Combinatoire-Dénombrement

$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\,A + \mathrm{Card}\,B - \mathrm{Card}(A \cap B)$ $\qquad$ $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}\,A\ \mathrm{Card}\,B$

Soit E un ensemble de n éléments :

Nombre d'arrangements de p éléments de E : $A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$.

Nombre de permutations de E : $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$; $\quad 0! = 1$.

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$C_n^p = C_n^{n-p}$; $\quad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

Probabilités

Si A et B sont incompatibles :

$P(A \cap B) = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas général :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A_1 ,…, A_n forment une partition de A, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}\,A}{\mathrm{Card}\,\Omega}$.

Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé : $P(A|B)$ et $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

Formule des probabilités totales : Si les événements B_1 , B_2 , …, B_n forment une partition de Ω alors

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$

Variable aléatoire : somme des valeurs de la loi de probabilité = 1

Espérance mathématique : $E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \le x)$

Variance : $V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(x)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(x)\right)^2$

Ecart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Bernoulli : X= nombre de réalisations de A sur n épreuves, $P(A) = p$, alors : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Probabilités continues

x suit une <u>loi uniforme</u> sur un intervalle de longueur L : $P(x \le \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)dt = \int_0^{\alpha} \frac{1}{L} dt = \frac{\alpha}{L}$, la densité de probabilité est f.

Probabilité que x soit entre α et β : $P(\alpha < x \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{L} dt = \frac{\beta - \alpha}{L}$.

Moyenne : $\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} t.\frac{1}{L} dt = \int_0^L t.\frac{1}{L} dt = \left[\frac{1}{2L} t^2\right]_0^L = \frac{L}{2}$.

x suit une loi exponentielle de paramètre λ :

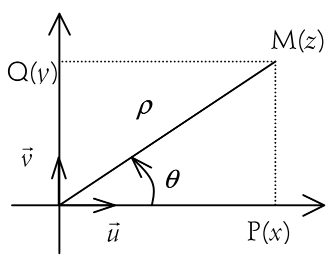
$$P(0 \le x \le t) = \int_0^t f(u)du = \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} du = \left[\frac{\lambda}{-\lambda} e^{-\lambda u} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = F(t) .$$

Moyenne : $\bar{x} = \int_0^{+\infty} \lambda u e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda}$ en faisant une intégration par parties ;

cette moyenne représente la *durée de vie moyenne* et peut être déterminée expérimentalement.

Algèbre : *Nombres complexes*

Forme : algébrique $z = x + iy$ trigonométrique $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overline{\mathrm{OM}} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\mathrm{OM} = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{\mathrm{OP}} = x = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{\mathrm{OP}} = y = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}[\pi]$

Formules d'Euler

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Opérations algébriques $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$z \cdot z' = (x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$ $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$; $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$z \cdot z' = \left(\rho e^{i\theta}\right) \cdot \left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$ $|zz'| = |z| \cdot |z'|$; $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Angle de deux vecteurs : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right)$ Distance de deux points : $AB = |b - a|$

Similitude directe : $S(\Omega(\omega), k, \theta) : z \to z' / z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$; avec θ=0 : homothétie, avec k=1 : rotation

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$ *Inégalité triangulaire* : $\big||z| - |z'|\big| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ *Produit scalaire* : $p = z.\bar{z}' + \bar{z}.z'$

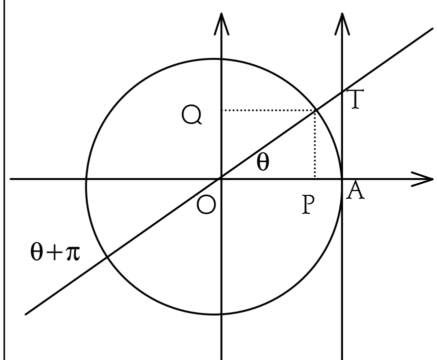
Algèbre : *Identités remarquables (valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$.)*

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ $\quad$ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$ $\quad$ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Binôme de Newton : $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$

Algèbre : *Trigonométrie*



$\overline{OP} = \cos\theta \quad \overline{OQ} = \sin\theta$

$\overline{AT} = \tan\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin(ax)$, cos de période $2\pi/a$

$\tan(ax)$ de période π/a

Angles associés :

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

Equations :

$\sin x = \sin a$: $x = a[2\pi]$ ou $\pi - a[2\pi]$

$\cos x = \cos b$: $x = b[2\pi]$ ou $-b[2\pi]$

$\tan x = \tan c$: $x = c[\pi]$

Formules d'addition : $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$. $\quad$ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ $\quad$ $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\quad$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\quad$ $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$ $\quad$ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

si $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$: $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Formules de transformation

$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ $\quad$ $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

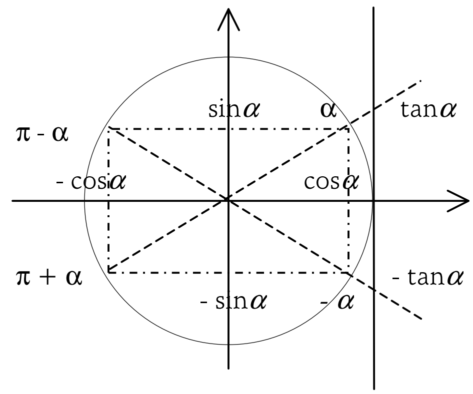
$\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ $\quad$ $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ou $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Racines n[ièmes] de l'unité : $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k = 0,1,2,\ldots,n-1$; $|u_k| = 1$

