Corrigé

Questions préliminaires

1. On développe :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{MA}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)}_{\overrightarrow{0}}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{AB}\underbrace{\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}\right)}_{\overrightarrow{0}}} \quad = 0\end{aligned}$$

Remarquons d'abord que comme l'on envisage seulement des triangles non aplatis, les hauteurs sont deux à deux concourantes. De l'égalité précédente, on déduit que si H est l'intersection de deux des hauteurs du triangle, deux des produits scalaires de la somme précédente sont nuls ; le troisième est donc nul aussi et le point H est situé sur la troisième hauteur du triangle. Conclusion : les trois hauteurs sont concourantes en H.

2. $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{\Omega H}-\overrightarrow{\Omega A}=\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}$, donc

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Omega C}-\overrightarrow{\Omega B}\right)=\Omega C^2-\Omega B^2=0.$$

(AH) est donc la hauteur issue de A et, de même, (BH) est la hauteur issue de B et (CH) la hauteur issue de C, donc H est l'orthocentre du triangle ABC.
On peut, à la suite de cette démonstration, faire deux remarques :

- indépendamment de la question **1.**, cette question **2.** démontre l'existence de l'orthocentre d'un triangle ;
- par unicité, la relation $\overrightarrow{\Omega H}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}$ caractérise l'orthocentre H du triangle ABC.

Première Partie

1. Parties orthocentriques à trois éléments : les trois points forment un triangle dont l'orthocentre doit être l'un des sommets ; c'est donc un triangle rectangle et l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.

2. Parties orthocentriques à quatre éléments : soit $\{A,B,C,D\}$ une partie orthocentrique à quatre éléments. Par définition, ces quatre points ne sont pas alignés.

- Si trois des quatre points forment un triangle ABC non rectangle, le quatrième point est nécessairement l'orthocentre D de ce triangle. Dans ce cas, tous les triplets inclus dans $\{A,B,C,D\}$ forment un triangle non rectangle et A est l'orthocentre du triangle BCD, B est l'orthocentre du triangle ACD et C est l'orthocentre du triangle ABD.
- Sinon, trois éléments quelconques pris parmi les quatre forment un triangle rectangle ou sont alignés et il y a au plus un sous-ensemble de trois points alignés.
  - Premier cas : tous les triplets inclus dans $\{A,B,C,D\}$ sont formés de points non alignés. Dans ce cas ABD, ACD et BCD sont des triangles rectangles. Il ne peut y avoir deux angles droits ayant le même sommet (sinon trois des points seraient alignés). Il y a donc un angle droit en chacun des quatre points qui forment donc un rectangle.
  - Second cas : trois des points sont alignés, par exemple B,C,D. Les triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles. Il y a au plus un angle droit de sommet A (puisque B,C et D sont distincts) et au plus un point parmi B,C ou D qui est sommet d'un angle droit. Comme il y a trois angles droits, l'un est en A et les deux autres ont pouur sommet le même point pris parmi B,C ou D, par exemple D. Dans ce cas, le triangle ABC est rectangle en A et D est le pied de la hauteur issué de A.

En résumé, les réciproques étant immédiates, les parties orthocentriques à quatre éléments sont :

- l'ensemble formé des sommets d'un triangle non rectangle et de son orthocentre ;
- l'ensemble des quatre sommets d'un rectangle ;
- l'ensemble formé des sommets d'un triangle rectangle et du pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.

3. a) Si $X=\{A,B,C,D\}$ est inclus dans le cercle de centre Ω et de rayon R, on pose $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}$ et on désigne par H_A, H_B, H_C et H_D les orthocentres respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC, donnés par les égalités :

$$\overrightarrow{\Omega H_A}=\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D},\quad \overrightarrow{\Omega H_B}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D},\quad \overrightarrow{\Omega H_C}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega D},\quad \overrightarrow{\Omega H_D}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}.$$

On peut donc écrire : $\overrightarrow{\Omega H_A} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega H_B} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{\Omega B}$, $\overrightarrow{\Omega H_C} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{\Omega H_D} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{\Omega D}$, d'où, en posant $\overrightarrow{\Omega I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{IH_A} = -\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IH_B} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IH_C} = -\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IH_D} = -\overrightarrow{ID}$ ce qui montre que H_A, H_B, H_C et H_D se déduisent respectivement de A, B, C et D par une symétrie de centre I et $Y = \mathcal{H}(X)$ ***se déduit de X dans cette symétrie***.

b) Les points H_A, H_B, H_C et H_D composant Y sont situés sur le cercle de centre Ω' et de rayon R (avec $\overrightarrow{I\Omega'} = -\overrightarrow{I\Omega}$). $\mathcal{H}(Y)$ est donc le symétrique de Y par rapport à I' où

$$\overrightarrow{\Omega' I'} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{\Omega' H_A} + \overrightarrow{\Omega' H_B} + \overrightarrow{\Omega' H_C} + \overrightarrow{\Omega' H_D}\big) = -\frac{1}{2}\big(\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{\Omega D}\big) = -\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{\Omega' I}$$

donc $I' = I$ et $\boxed{\mathcal{H}(Y) = X}$

4. a) Si Γ est le cercle de centre Ω et de rayon R, pour tous points distincts A, B et C de Γ, l'orthocentre H du triangle ABC vérifie $\|\overrightarrow{\Omega H}\| < \|\overrightarrow{\Omega A}\| + \|\overrightarrow{\Omega B}\| + \|\overrightarrow{\Omega C}\| = 3R$ (l'inégalité est stricte puisque les points A, B et C ne sont pas alignés). Montrons réciproquement que tout point du disque ouvert de centre Ω et de rayon $3R$ est l'orthocentre d'un triangle inscrit dans le cercle Γ. Soit H tel que $\|\overrightarrow{\Omega H}\| < 3R$.

