1. Concours EPF 1999 1
2. Concours EPF 2000 3
3. Concours EPF 2002 5
4. Concours EPF 2003 7
5. Concours EPF 2004 9
6. Concours EPF 2005 11
7. Concours EPF 2006 14
8. Concours EPF 2007 16
9. Concours EPF 2008 18
10. Concours EPF 2009 20

1. Concours EPF 1999

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

On considère les intégrales :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}\ ,\ J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \text{ et } K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1. a. Calculer la dérivée de la fonction numérique f définie sur $[0\,;+\infty[$ par: $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$

b. En déduire la valeur de I.

2. a. Démontrer que $2I+J=K$.

b. Démontrer que $K=\sqrt{3}-J$. (On pourra intégrer K par parties).

c. En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 2

Partie A Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-4+\frac{1}{4}\ln x$. On ne demande pas sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f et préciser les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dont on donnera un encadrement par deux entiers consécutifs.

3. En déduire le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]0\,;\alpha[$ et $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

On se propose de déterminer une valeur de α à 10^{-2} près.

1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=4-\frac{1}{4}\ln x$.

Étudier les variations de g et montrer que l'image par g de l'intervalle $[3\,;4]$ est incluse dans l'intervalle $[3\,;4]$.

2. On considère la suite définie par $U_0=3$ et $U_{n+1}=g(U_n)$.

a. Démontrer que U_n est bien définie et que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $3\le U_n\le 4$.

b. Démontrer que $U_n-\alpha$ et $U_{n+1}-\alpha$ sont de signes contraires (on pourra justifier rapidement le fait que α est l'unique solution de $g(x)=x$).

3. a. Montrer que, pour tout x élément de $]3\,;4[$: $|g'(x)|\le\frac{1}{12}$

b. En déduire que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $|U_n-\alpha|\le\frac{1}{12^n}$

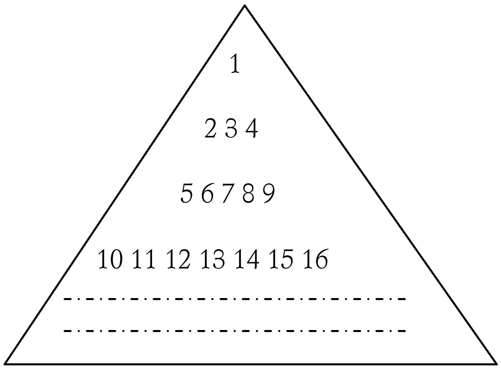
c. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3

On place les entiers de la manière suivante :

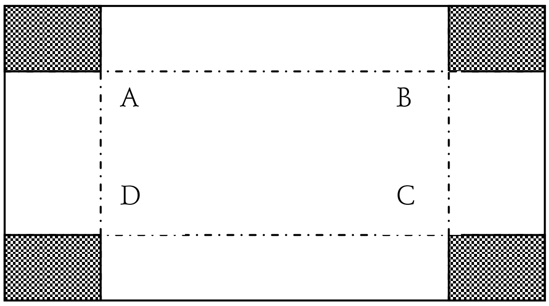
Montrer que le plus grand nombre de la $n^{\text{ème}}$ ligne est le carré d'un entier.

Déterminer la place de 1999 : numéro de ligne et rang par rapport au début de la ligne.



Exercice 4

En utilisant une feuille de carton rectangulaire de 80 cm de long et 50 cm de large, on veut fabriquer une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux (voir la figure) puis on plie le carton suivant les segments AB, BC, CD et DA.



On appelle x la mesure en cm du côté de chaque carré.

1. Préciser entre quelles valeurs doit se trouver x pour que la boîte soit réalisable.

2. Déterminer le volume, noté $V(x)$, de la boîte obtenue.

3. Déterminer la valeur de x qui rend le volume maximum.

4. Calculer les dimensions et le volume V de la boîte de volume maximum.

Exercice 5

Une entreprise comprend 40 % de cadres et 60 % d'employés. On sait que 20 % des cadres et 10 % des employés parlent l'anglais.

1. On interroge une personne de cette entreprise au hasard ; quelle est la probabilité pour que ce soit

a. un cadre parlant l'anglais ;

b. un employé parlant l'anglais ;

c. une personne parlant l'anglais.

2. La personne interrogée parle l'anglais. Quelle est la probabilité pour que ce soit un employé ? Quelle est la probabilité pour que ce soit un cadre ?

3. On interroge au hasard 15 personnes de cette entreprise. Quelle est la probabilité pour que, sur ces 15 personnes

a. au moins une personne parle l'anglais ?

b. seulement 8 personnes parlent l'anglais ?