Les solutions de $z^n = a$, où $a = \rho e^{i\alpha}$, sont $z_k = z_0 u_k$, où $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$

Algèbre *: Equation du second degré*

a, b, c des réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation P= $az^2 + bz + c = 0$ admet :

si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

P du signe de a à l'extérieur des racines, $-a$ à l'intérieur.

si $\Delta = 0$,une solution réelle double : $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

P du signe de a

si $\Delta < 0$, 2 solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

P dans $\mathbb{R}$ du signe de a

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ S = $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$; P = $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Analyse *: Généralités sur les fonctions*

$f(-x)=f(x)$: f est paire, symétrie par rapport à Ox

$f(-x)=f(-x)$: f est impaire, symétrie par rapport à O

changement de repère au point $\omega(a,b)$ *:* $\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \end{cases}$

nombre dérivé en x_0*:* $\lim\limits_{x0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. *Ttangente en* x_0 *:* $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

si $f''(x_0) \geq 0$*, la courbe est au dessus de sa tangente en* x_0 *; si* $f''(x_0) \leq 0$*, la courbe est en dessous de sa tangente.*

inégalité des accroissements finis : sur $[a,b]$, si $m \le f'(x) \le M$ alors $\forall x, y \in [a,b], m \le \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le M$

f et g ont des courbes asymptotes ssi $\lim\limits_{\infty}(f(x)-g(x))=0$; leur position dépend du signe de $f(x)-g(x)$

Analyse *: Suites arithmétiques, suites géométriques (formules valables sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)*

Suites arithmétiques : 1° *terme* u_0 ; $u_{n+1}=u_n+a$; $u_n=u_0+na$ ou $u_n=u_1+(n-1)a$; *diverge.*

$S_n=\dfrac{\text{(nbre de termes)(1°terme+dernier terme)}}{2}$ $\qquad 1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{n}$; $1^2+2^2+\ldots n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Suites géométriques : 1° *terme* u_0 ; $u_{n+1}=bu_n$; $u_n=u_0b^n$ ou $u_n=u_1b^{n-1}$; *converge vers* 0 *si* $|b|<1$

Si $b\neq 1$, $S_n=1+b+b^2+\ldots+b^n=\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$ tend vers $\dfrac{1}{1-b}$ si $|b|<1$; si $b=1$, $S_n=n+1$

Analyse *: Propriétés des fonctions usuelles ; fonctions logarithmiques et exponentielle*

$\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$ ($x>0$)	$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ $\qquad a^x=e^{x\ln a}$ ($a>0$) Si $x\in\,]-\infty,+\infty[$ et $y\in\,]0,+\infty[$, $y=\exp x=e^x$ équivaut à $x=\ln y$	
$\ln ab=\ln a+\ln b$ $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$	$\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$; $\ln a^x=x\ln a$ $e^0=1$; $\ln 1=0$; $\ln e=1$	$e^{a+b}=e^a e^b$; $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^b=e^{ab}$ $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ ($x>0$) ; $x^0=1$
Fonctions puissances Si $n\in\mathbb{N}^*$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ $y=\sqrt[n]{x}$ équivaut a $x=y^n$	$x^{\alpha+\beta}=x^\alpha x^\beta$; $x^{\alpha-\beta}=\frac{x^\alpha}{x^\beta}$; $(x^\alpha)^\beta=x^{\alpha\beta}$	

Analyse *: Limites usuelles de fonctions et de suites*

Comportement à l'infini	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ Si $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$; si $\alpha<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0$;
Comportement à l'origine	$\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=0^-$; $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ $\alpha>0$: $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha=0$; $\alpha<0$: $\lim\limits_{x\to 0}x^\alpha=+\infty$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$; $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$; $\begin{cases}(1+h)^\alpha=1+\alpha h+h\varepsilon(h) & (\alpha\neq 0)\\ \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0\end{cases}$
Croissances comparées à l' ∞	$\alpha>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$

$\alpha > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$	$a > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n} = +\infty$	$\alpha > 0$ et $a > 1$:
$\alpha < 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$	$0 < a < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^{\alpha}} = +\infty$

Analyse : *Dérivées et primitives*

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
k	0	kx	$u+v$	$u'+v'$	$\int u + \int v$
x^n, $n \in \mathbb{Q}^*$	nx^{n-1}	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	ku	ku'	$k\int u$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert$	$u.v$	$u'.v+u.v'$	
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	
x^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$		u^n, $n \in \mathbb{Q}^*$	$nu'u^{n-1}$	$\int u'u^n = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
e^{rx} $r = \alpha + i\beta$	$r\,e^{rx}$	$\dfrac{1}{\alpha+i\beta}e^{rx}$	$u \circ v$	$v'.(u' \circ v)$	
e^u	$u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$	$u^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}^*$ $(= e^{\alpha \ln u})$	$\alpha.u'u^{\alpha-1}$	
$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	$\int \ln(x+a) =$ $(x+a)\ln x - x$	$\cos u$	$-u'\sin u$	$\int u'\cos u = \sin u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u)$	$\int \tan u = \ln\lvert\cos u\rvert$	$\sin u$	$u'\cos u$	$\int u'\sin u = -\cos u$

Analyse : *Calcul intégral*

Formules fondamentales :	Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$
	Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$ et $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$
Formules de Chasles	$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ $\qquad$ $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$
Linéarité	$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$
Positivité	Si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$
Intégration d'une inégalité	Si $a \le b$ et $f \le g$, alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$
	Si $a \le b$ et $m \le f \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur [a, b] : $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Intégration par parties $\int_a^b uv'dt = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdt$