4}{7} \\ b=\dfrac{3}{7} \end{cases}$; le temps de retour du beau temps est 7/4, soit environ 1,75 jours, de la pluie 7/3, soit environ 2,3 jours (finalement il ne pleut pas si souvent à Brest…).

2. On reprend la démarche du collectionneur : soit X_1 le nombre de jours pour repasser de l'état 1 à l'état 1 :

$$\mathbb{P}(X_1=k)=\left(1-\frac{4}{7}\right)^{k-1}\frac{4}{7}=b^{k-1}a \text{ et } \mathbb{E}(X_1)=\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X_1=k)=\frac{1}{4/7}=\frac{7}{4}.$$

Exercice 2

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

1. Tracez un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrivez la matrice de transition.

2. Calculez l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé (I) ;
- au départ, il est non malade et non immunisé (S) ;
- au départ, il est malade (M).

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

Exercice 3 : **Nombre de piles consécutifs dans un jeu de pile ou face**

Soit U_n une suite de variables aléatoires valant 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $1-p$, p étant un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].

Appelons N_n le nombre de 1 consécutifs avant le n-ième tirage. Par convention $N_0 = 0$ et $N_m = 0$ si le m-ième tirage est 0. Il est, alors, facile de vérifier que pour $n\geq 0$, $N_{n+1}=(N_n+1)\mathbf{1}_{\{U_{n+1}=1\}}$.

1. Déterminer la matrice de transition de N_n.

2. Combien de piles consécutifs voit-on dans 100 tirages ?

Solution :

1. $\begin{cases} p_{i,i+1}=p \\ p_{i,0}=1 \\ p_{i,j}=0 \text{ sinon} \end{cases}$.

2. Définissons T_L, pour un entier L fixé, par : $T_L = \inf\{n \geq 0, N_n = L\}$, soit le plus petit entier pour lequel la suite de piles a pour longueur L : T_L est ainsi le premier instant où l'on voit une suite de L piles consécutifs.

Introduisons N_n^L (le processus arrété à l'instant T_L) par : $N_n^L = N_{n \wedge T_L}$; notons que l'événement $\left\{N_n^L = L\right\}$ correspond à : « J'ai vu *au moins* L 1 consécutifs dans les n premiers tirages ».

D'autre part $\left(N_n^L, n \geq 0\right)$ reste une chaîne de Markov issue de 0 puisque :

$$N_{n+1}^L = \left(N_n^L + 1\right) \times 1_{\left\{U_{n+1}=1,\, N_n^L < L\right\}} + L \times 1_{\left\{N_n^L = L\right\}}.$$

Soit $P = \left(p_{i,j}\right), i, j \in \{0, 1, \ldots, L\}$ sa matrice de transition, alors : $\begin{cases} p_{i,i+1} = p \\ p_{i,0} = 1-p \\ p_{L,L} = 1 \\ p_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$, et $P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1-p & 0 & 0 & \ldots & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour évaluer cette probabilité il reste à expliciter P et à calculer sa puissance pour diverses valeurs de L (mieux vaut alors utiliser un logiciel…). Par exemple pour une séquence de 100 tirages aléatoires on calcule P^{100} et on récupère le terme $p = \mathbb{P}\left(N_n^L = L\right) = P^{100}{}_{0,L}$ qui donne la probabilité d'avoir une séquence de longueur **au plus** L (attention dans les programmes lignes et colonnes de matrices sont numérotées à partir de 1 ce qui oblige à quelques contorsions…).

Programme Scilab :

```
function [Pro]= proba(L,p)
P=[p*diag(ones(L,1));zeros(1,L-1),1];
P=[[(1-p)*ones(L,1);0],P];
P100=P^100;
Pro = P100(1,L+1)
```

On peut alors obtenir sans difficultés la fonction de répartition ou la loi du nombre maximal de 1 consécutifs dans une séquence aléatoire de 100 0 ou 1 indépendants avec $p = 1/2$. Pour la loi, après avoir tapé :

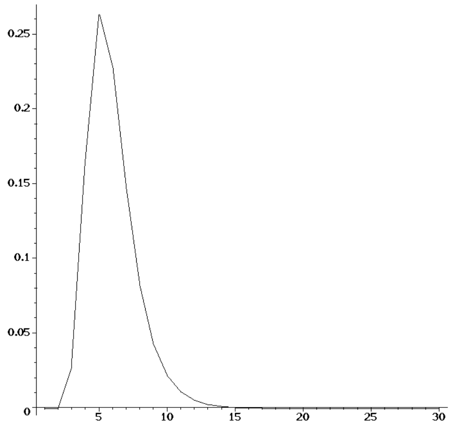
```
for L=2:10;
write(%io(2),string(L)+' '+string(proba(L,1/2)-proba(L+1,1/2)));
end;
```

On soustrait les deux résultats pour avoir la probabilité des séquences de longueur L.