2. Concours EPF 2000

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f. Montrer que, pour tout entier naturel k, avec $k > 2$,

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(t)dt\leq f(k)\,.$$

2. On considère la suite S définie par son terme général $S_p=\dfrac{\ln 2}{2^2}+\dfrac{\ln 3}{3^2}+\ldots+\dfrac{\ln p}{p^2}$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que la suite S est croissante.

b. En utilisant la question 1., montrer que $S_p-\dfrac{\ln 2}{2^2}\leq\displaystyle\int_2^p f(t)dt\leq S_p-\dfrac{\ln p}{p^2}$.

En déduire un encadrement de S_p.

c. Calculer, en utilisant une intégration par parties, $\displaystyle\int_2^p f(t)dt$; en déduire que la suite S est majorée.

Exercice 2

Dans le plan, on considère un carré $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Soit O le centre du carré ; I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. On considère G_1 le barycentre du système $\{(A, 1)\,;\,(B, -3)\,;\,(C, 1)\,;\,(D, -3)\}$. Déterminer G_1.

2. a. On considère G_2 le barycentre du système $\{(A, 1)\,;\,(B, 1)\,;\,(C, -3)\,;\,(D, -3)\}$. Déterminer G_2 et le placer.

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}=0\,.$$

Construire cet ensemble.

c. Soit f l'application du plan sur lui-même qui à tout point M fait correspondre le point M' défini par :

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MD}\,.$$

Reconnaître f et en donner les éléments caractéristiques.

Exercice 3

Étant donné un nombre réel a, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et pour $n\geq 1$:

$$u_{n+1}=u_1\times u_2^2\times u_3^3\times\ldots\times u_n^n$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 en fonction de a.

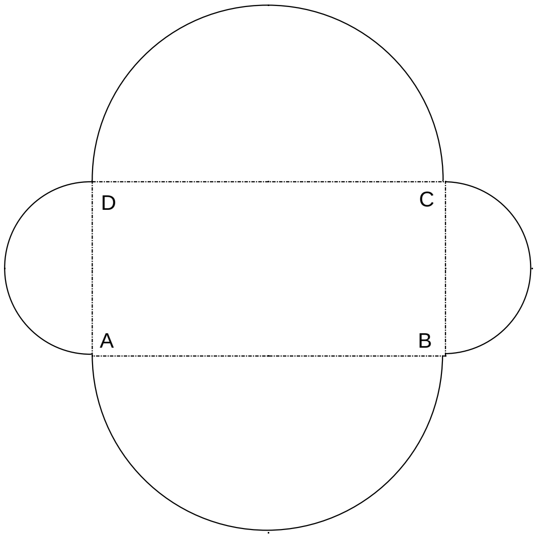
2. Calculer, pour $n\geq 2$, u_n en fonction de u_{n-1} ; puis u_n en fonction de u_{n-2}.

3. Calculer, pour $n\geq 2$, u_n en fonction de a.

4. Étudier, suivant les valeurs de a, la convergence de cette suite et calculer sa limite lorsqu'elle converge.

Exercice 4

On considère la figure (F) formée d'un rectangle ABCD et de quatre demi-disques extérieurs à ce rectangle et de diamètres respectifs AB, BC, CD et DA. On suppose que le rectangle a pour périmètre 200 cm. On appelle x la mesure, en cm, du côté AB.



1. Préciser entre quelles valeurs doit se trouver x pour que cette figure soit réalisable.

2. Déterminer l'aire de cette figure, notée $S(x)$.

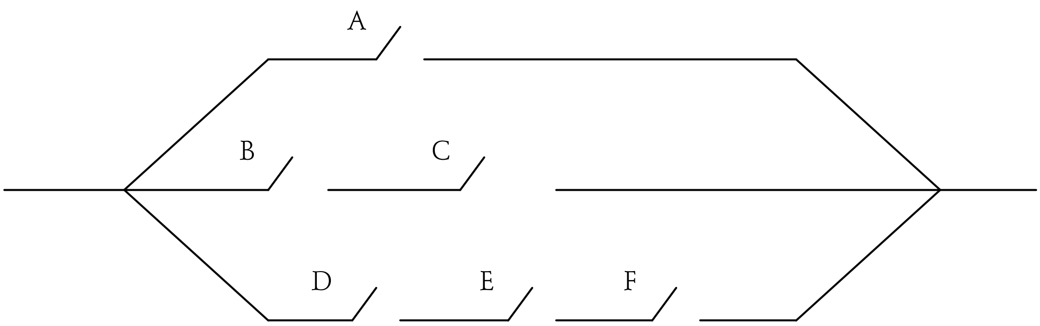
3. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Quelle est alors la valeur de cette aire et la nature du rectangle ?

Exercice 5

On considère le circuit électrique ci-dessous :

Les probabilités pour que les interrupteurs A, B, C, D, E et F soient ouverts sont respectivement $\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}$.

Quelle est la probabilité pour que le courant passe ? (On suppose les événements indépendants.)



3. Concours EPF 2002

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$; on donne les points $A(1\,;\,-1)$ et $B(5\,;\,3)$.

On considère la suite de points (G_n) définie par :

G_0 est en O et, pour tout $n \geq 1$, G_n est le barycentre du système $\{(G_{n-1}\,;2),(A\,;1),(B\,;1)\}$. On note $(x_n\,;y_n)$ les coordonnées de G_n.

1. Calculer les coordonnées des points G_1, G_2 et G_3.

Placer les points (unités : 2 cm sur chaque axe) et montrer qu'ils sont alignés.

2. Prouver que, pour tout n entier, G_{n+1} est l'image de G_n par une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}$.

4. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n non nul, $x_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^n}$.

b. En déduire une expression simple de x_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (x_n).

Exercice 2

1. On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Calculer $g(1)$. En déduire les racines de l'équation $g(x) = 0$ et le signe de g.

2. Soit f la fonction numérique définie, pour $x > 1$, par $f(x) = \ln\left(2x^3 - 3x^2 - 1\right)$.

a. Etudier la fonction f.

b. Résoudre l'équation $f(x)=0$.

c. Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

3. Soit F la fonction numérique définie, pour $x > 1$, par

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2(x-1)\ln(x-1) - 3x + x\ln 2\,.$$

a. Calculer la dérivée de la fonction F.

b. Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = 2$.

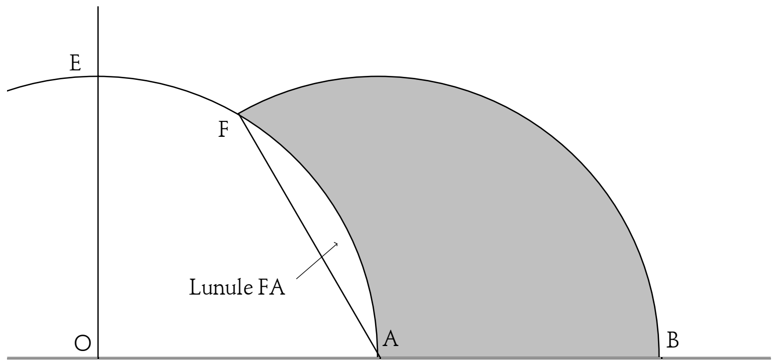
Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, on a tracé EA, quart de cercle de centre O et de rayon r ; on a ensuite tracé le demi-cercle de diamètre[OB] avec OB= $2r$.

On appelle F le point d'intersection du quart de cercle et du demi-cercle.

1. Calculer l'aire de la lunule FA (voir la figure).

2. Calculer l'aire de la partie grisée.



Exercice 4

Une urne contient n boules ; deux sont blanches, les autres sont noires. Elles sont, à part cela, identiques et on suppose que les tirages sont tels que chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

On vide l'urne en tirant les n boules, une à une, sans les remettre. On désigne par X la variable aléatoire égale au rang de la première boule blanche tirée.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2. Calculer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X pour la loi obtenue ; que représente ce résultat ?

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5

On définit une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $z_0 = 2$ et, pour $n \geq 1$, $z_n = \frac{1+i}{2} z_{n-1}$.

Dans le plan complexe, on note M_n le point d'affixe z_n et M'_n le point d'affixe iz_n.

1. a. construire les points $M_0, M'_0, M_1, M'_1, M_2, M'_2, M_3, M'_3, M_4$.

b. Donner les vaeurs de z_1, z_2, z_3, z_4 ainsi que celles de leurs modules et de leurs arguments.

2. Calculer z_n, son module et un de ses arguments en fonction de n.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $k \geq 1$, on a : $M_{k-1}M_k = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{k-1}|$.

En déduire la longueur L_n de la ligne polygonale $M_0M_1....M_n$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} L_n$.

4. Concours EPF 2003

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

Dans cet exercice, on note $I = \left]1\,;+\infty\right[$. On considère la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

1. Dresser le tableau de variations de *f*. On précisera les limites aux bornes de son ensemble de définition.

2. On désigne par (C) sa courbe réprésentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O ; unité 2 cm. Construire la courbe (C) et préciser ses asymptotes.

3. a. Calculer la dérivée de la fonction numérique définie sur I par : $g(x) = \ln(\ln x)$.

b. Calculer en cm^2 l'aire S de la partie du plan formée par l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par : $e \le x \le e^2$; $0 \le y \le f(x)$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On note Γ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de Γ d'affixe R.

Etant donné un entier $n \ge 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

On considère la suite des points $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de Γ définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$. On note z_k l'affixe de M_k .

1. a. Pour tout k de $\mathbb{N}$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k .

b. Montrer que $z_k = Re^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour tout k de $\mathbb{N}$.

c. Comparer M_n et M_0 .

d. Faire la figure lorsque $n = 8$ (on prendra $R = 4$ cm).

2. a. Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $M_k M_{k+1} = 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

b. On note $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_{n-1}M_n$. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$.

