

# Concours général 2004 : corrigé

## Partie I

1) a) Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $O_2$  sur  $AD$ .

En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle  $ADO_3$  :  $\frac{O_2H}{O_3D} = \frac{AO_2}{AO_3}$ , donc  $O_2H = \frac{3R}{5}$ .

Comme  $O_2H < R$ , la droite  $(AD)$  coupe bien le cercle en deux points  $B$  et  $C$ . De plus, ces points vérifient d'après le théorème de Pythagore :  $HB = HC = \sqrt{R^2 - O_2H^2} = \frac{4R}{5}$  et  $BC = \frac{8R}{5}$ .

b) Si  $(A_1B)$  et  $(A_2C)$  étaient parallèles, on pourrait utiliser le théorème de Thalès dans le triangle  $AA_2C$  et on aurait :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AA_1}{AA_2} = \frac{1}{2},$$

ce qui est impossible car  $AB > 2R$  et  $BC < 2R$ . Donc  $A_1B$  et  $A_2C$  sont sécantes en un point  $P$ .

Comme  $[A_1, A_2]$  est un diamètre,  $A_1BA_2$  est rectangle en  $B$ , donc  $(A_2B)$  est une hauteur de  $PA_1A_2$ . De même,  $(A_1C)$  est une hauteur de ce triangle, donc les droites  $(A_1C)$  et  $(A_2B)$  sont sécantes en  $Q$  orthocentre du triangle  $PA_1A_2$ . On en déduit que la droite  $(PQ)$  est la hauteur issue de  $P$  et  $(PQ)$  est orthogonale à  $\Delta$ .

2) a) Comme précédemment, d'après le théorème de Thalès, en notant  $H$  le projeté orthogonal de  $O_k$  sur  $AD$  :

$$\frac{O_kH}{O_nD} = \frac{AO_k}{AO_n} = \frac{2k-1}{2n-1} \text{ donc } O_kH = \frac{2k-1}{2n-1}r.$$

D'après le théorème de Pythagore :  $HB_k = HC_k = \sqrt{r^2 - \frac{(2k-1)^2}{(2n-1)^2}r^2}$ , donc  $B_kC_k = 4\frac{\sqrt{n^2 - n - k^2 + k}}{2n-1}r$  et

$$L(n, k) = \frac{4}{2n-1}\sqrt{n(n-1) - k(k-1)}.$$

b) Soit  $m$  un nombre entier, alors  $\sqrt{m}$  est un entier ou est un nombre irrationnel. En effet :

→ Si la factorisation de  $m$  en produit de nombres premiers est de la forme  $m = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_\ell^{2\alpha_\ell}$ , le nombre  $\sqrt{m}$  est entier.

→ Sinon, la factorisation de  $m$  contient au moins un nombre premier à une puissance impaire, disons  $m = p_1^{2\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \cdots$

Si on avait  $\sqrt{m} = \frac{a}{b}$  avec  $a$  et  $b$  entiers premiers entre eux, on aurait  $a^2 = b^2 p_1^{2\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \cdots$

Ainsi le nombre premier  $p_1$  apparaîtrait dans la factorisation de  $a$ , et apparaîtrait à une puissance paire dans la factorisation de  $a^2$ . Par conséquent  $b^2$  serait divisible par  $p_1$  et  $b$  aussi, ce qui est contradictoire avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux.

Donc  $L(n, k)$  est rationnel si et seulement si  $n(n-1) - k(k-1)$  est le carré d'un entier et comme  $n(n-1) - k(k-1)$  est pair, ce ne peut être que le carré d'un nombre entier pair. D'où la condition  $\mathcal{C}_1$ .

## Partie II

1) En coupant par  $x = \lambda$ , on trouve l'équation  $z^2 + y(y-1) = \mu$ , où  $\mu = \lambda(\lambda-1)$ . On remarque que  $\mu = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ . L'équation trouvée est équivalente à  $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \mu + \frac{1}{4}$ .

Comme  $\mu + \frac{1}{4} \geq 0$ , il s'agit du cercle, éventuellement réduit à un point pour  $\lambda = \frac{1}{2}$  de centre  $\left(\lambda, \frac{1}{2}, 0\right)$  de rayon  $\sqrt{\mu + \frac{1}{4}} = \left|\lambda - \frac{1}{2}\right|$  et contenu dans le plan  $P_\lambda$ .

2) Soit  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ . Son symétrique orthogonal par rapport à  $(d)$  est le point  $M'$  de coordonnées  $(1-x, 1-y, -z)$ . Vu l'équation donnée pour  $\Sigma$ ,  $M$  appartient à  $\Sigma$  si et seulement si  $M'$  y appartient :  $(d)$  est axe de symétrie de  $\Sigma$ .