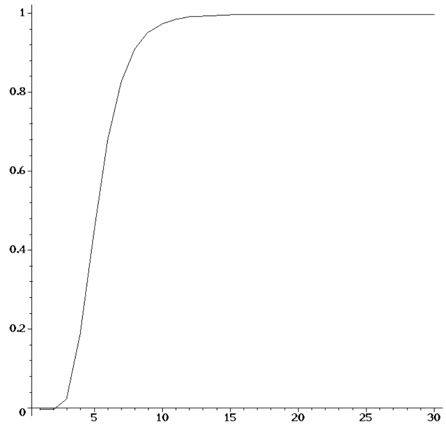
Programme Maple (plus long mais plus lisible) :

```
> restart; with(linalg):
> matrice_Markov:=proc(N,p)
  #crée une matrice (N+1)x(N+1) correspondant au modèle
local L,M,M1,i,j;
M1:=NULL;
for j from 0 to N do
  if j=N then
     L:=0;
     for i from 1 to N-1 do L:=L,0; end do;
     L:=L,1;
  else
  L:=1-p;
     for i from 1 to j do L:=L,0; end do;
  L:=L,p;
     for i from j+2 to N do L:=L,0; end do;
  end if;
M1:=M1,[L];
end do;
M:=convert([M1], Matrix);
end:
> proba:=proc(L,p)
  #renvoie la probabilité d'avoir L 1 consécutifs dans un tirage de 100
Pile/Face
local P, Q;
```

```
 P:=matrice_Markov(L,0.5):
 Q:=P^100:
 Q[1,L+1];
end:
> L:=NULL:p:=0:
for k from 1 to 30 do
 p:=p+proba(k,0.5)-proba(k+1,0.5);
   #si on veut simplement l'histogramme: p:=proba(k,0.5)-proba(k+1,0.5);
 L:=L,[k,p]:
end do:
plot([L]);
```



Histogramme des probabilités



Fonction de répartition

On est donc « à peu près » sûr (à près de 80 %) de voir au moins 5 piles consécutifs dans une séquence de 100 tirages à pile ou face, pour une piéce équilibrée. Le fait de ne pas voir cinq 1 consécutifs doit être considéré comme anormal et peut servir de test pour savoir si une suite à vraiment été tirée au hasard. Il est en effet très rare qu'une personne tentant d'imiter une suite au hasard ait l'idée de mettre cinq 1 à la suite :ça marche plutôt bien (essayer avec l'un de vos camarades, qui ne suit pas le cours bien sûr !).

Un modèle à support continu et temps discret : Cox-Ross-Rubinstein

Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(V_n = u) = p$ et $\mathbb{P}(V_n = d) = 1-p$ (u et d sont des coefficients multiplicateurs : $u\,(up) \geq 1$, $d\,(down) \leq 1$.

Posons $X_0 = x$ et définissons par récurrence X_n par : $X_{n+1} = X_n V_{n+1}$: à tout instant le prix d'un bien monte ou descend.

La matrice de transition P est donnée par : $\begin{cases} p_{x,xu} = p \\ p_{x,xd} = 1-p \quad x \in \mathbb{R}. \\ p_{x,y} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

C'est le modèle discret le plus couramment utilisé en finance. Il porte le nom de *modèle de Cox-Ross-Rubinstein*.

Voir modèle CRR : http://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_binomial

ainsi que http://perso.univ-rennes1.fr/Mihai.Gradinaru/AGREG/TEXTES/europeen.pdf

1.4.2 Les jeunes, les vieux et les autres

On recense une population tous les 40 ans.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de cette population suivant un modèle particulier que l'on précise à partir de trois recensements.

Partie A – À partir de données

La population, pour la tranche d'âge de 0 à 80 ans, a été recensée en 1930, 1970 et 2010, en séparant les deux classes d'âges suivantes :

– la classe A constituée par tous les individus d'âge inférieur ou égal à 40 ans ;

– la classe B constituée par tous les individus d'âge strictement supérieur à 40 ans et d'âge inférieur ou égal à 80 ans.