Partie A

1. Démontrer que cette suite est majorée par 3.

2. Démontrer que cette suite est monotone.

3. Démontrer que cette suite est convergente. Calculer sa limite.

Partie B

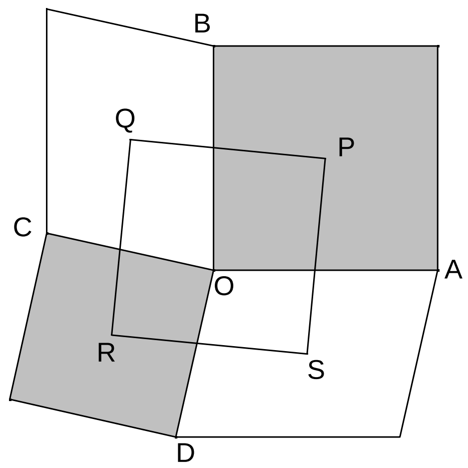
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = n(3 - u_n)$.

1. Démontrer que cette suite est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4

On considère la configuration obtenue à partir de deux carrés (en gris) ayant un sommet commun et de la construction de deux parallélogrammes (en blanc). Montrer que les centres des carrés et des parallélogrammes sont les sommets d'un carré. On prendra pour cela un repère d'origine O et on introduira les affixes des points A, B, C et D.



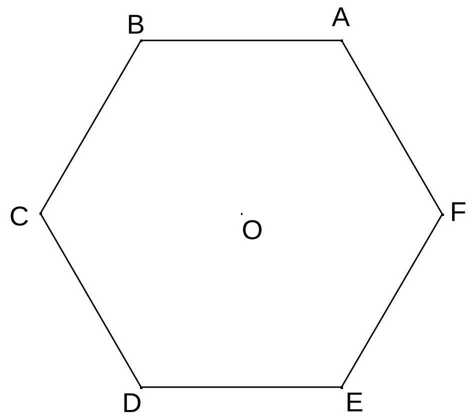
Exercice 5

ABCDEF est un hexagone régulier de centre O. on appelle H l'ensemble constitué des points O, A, B, C, D, E, F. On choisit au hasard 3 points distincts dans l'ensemble H. On donnera une justification des réponses aux questions suivantes :

a. Quelle est la probabilité que le triangle ainsi formé soit équilatéral ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle rectangle ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle isocèle non équilatéral ?



5. Concours EPF 2004

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

Partie A : Résolution de l'équation différentielle $y'+y=e^{-x}$ (1)

1. Résoudre l'équation différentielle $y'+y=0$ (2).

2. Soit a un réel et u la fonction définie par $u(x)=axe^{-x}$. Déterminer a pour que u soit solution de (1).

3. a. Montrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (2) si et seulement si la fonction $u - v$ est solution de (1).

b. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

4. Déterminer la solution de (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude de la fonction f définie par $f(x)=xe^{-x}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f ; on précisera les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2. Tracer la courbe (C) ; on précisera la tangente en O et l'asymptote.

3. Soit α un nombre réel strictement positif. Calculer en cm^2, l'aire $S(\alpha)$ de la partie du plan formée par l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ telles que l'on ait $0\le x\le\alpha$ et $0\le y\le f(x)$.

4. Déterminer la limite de $S(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Quatre campeurs A, B, C et D tirent à la courte-paille pour savoir lequel d'entre eux fera la vaisselle.

Le campeur A présente aux trois autres quatre allumettes dont l'une a déjà servi. Ils tirent à tour de rôle et celui qui tire l'allumette qui a déjà servi fera la vaisselle (A prend la dernière allumette).

Ils procèdent au tirage. Le campeur B proteste : il prétend que c'est parce qu'il a tiré après C et D qu'il a l'allumette qui a déjà servi.

On désigne par E l'événement « Le premier tire l'allumette qui a déjà servi » ;

F l'événement « Le deuxième tire l'allumette qui a déjà servi » ;

G l'événement « Le troisième tire l'allumette qui a déjà servi ».

Calculer les probabilités des événements E, F, G (on pourra s'aider d'un arbre de probabilités).

Commenter la réaction du campeur B.

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel strictement positif, par $u_1=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n}$.

1. Donner les valeurs exactes des cinq premiers termes de la suite.

2. Quelle est la valeur exacte du 2004$^{\text{ème}}$ terme de la suite ?

Exercice 4

On considère un cercle de centre O et trois points A, B et C de ce cercle. On désigne par A', B' et C' les images de A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soient U, V, W les milieux respectifs des segments [A'B], [B'C] et [C'A]. Démontrer que U, V, W sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 5

On considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormal d'origine O.

1. Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que $|z|=|z-1|$.

2. A tout nombre complexe non nul z, on associe le nombre complexe z' défini par $z'=\frac{1}{z}$. On définit ainsi une transformation T de $\mathrm{P}-\{\mathrm{O}\}$ dans lui-même.

a. Déterminer l'image de Δ par la transformation T. On la note Γ.

b. Déterminer l'image de Γ par T.

c. Déterminer les affixes des points d'intersection de Δ et Γ.