Chercher l'intersection du plan  $P$  d'équation  $y = \frac{1}{2}$  et de  $\Sigma$  conduit donc à l'équation :  $z^2 = x(x-1) + \frac{1}{4}$ , qui est équivalente à  $z^2 = (x - \frac{1}{2})^2$  soit à  $(z - x + \frac{1}{2})(z + x - \frac{1}{2}) = 0$ . Il s'agit de la réunion de deux droites, passant par  $I$ , symétriques par rapport au plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et perpendiculaires.

3) Finalement  $\Sigma$  est un cône de révolution, d'axe la droite d'équation  $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$ , de sommet  $I$  et de demi-angle d'ouverture  $\frac{\pi}{4}$ .

4) Application directe de la conclusion de **I. 2. b)**.

### Partie III

1) a)  $f$  est dérivable comme primitive d'une fonction continue, de dérivée  $f'(x) = \sqrt{1-x^2}$ , et sin est dérivable, donc la composée  $F$  est dérivable et, sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$F'(x) = \cos x \times f'(\sin x) = \cos x \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos^2 x.$$

b)  $F(0) = 0$  donc  $F(x) = \int_0^x \cos^2 t dt$ . c) On fait le changement de variable  $u = \frac{\pi}{2} - t$  :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t (-dt) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$$

La somme des intégrales est  $\int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$  donc  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$ . d) Ainsi  $\frac{\pi}{4} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$$f(1) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Or, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, cette intégrale est l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$  et les verticales d'abscisses 0 et 1, il s'agit donc de l'aire du quart de disque de centre  $O$  et de rayon 1.

2) a) Il suffit de reprendre la formule de **I. 2. a)** :

$$\lambda_n = \frac{1}{AD} \sum_{k=1}^{n-1} B_k C_k = \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2 - 1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{2n-1} \sqrt{n(n-1) - k(k-1)} = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k(k-1)}{n(n-1)}}$$

(on pourrait convenir de sommer jusqu'à  $n$ , en posant  $A_n = B_n = D$ ).

b) D'une part :  $\frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1} = \frac{k-1}{n} \times \frac{k}{n-1} \geq \frac{k-1}{n} \times \frac{k-1}{n}$ .

D'autre part :  $-n \leq -k$  donc  $(k-1)n \leq k(n-1)$  et  $\frac{k-1}{n-1} \leq \frac{k}{n}$  d'où  $\frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1} \leq \left(\frac{k}{n}\right)^2$ .

Ainsi, pour  $n \geq 2$  et  $1 \leq k \leq n$  :  $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \leq \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1} \leq \left(\frac{k}{n}\right)^2$

c) La fonction  $t \mapsto 1-t^2$  est positive et décroissante sur  $[0, 1]$ , il en est donc de même de la fonction  $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ . Ainsi pour  $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ , avec  $1 \leq k \leq n-1$  :

$\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq \sqrt{1-t^2} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2}$  et, par conservation des inégalités par intégration :

$$\frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq I_{n,k} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2}$$

Vu le **2. b)**, pour  $n \geq 3$  et  $2 \leq k \leq n-1$ , on a :

$$nI_{n,k+1} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq \sqrt{1 - \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1}} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2} \leq nI_{n,k-1}.$$

3) En sommant les encadrements précédents, il vient, pour  $n \geq 3$  :

$$\frac{2n}{2n-1} \sum_{k=2}^{n-1} I_{n,k+1} \leq \lambda_n - \frac{2}{2n-1} \leq \frac{2n}{2n-1} \sum_{k=2}^{n-1} I_{n,k-1},$$

soit :

$$\frac{2n}{2n-1} \int_{2/n}^1 \sqrt{1-t^2} dt \leq \lambda_n - \frac{2}{2n-1} \leq \frac{2n}{2n-1} \int_0^{(n-2)/n} \sqrt{1-t^2} dt.$$

Comme  $0 \leq \int_0^{2/n} \sqrt{1-t^2} dt \leq \frac{2}{n}$  et  $0 \leq \int_{(n-2)/n}^1 \sqrt{1-t^2} dt \leq \frac{2}{n}$ , les deux intégrales écrites ci-dessus ont pour limite  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, d'où l'on déduit :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \frac{\pi}{4}$ .

## Partie IV

1)  $\mathcal{C}_1$  est équivalente à  $(2n-1)^2 - (2k-1)^2 = 16a^2$  i.e. à  $p^2 - q^2 = 16a^2$ .

$p$  et  $q$  doivent être impairs par construction et  $k \leq n-1$  donne  $q < p$ . 2) Si  $u$  et  $v$  sont de parités différentes,  $u^2$  et  $v^2$  également, donc  $p$  et  $q$  sont impairs.

De plus  $p^2 - q^2 = 4u^2v^2 = 16a^2$ , car on peut mettre 4 en facteur dans le carré pair.

Posons  $\alpha = \frac{p+q}{2}$  et  $\beta = \frac{p-q}{2}$ , qui sont bien des entiers car  $p$  et  $q$  sont impairs. La condition  $\mathcal{C}_2$  donne  $\alpha\beta = 4a^2$ .

Or comme  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, il existe des entiers  $r$  et  $s$  tels que  $rp + sq = 1$  soit  $1 = r(\alpha + \beta) + s(\alpha - \beta) = (r+s)\alpha + (r-s)\beta$  :  $\alpha$  et  $\beta$  sont également premiers entre eux.

Comme leur produit est un carré, chacun des deux doit être un carré ; il existe donc  $u, v$  tels que  $\alpha = u^2$  et  $\beta = v^2$ , soit  $p = u^2 + v^2$  et  $q = u^2 - v^2$ . Enfin,  $u$  et  $v$  doivent être de parités différentes pour que  $p$  et  $q$  soient impairs.

Par ailleurs :  $4a^2 = u^2v^2$ , d'où  $a = \frac{uv}{2}$ .

## Partie V

1) a) S'il existe  $u$  et  $v$  tels que  $n = u^2 + v^2$ , ceux-ci doivent être de parités différentes puisque  $n$  est impair. Supposons par exemple  $u = 2k, v = 2\ell + 1, k$  et  $\ell$  entiers.

Alors :  $n = 4k^2 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ . b)  $2 = 1^2 + 1^2$  et  $5 = 1^2 + 2^2$ .

2) a)  $(m, 1, 1) \in S$  donc  $S \neq \emptyset$ . Si  $(x, y, z) \in S$ , on ne peut avoir  $x = 0$  ou  $y = 0$  (sinon  $z^2 = p$  et  $p$  ne serait pas premier) on a donc pour tout  $(x, y, z)$  de  $S$  :  $1 \leq x \leq p, 1 \leq y \leq p$  et  $-p \leq z \leq p$ .

Chacune des coordonnées ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, donc  $S$  est fini. Si  $(x, y, z)$  vérifiait

$$\begin{cases} z^2 + 4xy = p \\ x = y + z \end{cases}$$
, alors  $p = (x-y)^2 + 4xy = (x+y)^2$ , ce qui contredit que  $p$  est premier. Ainsi, l'intersection de  $S$  avec le plan d'équation  $x = y + z$  est vide.

b)  $\star$  Si  $x > y + z$ , alors  $(x', y', z') = (x - y - z, y, 2y + z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  et :

$$4x'y' + z'^2 = 4xy - 4y^2 - 4yz + 4y^2 + 4yz + z^2 = 4xy + z^2 = p, \text{ donc } (x', y', z') \in S.$$

$\star\star$  Si  $x < y + z$ , alors  $(x', y', z') = (y + z - x, x, 2x - z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  et :

$$4x'y' + z'^2 = 4xy + 4xz - 4x^2 + 4x^2 - 4xz + z^2 = 4xy + z^2 = p, \text{ donc } (x', y', z') \in S.$$

3) a) Ici  $m = 10$  (notons que dans ce cas  $p = 41$  est premier). On obtient alors la succession de triplets :  
 $(10, 1, 1) \xrightarrow{\star} (8, 1, 3) \xrightarrow{\star} (4, 1, 5) \xrightarrow{\star\star} (2, 4, 3) \xrightarrow{\star\star} (5, 2, 1) \xrightarrow{\star} (2, 2, 5) \xrightarrow{\star\star} (5, 2, -1) \xrightarrow{\star} (4, 2, 3) \xrightarrow{\star\star}$   
 $(1, 4, 5) \xrightarrow{\star\star} (8, 1, -3) \xrightarrow{\star} (10, 1, -1) \xrightarrow{\star} (10, 1, 1).$

b) Si  $(a, b, c)$  est un élément de la suite, il ne peut avoir comme antécédent que  $(a - b + c, b, c - 2b)$  ou  $(b, a - b + c, 2b - c)$ , et ce à condition que  $a - b + c > 0$ .