Les recensements de 1930, 1970, 2010 ont donné les résultats suivants (effectifs en millions d'habitants) :

Années	Classe A	Classe B	Total
1930	$a_0 = 30$	$b_0 = 20$	$c_0 = 50$
1970	$a_1 = 28$	$b_1 = 24$	$c_1 = 52$
2010	$a_2 = 28{,}8$	$b_2 = 22{,}4$	$c_2 = 51{,}2$

On suppose que les classes ont évolué de telle sorte qu'il existe trois coefficients fixes α, β, γ tels que :

$$\begin{cases} a_1 = \alpha a_0 + \beta b_0 \\ b_1 = \gamma a_0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_2 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ b_2 = \gamma a_1 \end{cases}.$$

1. Avec les données ci-dessus, calculer α, β, γ (l'utilisation des matrices sera un plus).

2. On note a_n, b_n et c_n les effectifs des classes A, B, C au recensement de l'année ($1930+40n$).

On suppose que le modèle exposant le renouvellement des classes A et B se conserve pour tous les recensements avec les mêmes coefficients α, β, γ.

a. Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction du vecteur $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

b. Calculez à partir des données du tableau les effectifs des classes A et B en 2130. Quelle suggestion feriez vous pour l'effectif de la classe C ? Comment peut-on envisager l'avenir ?

3. Reprendre les questions précédentes avec les valeurs suivantes pour α, β, γ et les valeurs initiales précédentes des effectifs des classes A, B, C :

$\alpha = 0{,}1$; $\beta = 0{,}8$; $\gamma = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}1$; $\beta = 1$; $\gamma = 0{,}9$	$\alpha = 1$; $\beta = 1$; $\gamma = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}5$; $\beta = 1$; $\gamma = 0{,}6$

Partie B – Un modèle

On se propose d'étudier les suites v et w vérifiant (1) : $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a, b, c sont trois réels donnés dans l'intervalle $]0\,;1[$.

1. Montrer que $v_{n+2} = av_{n+1} + bcv_n$ et $w_{n+2} = cw_{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

En déduire que si q_1 et q_2 sont deux réels distincts de somme a et de produit $-bc$, alors les suites $(v_{n+1} - q_1 v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{n+1} - q_2 v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et de raisons respectives q_2 et q_1 (on ne cherchera pas à calculer q_1 et q_2).

En déduire $v_{n+1} - q_1 v_n$, $v_{n+1} - q_2 v_n$, puis v_n en fonction de v_0, v_1, q_1, q_2, n. Exprimer de même w_n.

2. Calculer q_1 et q_2 puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ dans le cas particulier suivant : $a = 0{,}6$; $b = 0{,}5$; $c = 0{,}8$.

3. Dans les notations de la première partie, en déduire a_n et b_n en fonction de n. Préciser aussi $c_n = a_n + b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Que pensez-vous de l'évolution à long terme de la population décrite dans la première partie ? Ce modèle vous semble-t-il cohérent avec la réalité ?

Partie C - Généralisons

a, b, c sont toujours trois réels dans l'intervalle $]0\,;1[$.

1. On suppose que les suites v et w ont des limites finies non nulles. Montrer en utilisant les relations (1) que nécessairement $a + bc = 1$.

2. Réciproquement, si $a + bc = 1$, montrer que les suites v et w sont convergentes (on pourra vérifier que q_1 et q_2 prennent les valeurs 1 et $a - 1$).

3. La condition $a + bc = 1$ est donc un critère permettant, pour ce modèle, de prévoir l'existence à long terme d'un équilibre pour la population ; si cette condition n'est pas vérifiée, on peut montrer que la population est :

– soit en voie d'expansion $a + bc > 1$,

– soit en voie d'extinction $a + bc < 1$.

Vérifier numériquement ces assertions pour les exemples de la partie A.

4. Voir (et travailler) à titre d'exemple plus compliqué la situation décrite ici :

http://interstices.info/jcms/i_56766/modeliser-la-propagation-dune-epidemie

Exercice 4. La ruine d'un joueur

Deux joueurs jouent à pile ou face : chaque fois que X gagne, il touche 1 de Y et réciproquement.

Ils partent respectivement d'un capital X_0 et Y_0, et le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent pour payer.

La fortune d'un joueur peut prendre les valeurs $\{0, 1, 2, \dots, X_0 + Y_0\}$. Si le joueur X possède une fortune $X_n = k$ à la date n, à la date $n + 1$:

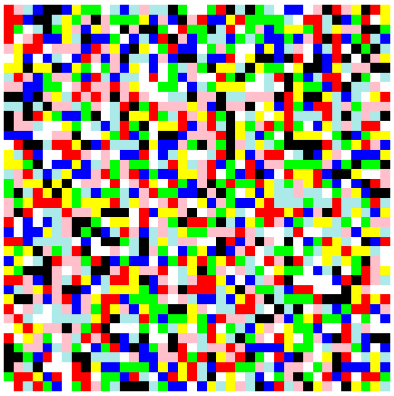
- sa fortune devient $k - 1$ avec probabilité p et $k + 1$ avec probabilité $1 - p$,
- sa fortune reste en 0 avec probabilité 1 si $k = 0$,
- sa fortune reste en $X_0 + Y_0$ avec probabilité 1 si $k = X_0 + Y_0$.

Exercice 5. Le modèle stepping stone

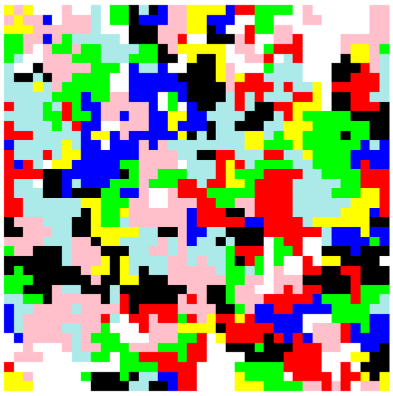
On considère un tableau de taille $n \times n$ où chaque cellule a une couleur choisie parmi k couleurs.

À chaque instant on choisit une cellule au hasard, qui prend la couleur d'un de ses voisins immédiat lui-même choisi au hasard. Les figures suivantes montrent l'évolution de ce système pour $k = 8$ couleurs et $n = 40$.

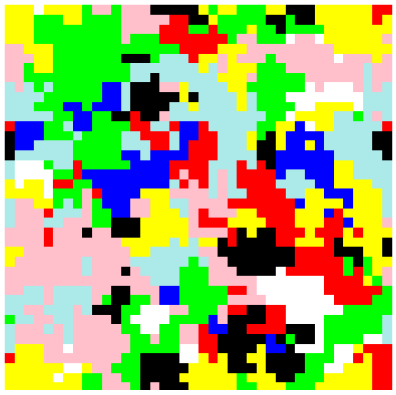
On peut montrer qu'il s'agit d'une chaine de Markov absorbante au sens où des régions absorbantes vont se former ; ce type de modèle apparaît naturellement en génétique.



itérations = 0



itérations = 20 000



itérations = 60 000

The stepping stone model of population structure and The decrease of genetic correlation with distance 1, M. Kimura & G. H. Weiss, 1964 : http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1210594/pdf/561.pdf

The stepping stone model: New formulas expose old myths, J. Theodore Cox and Richard Durrett, 2002 :

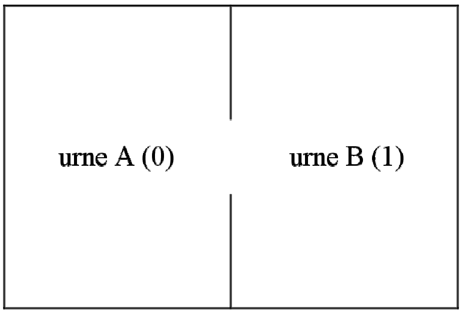
http://www.math.duke.edu/~rtd/SS/AAP091.pdf

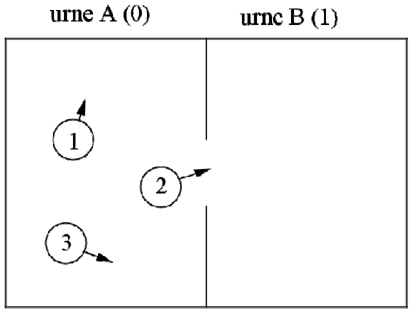
http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdfview_1&handle=euclid.aoap/1107271664

1.5 Les urnes d'Ehrenfest

Au début du 20e siècle il y avait de nombreuses discussions à propos d'une possible contradiction entre la mécanique newtonienne et la thermodynamique (cf. par exemple le *démon de Maxwell*).