3. Faire une figure.

6. Concours EPF 2005

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct. A tout nombre complexe z différent de i, on associe le nombre complexe Z défini par $Z = \frac{z+1}{z-i}$.

On pose $z = x + iy$ où x et y désignent les parties réelle et imaginaire de z.

1. Calculer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

2. Déterminer l'ensemble E_1 des points du plan complexe tels que Z soit réel.

3. Déterminer l'ensemble E_2 des points du plan complexe tels que Z soit imaginaire pur.

4. Soit A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe i. Déterminer l'ensemble E_3 des points du plan tels que $\arg Z$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

5. Tracer les ensembles E_1, E_2 et E_3.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$. Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Montrer que la courbe C admet deux asymptotes dont l'une est la droite d'équation $y = 2x$.

4. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

5. Dresser le tableau de variation de f.

6. Construire la courbe C, en précisant la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 3

Un dictionnaire comporte n pages.

1. Dans ce dictionnaire on choisit une page.

La moyenne des numéros de toutes les pages restantes est 1 000,743.

a. Si on choisit la page 1, exprimer la moyenne M_1 des numéros des pages restantes en fonction de n.

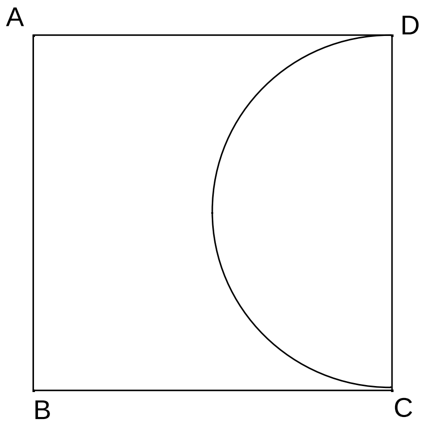
b. Si on choisit la page n, exprimer la moyenne M_n des numéros des pages restantes en fonction de n.

c. Déterminer alors les valeurs possibles pour n.

2. On choisit la page numérotée i. Calculer la moyenne M_i des numéros des pages restantes. En déduire le numéro de la page choisie et le nombre de pages de ce dictionnaire.

Exercice 4

On désigne par ABCD un carré de côté a, par Γ le demi-cercle de diamètre [CD] intérieur à ce carré et par O le milieu du segment (CD].



Soit M le point de contact de la tangente, autre que la droite (AD), menée de A à Γ et N le point où cette tangente coupe la droite (BC).

1. Démontrer que les droites (OA) et (ON) sont les bissectrices respectives des angles de sommet O des triangles DOM et COM.

En déduire la nature du triangle AON.

2. Calculer les distances AM, AO, AN, MN et NC en fonction de a.

3. La droite(OM) coupe la droite (BC) en un point E. On pose BE = b.

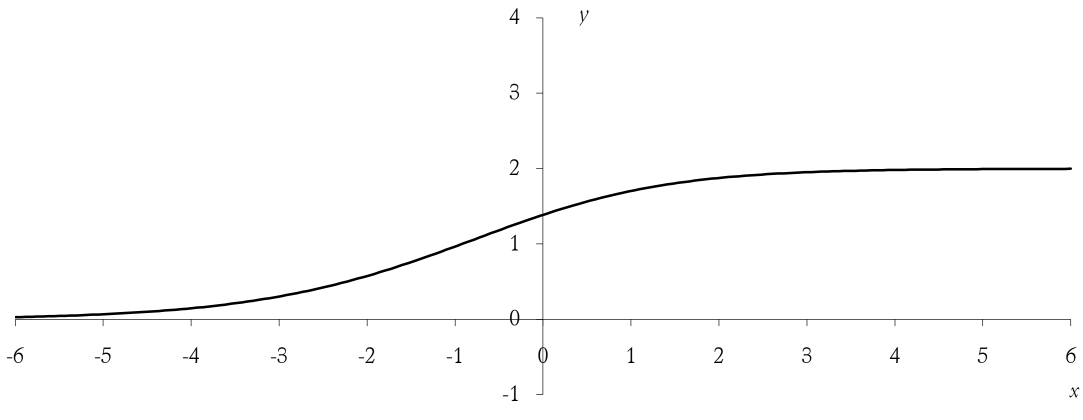
a. Démontrer que l'on a EM = b.

b. En calculant de deux façons différentes l'aire du triangle AEN, déterminer EN en fonction de b.

c. Déduire des questions précédentes une relation entre a et b, puis b en fonction de a.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)$. Le graphique ci-dessous, obtenu à l'aide d'un ordinateur, donne la courbe représentative Γ de f dans un repère orthonormal.



D'après le graphique on peut émettre trois conjectures :

(A) : « La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ».

(B) : « La courbe Γ admet deux asymptotes d'équations respectives $y = 0$ et $y = 2$ ».

(C) : « La courbe Γ admet un centre de symétrie ».

On suppose que l'on a démontré les conjectures (A) et (B) et on s'intéresse à la conjecture (C).

1. Si le centre de symétrie de Γ existe, quelle est son ordonnée ? On justifiera la réponse.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α. Un tableur permet d'obtenir le tableau suivant :

x	$f(x)$
$-0,922$	0,9998
$-0,921$	1,0002

Donner, en le justifiant, un encadrement de α. Que peut-on en déduire pour le centre de symétrie s'il existe ?

3. Montrer que le point S, de coordonnées $(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de la courbe Γ si et seulement si pour tout réel x, on a $f(a+x)+f(a-x)=2b$.

4. Calculer $f(0)$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)+2\ln 2$. Un tableur permet d'obtenir le tableau suivant :

x	$g(x)$
$-1,844$	2,0161
$-1,843$	2,0165
$-1,842$	2,0168

Montrer que $f(2\alpha)+f(0)\neq 2$.

Que peut-on en déduire pour l'existence d'un centre de symétrie pour Γ ?

7. Concours EPF 2006

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. Montrer que *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction dérivée *f'* de *f*.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm.

a. Exprimer *g* en fonction de *f* et préciser l'ensemble de définition de *g*.

b. Déterminer la fonction dérivée *g'* de *g* (on pourra utiliser la question 1.).

c. Etudier le signe de *g'*.

d. Déterminer les limites de *g* en 0 et $+\infty$.

e. Dresser le tableau des variations de *g*.

f. Construire la courbe Γ en précisant la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 2

Soient ABC un triangle quelconque et Δ une droite passant par A. On désigne par B' et C' les projections orthogonales respectives de B et C sur Δ. On appelle P la projection orthogonale de B' sur la droite (AC) et Q celle de C' sur la droite (AB).

Les droites (B'P) et (C'Q) se coupent en M. Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.

1. Faire une figure.

2. Justifier les égalités suivantes : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}$.

3. Démontrer de même l'égalité : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'}$.

4. Conclure.

Exercice 3

Soient *p* et *q* deux nombres réels variables dont la somme $p+q$ est égale à un nombre réel *a* constant. On considère le plan complexe et on désigne par P le point d'affixe *p* et par Q le point d'affixe *iq*. Soient R et S les points tels que PQRS soit un carré de sens direct.

1. Déterminer, par la méthode de votre choix, les affixes respectives de R et de S en fonction de *p* et *q*. En déduire que le point R est fixe.

2. Déterminer l'ensemble des points S.

Exercice 4

Une urne contient 19 jetons numérotés de 1 à 19. On tire successivement et sans remise trois jetons.

Soit *k* un entier quelconque tel que $3 \le k < 17$. On considère les événements suivants :

A_k : « *k* est le plus petit numéro de jeton tiré ».

B_k : « *k* est le plus grand numéro de jeton tiré ».

1. Calculer $p(A_8)$ et $p(B_8)$.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de *k* a-t-on $p(A_k)=p(B_k)$?

Exercice 5

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Parmi les trois démonstrations suivantes lesquelles sont correctes ? Si une démonstration vous paraît incorrecte, vous justifierez votre réponse.

a. On suppose qu'il a été démontré dans une question précédente que le produit scalaire $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$ est nul.

On sait que si $(MN)\perp(PQ)$ alors $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=0$.

Donc, comme $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=0$, on en déduit $(MN)\perp(PQ)$.

b. On sait que dans un tube à vide une bille de plomb et une plume tombent à la même vitesse dans le champ de gravitation.

On considère un tube et on constate que, en lâchant simultanément dans ce tube une plume et une bille de plomb, la plume tombe plus lentement que la bille de plomb.

On en déduit que le tube n'est pas vide.

c. Dans une entreprise, on a calculé que le bénéfice procuré par la production de n milliers d'articles est égal à $\left(n^3-45n^2+600n+30\,000\right)$ euros.

La production maximale par jour est de 20 000 articles.

Pour trouver le bénéfice maximum pouvant être obtenu par jour, on remplace n par 20 dans l'expression $n^3-45n^2+600n+30\,000$.

2. Que pensez-vous du raisonnement suivant ? Soyez précis dans votre réponse.

« Deux points du plan sont toujours alignés. Supposons que pour un certain entier n, $n\geq 2$, n points du plan soient toujours alignés. Prenons alors $n+1$ points $A_1, A_2,\ldots,A_{n+1}$ de ce plan.

D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, A_2,\ldots, A_n$ sont alignés sur une droite Δ et de même les n points $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ sont alignés sur une droite Δ'.

Les droites Δ et Δ' sont confondues puisqu'elles ont en commun les points $A_2, A_3,\ldots, A_n$. Les $n+1$ points $A_1, A_2,\ldots,A_{n+1}$ sont donc alignés sur Δ.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n, $n\geq 2$, n points du plan sont toujours alignés, ce qui signifie que tous les points du plan sont alignés. »

8. Concours EPF 2007

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (obligatoire)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}$.

a. Calculer S_n et T_n en fonction de n.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

4. On admet que, pour tout $x \geq 0$, $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$.

5. a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. On admet que la suite (u_n) est convergente et on désigne par l sa limite.

Déduire des questions précédentes que $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$.

Exercice 2 (obligatoire)

On considère un plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

1. Déterminer l'ensemble (A) des points M d'affixe z tels que $z^2 = \bar{z}^2$. Tracer (A).

2. Soit (B) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^3 = \bar{z}^2$.

a. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|z^3\right| = \left|\bar{z}^2\right|$.

b. En déduire l'ensemble (B).

3. Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $z\bar{z}-(1+i)\bar{z}-(1-i)z = 0$. On pourra poser $Z = z-(1+i)$ et calculer le produit $Z\bar{Z}$.

Construire (C).

Exercice 3

On considère un trapèze $ABCD$ tel que les angles ABC et DCB aient la même mesure α.

Déterminer les valeurs de α pour que le trapèze $ABCD$ ait une aire maximale sachant que les côtés AB, BC et CD mesurent un mètre.

Exercice 4

Un entier A est dit somme de deux carrés lorsqu'il existe deux entiers naturels x et y tels que : $x^2 + y^2 = A$.

1. x et y étant deux entiers naturels, rappeler ce que représente le nombre x^2+y^2 pour le nombre complexe $x+iy$.

2. En déduire que si A et B sont des entiers qui sont sommes de deux carrés, alors le produit AB l'est aussi.

3. En observant 2^2+3^2 et 5^2+4^2, montrer que 533 est somme de deux carrés et en donner une décomposition en produit de facteurs.

4. Monter que 13^3 est somme de deux carrés et en donner deux décompositions.

Exercice 5

Sur une planète lointaine vivent des individus verts et des individus bleus. 85 % des individus bleus sont musiciens et 90 % des individus musiciens sont des individus bleus.

On choisit au hasard un individu et on note x la probabilité que cet individu soit bleu. On suppose $0<x<1$.

1. Les événements « l'individu est bleu » et « l'individu est musicien » sont-ils indépendants ?

2. Comparer la probabilité que l'individu soit musicien sachant qu'il est bleu et la probabilité que l'individu soit musicien sachant qu'il est vert.

3. Y a-t-il la même proportion de musiciens parmi les individus verts et les individus bleus ?

9. Concours EPF 2008

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (Obligatoire)

Soit f la fonction définie sur $\left]-1\,;+\infty\right]$ par $f(x)=x+1+\ln(x+1)-\ln(x+2)$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en –1 de la fonction f.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=0$. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

3. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

5. Donner une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

6. Tracer la droite T_0, la courbe C_f ainsi que les asymptotes.

Exercice 2 (Obligatoire)

On pose $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin(3x)\,dx$, et, pour tout entier naturel non nul n, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}x^n\sin(3x)\,dx$.

1. a. Calculer I_0.

b. En effectuant une intégration par parties, calculer I_1.

2. Sans calculer l'intégrale I_n :

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b. Pour tout entier naturel non nul n, comparer I_n à l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{6}}x^n\,dx$.

c. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Ne perdez pas de temps dans le choix des 2 exercices à prendre parmi les exercices n°3, 4 et 5

Exercice 3

Un couple a eu trois enfants. On sait que s'ils n'ont eu que des filles, la dernière s'appelle Dominique et que, sinon, le premier garçon s'appelle Dominique. Les trois enfants ont des prénoms différents.

On note G_1 l'événement « le premier enfant est un garçon », F_1 l'événement « le premier enfant est une fille » et, de même, on définit les événements G_2, F_2, G_3 et F_3.

On note également D_1 l'événement « le premier enfant s'appelle Dominique » et, de même, on définit D_2 et D_3.

On suppose que les événements G_1, G_2 et G_3 sont indépendants, et ont pour probabilité 1/2.

1. Parmi les événements définis ci-dessus, citer deux événements contraires, puis deux événements incompatibles mais non contraires.

2. Calculer les probabilités $p(D_1)$, $p(D_2)$ et $p(D_3)$.

3. Quelle est la probabilité que Dominique soit un garçon ?

4. On rencontre l'un des enfants au hasard. C'est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il s'appelle Dominique ?