Si on pose  $\begin{cases} u = a - b + c \\ v = b \\ w = c - 2b \end{cases}$ , on remarque que ces deux antécédents sont  $(u, v, w)$  et  $(v, u, -w)$ . Ils ne peuvent

eux-mêmes avoir un antécédent que si, respectivement  $u - v + w = a - 4b + 2c > 0$  ou  $v - u - w > 0$ .

Ces deux conditions ne peuvent être vérifiées en même temps. On en déduit donc que tout point  $(a, b, c)$  de la suite d'indice au moins 2 a pour antécédent :

$$\begin{cases} (a - b + c, b, c - 2b) & \text{si } a - 4b + 2c > 0 \\ (b, a - b + c, -c + 2b) & \text{si } a - 4b + 2c < 0 \end{cases}$$

Par ailleurs,  $(x_1, y_1, z_1) = (m - 2, 1, 3)$  a pour antécédent  $(x_0, y_0, z_0) = (m, 1, 1)$ , ce qui coïncide bien avec la relation ci-dessus.

c)  $S$  étant fini, la suite ne peut pas prendre une infinité de valeurs distinctes, on obtiendra donc à un moment un triplet déjà obtenu auparavant, d'où l'existence de  $k$  et  $\ell$ , avec par exemple  $k > \ell$  tels que  $(x_k, y_k, z_k) = (x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ .

Si  $\ell = 0$ , alors  $n = k$  convient.

Si  $\ell \geq 1$ , alors  $(x_k, y_k, z_k) = (x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ , donne par unicité de l'antécédent  $(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}) = (x_{\ell-1}, y_{\ell-1}, z_{\ell-1}) \dots, (x_{k-\ell}, y_{k-\ell}, z_{k-\ell}) = (x_0, y_0, z_0) = (m, 1, 1)$  et on peut prendre  $n = k - \ell$ .

4) a) Comme  $m > 2$ , l'image du triplet  $(m, 1, 1)$  est le triplet  $(m - 2, 1, 3)$ , donc  $n$  est au moins égal à 2.

Alors  $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = (m, 1, -1) = (x_0, y_0, -z_0)$ ;

puis  $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}) = (m - 2, 1, -3) = (x_1, y_1, -z_1)$ .

b) Supposons  $(x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}) = (x_{n-j}, y_{n-j}, -z_{n-j})$ , avec  $x_{j-1} > y_{j-1} + z_{j-1}$ , alors on a :

$$(x_j, y_j, z_j) = (x_{j-1} - y_{j-1} - z_{j-1}, y_{j-1}, 2y_{j-1} + z_{j-1}).$$

★ Si  $x_j > y_j + z_j$ , i.e.  $x_{j-1} - 4y_{j-1} - 2z_{j-1} = x_{n-j} - 4y_{n-j} + 2z_{n-j} > 0$ , on trouve :

$$(x_{n-j-1}, y_{n-j-1}, z_{n-j-1}) = (x_{n-j} - y_{n-j} + z_{n-j}, y_{n-j}, z_{n-j} - 2y_{n-j}) = (x_j, y_j, -z_j).$$

★ Si  $x_j < y_j + z_j$ , i.e.  $x_{j-1} - 4y_{j-1} - 2z_{j-1} = x_{n-j} - 4y_{n-j} + 2z_{n-j} < 0$ , on trouve :

$$(x_{n-j-1}, y_{n-j-1}, z_{n-j-1}) = (y_{n-j}, x_{n-j} - y_{n-j} + z_{n-j}, -z_{n-j} + 2y_{n-j}) = (y_j, x_j, z_j).$$

On fait de même dans le cas  $(x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}) = (y_{n-j}, x_{n-j}, z_{n-j})$  avec  $x_{j-1} < y_{j-1} + z_{j-1}$ , ce qui termine la récurrence.

c) Enfin, il ne peut exister de triplet  $(x_k, y_k, z_k)$  tel que  $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (x_k, y_k, -z_k)$  ou  $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}) = (y_k, x_k, z_k)$ , car cela imposerait  $y_k = -z_k$  ou  $x_k = y_k = z_k$ , ce qui est impossible sur  $S$  pour  $p$  premier.

Ce qui assure qu'il y a un nombre impair d'éléments dans notre bout de suite.

d) Le terme  $(x_r, y_r, z_r)$  au milieu doit être image d'un triplet  $(a, b, c)$  et antécédent du triplet  $(a, b, -c)$  ou  $(b, a, c)$  ce qui ne peut se produire que pour  $x_r = y_r$  et alors  $p = (2x_r)^2 + z_r^2$ .