Un récipient creux est divisé en deux chambres A (ou 0) et B (ou 1) par une paroi percée d'un trou. Soient $2n$ molécules se trouvant primitivement en A, les lois de la thermodynamique prédisent que le système évoluera *irréversiblement* vers un état d'équilibre dans lequel chaque chambre contiendra finalement à peu près n molécules, ce qui est vérifié par l'expérience.





Mais toutes les lois de la mécanique sont réversibles par rapport au temps, i.e. invariantes par la transformation $t \to -t$: dans cette transformation le système s'inverse et toutes les molécules reviennent en A, ce qui constitue une évolution possible (bien que gênante) du système.

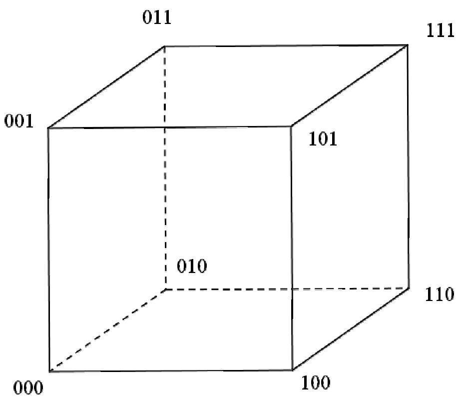
On peut même en dire davantage : H. Poincaré a démontré qu'un système dynamiquement fermé peut revenir aussi souvent qu'on veut à l'un de ses états passés (*réversibilité de Poincaré*). Paul et Tatiana Ehrenfest (1907) tentèrent d'éclaircir, à l'aide d'un modèle simple composé d'urnes, cette apparente contradiction entre réversibilité et irréversibilité.

Nous commencerons par un modèle avec trois et quatre molécules, que nous généraliserons ensuite. Pendant un court temps h, chaque particule a la même probabilité de passer dans l'autre chambre par le trou. On simule ce processus avec des urnes.

1.5.1 Partie I

On considère trois boules 1, 2, 3, initialement dans l'urne A (0). Tous les h, l'un des nombres 1, 2, 3 est tiré au hasard et la boule correspondante est changée d'urne. On peut décrire l'état du système de manière microscopique ou macroscopique.

Description microscopique : on donne la position exacte de chaque boule.



L'état du système est représenté par un mot de trois bits pris dans {0, 1} ; les 8 états possibles peuvent être représentés comme sommets d'une boîte.

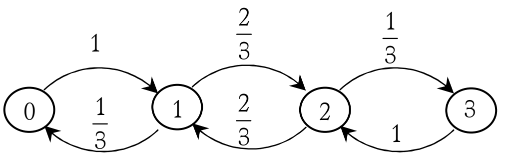
Initialement les trois boules sont en 0, soit dans le coin 000 de la boîte puis le système évolue vers l'un des trois sommets voisins ; à chaque h, un des trois chiffres sera choisi et inversé : nous avons fabriqué une promenade symétrique sur un cube. On peut facilement écrire la matrice P de transition, à 8 lignes et 8 colonnes.

Comme P est bistochastique (somme des termes de chaque ligne et de chaque colonne égale à 1), on obtient la répartition stationnaire $X = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{8} \right)$ (voir théorème 1).

Cela signifie qu'après un temps très long tous les sommets auront reçu le même nombre de visites et que l'intervalle moyen entre deux visites à un même sommet est 8, d'où l'irréversibilité parfaite.

Description macroscopique : l'état du système est le nombre de boules situées en B.

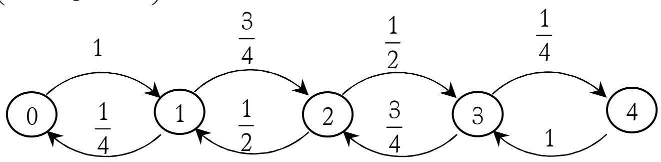
Les boules ne sont plus discernables ; les sommets de la boîte ayant même somme de leurs trois chiffres sont regroupés, on utilise la promenade aléatoire suivante :



La chaine de Markov est irréductible et a pour période 2. Soit $X = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ la distribution stationnaire : pour des raisons de symétrie, on a $p_0 = p_3$ et $p_1 = p_2$; avec $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ on tire $X = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right)$.

Le vecteur de l'intervalle moyen entre deux visites est : $m=\left(m_{00}, m_{11}, m_{22}, m_{33}\right)=\left(8, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 8\right)$ (théorème 3.c.).