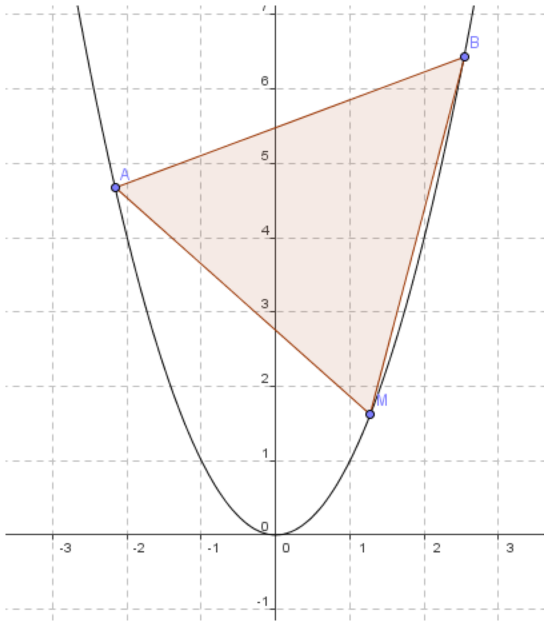
Exercice 4

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé.

Soit A et B deux points distincts de (P) d'abscisses respectives a et b. On suppose que $a < b$.

1. Pour tout point M de (P) d'abscisse x (on suppose $a < x < b$), calculer la distance du point M à la droite (AB).

2. En déduire qu'il existe un point M_0 de la parabole (P) d'abscisse comprise entre a et b et tel que l'aire du triangle M_0AB soit maximale. Déterminer son abscisse.



Exercice 5

On cherche des nombres complexes a, b et c qui vérifient les relations :

(R) : $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a + b + c = 0$.

1. Montrer que *si* a, b et c vérifient les relations (R), alors a, b et c sont non nuls.

2. On pose $b' = \dfrac{b}{a}$ et $c' = \dfrac{c}{a}$.

a. Traduire les relations (R) en utilisant les formes trigonométriques des nombres b' et c'.

b. Montrer qu'alors $\mathrm{Re}(b') = \mathrm{Re}(c') = -\dfrac{1}{2}$.

c. En déduire les nombres complexes b' et c' tels que a, b et c vérifient les relations (R).

3. Montrer qu'il existe une infinité de triplets (a, b, c) de nombres complexes vérifiant les relations (R).

10. Concours EPF 2009

Quatre exercices à choisir sur les cinq proposés :

- les numéros 1 et 2 sont obligatoires,

- il suffit de choisir deux autres exercices parmi les numéros 3, 4 et 5.

Les quatre exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (Obligatoire)

Soit k un réel strictement positif et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k\left(x\right)=e^{-kx^2}$.

1. Etudier la parité de la fonction f_k.

2. Étudier les variations de la fonction f_k et dresser son tableau de variation.

3. Déterminer la dérivée seconde f_k'' et résoudre l'équation $f_k''\left(x\right)=0$.

4. Démontrer que, quels que soient les réels strictement positifs h et k, on a :

$$f_k \le f_h \text{ si, et seulement si, } h \le k.$$

5. On prend $k=\dfrac{1}{2}$. On désigne par α la solution positive de l'équation $f_{\frac{1}{2}}''\left(x\right)=0$.

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de $f_{\frac{1}{2}}$ au point d'abscisse α.

Exercice 2 (Obligatoire)

1. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe : $4\sqrt{2}\left(-1+i\right)$.

2. Trois nombres complexes ont pour produit $4\sqrt{2}\left(-1+i\right)$. Leurs modules sont en progression géométrique de raison 2 et leurs arguments sont en progression arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{4}$.

On note z_1, z_2 et z_3 ces trois nombres où la numérotation respecte l'ordre des modules.

Sachant que z_1 a un argument compris entre $\dfrac{\pi}{2}$ et π, déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

3. Construire les images M_1, M_2 et M_3 des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

Exercice 3

Dans chacune des questions suivantes, on demande de donner **sans justification** un exemple de fonction f définie sur l'intervalle donné et possédant la propriété demandée.

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, le nombre dérivé de f en 0 est nul, mais f n'admet pas d'extremum en 0.

2. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle admet un maximum et un minimum sur l'intervalle [1 ; 2], mais pour tout x de [1 ; 2], on a $f'\left(x\right)\neq 0$.

3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et n'a pas de limite en $+\infty$.

4. La fonction f est définie et continue sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et n'a pas de limite en 0.

Exercice 4

Un fumeur souhaite réduire sa consommation. Suite à de premières observations, on constate que :

• s'il reste un jour sans fumer, il a 40 % de chances de fumer le lendemain ;

• s'il cède et fume un jour, il a 20 % de chances de fumer le lendemain.

On désigne par p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

2. Pour tout entier n, on pose $q_n = p_n - \frac{1}{3}$. Quelle est la nature de la suite (q_n) ?

3. Déterminer la limite de p_n. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on désigne par Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien. Soient A et B les points de Γ d'abscisses respectives 2 et 8.

À tout réel m de l'intervalle [2 ; 8], on associe le point M d'abscisse m et on note T_m la tangente à Γ au point M.

1. Construire une figure à main levée.

2. Expliquer pourquoi déterminer m tel que l'aire du triangle AMB soit maximale revient à déterminer m tel que la distance de M à la droite (AB) soit maximale.

3. Déterminer m tel que l'aire du triangle AMB soit maximale.