Nous venons donc de montrer que tout nombre premier de la forme  $4m + 1$  est somme de deux carrés.

5) a) Clair : il suffit de programmer l'algorithme décrit en 2) b), jusqu'à obtenir un triplet de la forme  $(x, x, z)$ .

b) Le plus petit nombre premier supérieur à 40 et qui est somme de deux carrés est 41. Au cours de la question

3) a) nous avons obtenu dans la chaîne de triplets le triplet  $(2, 2, 5)$ , ce qui prouve que  $41 = 4 \times 2 \times 2 + 5^2 = 4^2 + 5^2$ .

## Partie VI

1)  $mn = |(a + ib)(c + id)|^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$  avec  $\begin{cases} x = ac - bd \\ y = bc + ad \end{cases}$ . 2) a) ★  $1^2 + 1 = 2$  et  $2^2 + 1 = 5$  sont

premiers et somme de deux carrés, donc  $\mathcal{P}(1)$  et  $\mathcal{P}(2)$  sont vraies.

★  $3^2 + 1 = 10$ , de diviseurs premiers 2 et 5 qui sont sommes de deux carrés et  $\mathcal{P}(3)$  est vraie.

b) i) On a  $n^2 + 1 = n(n + \frac{1}{n})$  et  $n + \frac{1}{n}$  n'est pas entier, donc  $n$  ne divise pas  $n^2 + 1$ .

ii) Si  $p < n$ , on écrit :  $(n - p)^2 + 1 = (n^2 + 1) - 2pn + p^2$  et  $p$  divise les trois termes donc divise  $(n - p)^2 + 1$ . L'hypothèse de récurrence assure alors que  $p$ , qui est premier, est somme de deux carrés, donc congru à 1 modulo 4.

iii) On suppose  $p > n$  et  $p < n^2 + 1$ , donc  $n^2 + 1 = pq$ , avec  $q < n$  (sinon  $pq \geq (n + 1)^2 > n^2 + 1$ ) et  $q > 1$  et les diviseurs premiers de  $n^2 + 1$  autres que  $p$  sont les diviseurs premiers de  $q$ , donc sont compris entre 2 et  $n - 1$ .

→ Si  $n$  est pair, alors  $n^2 + 1$  est congru à 1 modulo 4 et tous les diviseurs premiers de  $q$  sont impairs, donc par **ii)** sont somme de deux carrés et sont congrus à 1 modulo 4. Ainsi  $q$  est congru à 1 modulo 4 et  $p$  aussi.

→ Si  $n$  est impair, alors  $n^2 + 1$  est congru à 2 modulo 4 et  $n^2 + 1 = p \times 2q'$ , avec  $q'$  impair. Ainsi, par **ii)** les diviseurs premiers de  $q'$  sont impairs sommes de deux carrés et sont congrus à 1 modulo 4. Donc  $q'$  est congru à 1 modulo 4 et il en est de même de  $p$ .

**iv)** Si  $n^2 + 1$  est premier, alors  $p = n^2 + 1$  est somme de deux carrés. Sinon, les questions précédentes montrent que  $p = 2$  (qui est somme de deux carrés) ou que  $p$  est congru à 1 modulo 4, donc est somme de deux carrés.

**c)** En supposant  $\mathcal{P}(i)$  vraie jusqu'au rang  $n - 1$ , nous venons de montrer que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. On conclut alors par le principe de récurrence.

**3) a)** Soit  $N = (s!)^2 + 1$ ;  $N$  n'est pas divisible par 2, 3, ...  $n$ , donc son plus petit facteur premier  $p_s$  est strictement supérieur à  $n$ , et somme de deux carrés d'après **2)**.

**b)** Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on peut trouver un nombre premier somme de deux carrés supérieur à  $n$ . L'ensemble de ces nombres n'est donc pas majoré et il contient une infinité d'éléments.

**4) a)** On prend  $p$  premier impair somme de deux carrés (on peut choisir  $p$  d'une infinité de façons) :  $p = u^2 + v^2$ , avec  $u > v$ , on prend  $q = u^2 - v^2$ ;  $n = \frac{p+1}{2}$ ;  $k = \frac{q+1}{2}$ , alors, d'après les résultats de la partie **IV**,  $L(n, k)$  est rationnel : il existe bien une infinité de couples  $(n, k)$  tels que  $L(n, k)$  soit rationnel.

**b)** Par exemple :  $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ . Avec les notations précédentes on a donc  $n = 33$  et  $k = 32$  ou  $k = 17$ .

Ainsi  $L(33, 32)$  et  $L(33, 17)$  sont rationnels.