Avec 4 boules on obtient la promenade suivante, ce qui donne $X=\left(\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}\right)$ et les temps moyens : $m=\left(m_{00}, m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}\right)=\left(16, 4, \frac{8}{3}, 4, 16\right)$.



1.5.2 Partie 2

Pour $2n$ molécules la description globale amène à une promenade semblable : la condition de réversibilité est que le flux de i à $i+1$ soit identique au flux de $i+1$ à i, soit pour les probabilités : $p_i \frac{2n-i}{2n}=\frac{1+i}{2n} p_{i+1} \Leftrightarrow p_{i+1}=\frac{2n-i}{1+i} p_i$.

On a donc $p_1=\binom{2n}{0} p_0$, $p_2=\binom{2n}{1} p_0$, … $p_k=\binom{2n}{k} p_0$ et comme $\sum_{k=0}^{2n} p_k=1$, on obtient

$$p_0 \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=1 \Leftrightarrow p_0=\frac{1}{2^{2n}} \text{ et } p_k=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{k}$$

avec un temps moyen de retour égal à l'état k' : $m_{kk'}=\frac{1}{p_{k'}}$.

Si on attend assez longtemps on peut revenir à chaque état : par exemple pour revenir à l'état 0 (toutes les molécules dans A), on a $m_{00}=2^{2n}$, soit un temps quasi-infini… Pour revenir à l'état n (équilibre) on a $p_n=\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec la formule de Stirling, soit $m_{nn} \sim \sqrt{\pi n}$: pour des grandes valeurs de n, m_{00} est beaucoup plus grand que m_{nn}, c'est pourquoi on observe les états voisins de n et jamais le retour en 0. La variance du retour à 0 a pour variance $\sigma_{nn}^2 \sim \left(2^{2n}\right)^2$ ce qui limite encore cette possibilité.

Par ailleurs l'approximation gaussienne de la loi binomiale montre que

$$p_n\left(\left[\frac{2n-c\sqrt{2n}}{2} ; \frac{2n-c\sqrt{2n}}{2}\right]\right) \sim \mathbb{P}(-c \leq G \leq c)=1-2\mathbb{P}(G>c)$$

où G est une v.a. gaussienne de densité $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Voici une estimation de cette quantité : pour $t>0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(G>c)=\mathbb{P}\left(e^{tG}>e^{tc}\right) \leq e^{-tc} \mathbb{E}\left(e^{tG}\right)=e^{-tc} e^{t^2/2} ;$$

pour $t=c$ on a $\mathbb{P}(G>c) \leq e^{-c^2/2}$. Pour c égale à quelques unités, la diffusion d'Ehrenfest, si elle part de n, n'a pratiquement aucune chance de sortir de l'intervalle $\left[\frac{2n-c\sqrt{2n}}{2} ; \frac{2n-c\sqrt{2n}}{2}\right]$ en un temps raisonnable.

1.5.3 Deux théorèmes

- Une matrice P est dite **irréductible** si pour tout couple (i, j), il existe un m tel que $p_{ij}(m)>0$ (on peut atteindre l'état j à partir de i mais pas forcément avec le même nombre de sauts pour chaque i).

- Le temps de retour de l'état i à l'état i est $d=\sup\left\{n / p_{ii}(n)>0\right\}$ (c'est le pgcd de tous les temps de retour à l'état i) : d est appelé la période de l'état i ; si $d=1$ pour tous les états i, P est dite **apériodique**.

Théorème 1 de solidarité : tous les états ont la même période si P est irréductible.

Théorème 2 : une matrice P est régulière si elle est irréductible et apériodique.

Théorème 3 : soit P une matrice régulière. Alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} P^n = P_\infty$ existe et est stochastique avec toutes ses lignes identiques : $P_\infty = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$;

b. le vecteur $\pi = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ est une distribution d'états à éléments strictement positifs ; c'est l'unique distribution telle que $\pi I = \pi P$;

c. le temps moyen de retour à l'état i est $m_i = \dfrac{1}{p_i}$.

Démonstrations

a. Soit P bistochastique $N \times N$, $N \geq 3$, à valeurs strictement positives. Soient $p_{ij}^{(n)}$ (p_{ij} pour $n = 1$) les éléments de P^n et d le **plus petit** élément de P, on a évidemment $0 < d < \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < 1 - 2d < 1$.

Choisissons une colonne j de P^n et appelons m_n et M_n ses éléments minimaux et maximaux : nous montrons que $M_{n+1} \leq M_n$, $m_{n+1} \geq m_n$ et $M_n - m_n \to 0$ ce qui montrera que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ et que cette limite ne dépend pas de i.

$M_n = \max\limits_i \left\{ p_{ij}^{(n)} \right\}$ et $m_n = \min\limits_i \left\{ p_{ij}^{(n)} \right\} = p_{aj}^{(n)}$: on a

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \max_i \sum_k p_{ik} p_{ik}^{(n)} = \max_i \left[\sum_{k \neq a} p_{ik} p_{kj}^{(n)} + p_{ia} m_n \right] \leq \max_i \left[M_n \sum_{k \neq a} p_{ik} + p_{ia} m_n \right] \\ &= M_n + \max_i (m_n - M_n) p_{ia} = M_n - (M_n - m_n) \min_i p_{ia} \leq M_n - d(M_n - m_n) \leq M_n. \end{aligned}$$

De même on montre que $m_{n+1} \geq m_n + d(M_n - m_n) \geq m_n$; par soustraction on obtient alors que $M_{n+1} - m_{n+1} \leq (1 - 2d)(M_n - m_n) \Rightarrow M_n - m_n \leq (1 - 2d)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ok, tous les éléments de la colonne j sont identiques.

b. $X = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ est une distribution car limite de la suite de distributions X_n ; elle est unique car s'il en existait une autre Y, on aurait $Y - X = P(Y - X) \Rightarrow 0 = \left(Id - P^n \right)(Y - X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = (Id - P_\infty)(Y - X)$. !!! voir ¿¿¿

Pour le signe, on a simplement $p_i = \sum\limits_j p_j p_{ji} \geq d > 0$ donc tous les éléments de X sont >0. Supposons que P^r (et pas forcément P) ait tous ses éléments strictement positifs, d'après le a., on a $M_{nr} - m_{nr} \to 0$; la suite $M_n - m_n$ étant monotone décroissante et extraite d'une suite convergeant vers 0 converge également vers 0

c. Soit m_{ij} le nombre moyen de sauts pour aller de i à j, on a $m_{ij} = 1 + \sum\limits_{k \neq j} p_{ik} m_{kj}$; prenons les matrices $N \times N$:

$$M = (m_{ij}),\ D = \begin{pmatrix} m_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{NN} \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On a l'égalité matricielle : $M = E + P(M - D) = E + PM - PD$ que nous multiplions par X :

$$XM = XE + XPM - XPD = XE + XM - XD \Rightarrow XE = XD, \text{ soit}$$

$$\left(\sum_i p_i, \dots, \sum_i p_i \right) = (1, 1, 1, \dots, 1) = (p_1 m_{11}, p_2 m_{22}, \dots, p_N m_{NN}) \text{ et } m_i = \frac{1}{p_i} \text{ pour tout } i.$$

1.6 Le Pagerank de Google

Google cherche à classer l'importance des pages web en fonction des requêtes des internautes : vu l'importance d'apparaître en tête de liste l'algorithme de calcul doit prendre en compte de nombreux paramètres comme les occurrences des mots cherchés, l'importance des pages dans le web (nombre de liens pointant vers elle, nombre de liens sortants, …), etc.

Si on s'intéresse surtout aux liens on peut voir le web comme un graphe et le parcours de l'internaute comme une chaine de Markov.

On s'intéresse à une page P_i dont on va mesure l'importance par un paramètre μ_i : par exemple si on compte toutes les pages P_j pointant vers P_i, on peut définir $\mu_i = \sum_{j \to i} 1$, le $j \to i$ résumant le pointage de P_j vers P_i. Il est facile de voir que ce comptage est peu pertinent et facilement manipulable… il suffira de créer de multiples pages pointant vers P_i pour le valoriser. A contrario des pages d' »annuaires » vont proposer beaucoup de liens divers avec souvent un lien réciproque alors que leur pertinence est limitée : ceci dit on peut quand même en tenir compte en utilisant le nombre de liens émis par la page P_j, soit l_j et en prenant $\mu_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j}$: μ_i compte le nombre de votes pour i pondéré par l'importance de P_i dans ce vote. C'est un peu mieux mais encore trop facile à manipuler et en général assez peu pertinent.

Il semble relativement clair qu'il faut prendre également en compte l'importance des pages P_j : $\mu_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} \mu_j$ le fait en étant un peu plus compliqué à calculer puisque récursif : il va falloir résoudre un système d'inconnues μ_j et μ_i ce qui est possible avec un ordinateur même pour de gros systèmes.

Prenons l'exemple d'un surfeur aléatoire passant d'une page à une autre au hasard : à l'instant t il est arrivé sur la page P_j avec la probabilité p_j ; à $t+1$ il est sur P_i avec la probabilité $\frac{1}{l_j} p_j$: il arrive donc sur P_i avec la probabilité $p'_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} p_j$. Si on part avec une distribution initiale $p_t = \left(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n\right)$, on passe alors à $p_{t+1} = \left(p'_1, p'_2, \dots, p'_i, \dots, p'_j, \dots, p'_n\right)$, on reconnaît une chaine de Markov où la distribution stationnaire est précisément donnée par les solutions de l'équation $p_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} p_j$.

Le principal problème rencontré par cette méthode est lorsque le graphe contient des pages sans issues ($l_j = 0$) appelées *trous noirs*. Pour éviter ces derniers il suffit que le surfeur quitte la page volontairement avec une probabilité c et redémarre ailleurs sur une des n pages prise au hasard : la transition est alors donnée par $p'_i = c\frac{1}{n} + \left(1-c\right)\sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} p_j$.

La valeur de c est déterminée par le nombre moyen de pages suivies préalablement par le surfeur : $\frac{1}{n_p}$: par exemple $c = 0{,}15$ correspond à 6 pages visitées en moyenne, ce qui semble réaliste (¿).

Ce choix de c garantit en tous cas que la matrice de transition est bien irréductible et apériodique, ce qui assure à Mrs Brin et Page l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire, soit de confortables revenus.

Remarques

1. L'hypothèse à la base du modèle est que l'on peut considérer un lien sur une page comme un vote positif, d'autant plus important que le lien est isolé et la page du lien souvent citée… Pas évident pour les webmasters…

2. The intentional surfer model

The original Pagerank algorithm reflects the so-called random surfer model, meaning that the PageRank of a particular page is derived from the theoretical probability of visiting that page when clicking on links at random. However, real users do not randomly surf the web, but follow links according to their interest and intention. A page ranking model that reflects the importance of a particular page as a function of how many actual visits it receives by real users is called the *intentional surfer model*. The Google toolbar sends information to Google for every page visited, and thereby provides a basis for computing PageRank based on the intentional surfer model. The introduction of the nofollow attribute by Google to combat Spamdexing has the side effect that webmasters commonly use it on outgoing links to increase their own PageRank. This causes a loss of actual links for the Web crawlers to follow, thereby making the original PageRank algorithm based on the random surfer model potentially unreliable. Using information about users' browsing habits provided by the Google toolbar partly compensates for the loss of information caused by the nofollow attribute. The SERP rank of a page, which determines a page's actual placement in the search results, is based on a combination of the random surfer model (PageRank) and the intentional surfer model (browsing habits) in addition to other factors.

1.7 Références

Graphes : http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/index.html

Chaines de Markov, exemples divers et cours : http://perso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/Markov.pdf

http://www.proba.jussieu.fr/cours/dea/telehtml/telehtml.html

http://math.unice.fr/~diener/MAB06/Markov2.pdf (voir exemple forêt)

http://www.sites.univ-rennes2.fr/laboratoire-statistique/AGUYADER/doc/proba/poly.pdf (unicité loi stat, p 122)

Dartmouth College, *Introduction to probability*, AMS sd

http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/book.html

(+ programmes Mathematica, Maple V, Basic)

Benaïm Michel, El Karoui Nicole, *Promenade Aléatoire*, Éd. de l'École Polytechnique, 2004

Engel Arthur, *L'enseignement des probabilités et de la statistique*, volumes 1 & 2, Cedic Nathan 1979

Engel Arthur, *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*, Cedic Nathan sd

Foata Dominique, Fuchs Aimé, *Processus Stochastiques*, Dunod 2002

Frugier Gérard, *Exercices ordinaires de probabilités*, Ellipses 1992

Lefebvre Mario, *Processus stochastiques appliqués*, Hermann 2005

Rényi Alfred, *Calcul des probabilités*, Dunod 1966

Pagerank Google : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/Enseignement/google.pdf, Bulletin vert APMEP 489, M. Eisermann 2009.

Wikipedia (eng) : http://en.wikipedia.org/wiki/PageRank