• Si $H = \Omega$, on prend pour ABC un triangle équilatéral inscrit dans le cercle Γ et H est le centre, donc l'orthocentre de ABC.

• Si $H \neq \Omega$, prenons un repère orthonormé $(\Omega; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega H}}{\|\overrightarrow{\Omega H}\|}$ de sorte que $\overrightarrow{\Omega H} = h\overrightarrow{i}$ (avec $h > 0$). Choisissons pour A le point défini par $\overrightarrow{\Omega A} = R\overrightarrow{i}$ puis prenons K tel que $\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega H} - \overrightarrow{\Omega A} = (h-R)\overrightarrow{i}$. La médiatrice de $[\Omega K]$ est à une distance $\dfrac{|h-R|}{2} < R$ de Ω donc coupe le cercle Γ en deux points B et C. D'après la construction du parallélogramme, $\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ donc $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ et H est l'orthocentre du triangle ABC.

$\mathcal{H}(\Gamma)$ est donc ***le disque ouvert de centre*** Ω ***et de rayon*** $3R$.

b) Le texte ne précise pas, à dessein, si le disque est ouvert ou fermé, car le résultat est le même dans les deux cas : $\mathcal{H}(D)$ est le plan tout entier. Montrons qu'en fait si Γ est un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ et si $X = \Gamma \cup \{\Omega\}$, alors $\mathcal{H}(X)$ est le plan tout entier. Soit en effet une demi-droite $[\Omega x)$ d'origine Ω, $\theta \in]0, \pi/2[$, B le point du cercle Γ tel que $\big(\Omega x, \overrightarrow{\Omega B}\big) = \theta\ [2\pi]$ et C le symétrique de B par rapport à la droite Ωx).
L'orthocentre du triangle ΩBC est le point H de la droite (Ωx) situé sur la perpendiculaire menée de B à (ΩC). Un calcul élémentaire montre qu'il a pour abscisse $h(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot$ Lorsque θ croît de $\pi/2$ à $3\pi/4$, $h(\theta)$ décroît de $+\infty$ à 0 donc prend, par continuité, toute valeur réelle positive, et H décrit la demi-droite $[\Omega x)$. L'ensemble des orthocentres des triangles de type ΩBC où B et C sont sur le cercle Γ est donc l'ensemble des points des demi-droites d'origine Ω, c'est-à-dire ***le plan tout entier***.

Deuxième Partie

1. Le nombre des triangles dont les sommets appartiennent à X est $\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \dfrac{n(2n-1)(2n-2)}{3}\cdot$ Un de ces triangles est rectangle si, et seulement si, deux de ces sommets sont diamétralement opposés . Pour avoir un triangle rectangle, il faut donc choisir une paire de deux points diamétralement opposés (il y en a n) puis un troisième sommet parmi les $2n-2$ points restants. Il y a donc $n(2n-2)$ triangles rectangles dont les sommets sont dans X et la probabilité qu'un triangle pris au hasard dans $\mathcal{T}$ soit rectangle est donc

$$n(2n-2) \times \frac{3}{n(2n-1)(2n-2)} = \boxed{\frac{3}{2n-1}}$$

2. Il est plus facile de dénombrer d'abord les triangles ayant un angle obtus. Un tel triangle peut être noté sans ambiguïté ABC, avec A, B et C dans le sens trigonométrique et l'angle obtus en B. Si A' est le point opposé par le sommet à A, le triangle ABC est obtus en B si, et seulement si, C est entre A et A' et B entre A et C. Pour le choix de A, il y a $2n$ possibilité. Ce choix étant fait, on peut numéroter les sommets M_1, M_2, $\ldots, M_{2n}$ du polygone dans le sens trigonométrique en prenant $M_1 = A$. Alors C peut être en M_j, avec $3 \leq j \leq n$ et B en M_k avec $2 \leq k \leq j-1$. Le nombre de paires $\{B, C\}$ vérifiant les conditions précédentes est

$$\sum_{j=3}^{n}(j-2) = 1+2+\cdots+n-2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

et le nombre de triangles obtusangles est $n(n-1)(n-2)$. Le nombre de triangles acutangles dont les sommets appartiennent à X est donc :

$$\frac{n(2n-1)(2n-2)}{3} - n(2n-2) - n(n-1)(n-2) = \frac{n(n-1)}{3}(4n-2-6-3n+6) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

et la probabilité de choisir un triangle acutangle est :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times \frac{3}{n(2n-1)(2n-2)} = \boxed{\frac{n-2}{2(2n-1)}}$$

3. En situation d'équiprobabilité, on est amené à calculer d'abord la somme S des OH^2 étendue aux orthocentres H des N triangles $M_1M_2M_3$ de $\mathcal{T}$. Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}^2 &= \overrightarrow{OM_1}^2 + \overrightarrow{OM_2}^2 + \overrightarrow{OM_3}^2 + 2\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2} + 2\overrightarrow{OM_2}\cdot\overrightarrow{OM_3} + 2\overrightarrow{OM_3}\cdot\overrightarrow{OM_1}\\ &= 3R^2 + 2\overrightarrow{OM_1}\cdot\overrightarrow{OM_2} + 2\overrightarrow{OM_2}\cdot\overrightarrow{OM_3} + 2\overrightarrow{OM_3}\cdot\overrightarrow{OM_1}\end{aligned}$$

Finalement, $S = 3NR^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 2n}\mu(i,j)\,\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_j}$, où $\mu(i,j)$ désigne le nombre de triangles de $\mathcal{T}$ ayant parmi leurs sommets M_i et M_j. Pour le troisième sommet, il reste $2n-2$ choix possibles donc $\mu(i,j) = 2n-2$. On a donc $\mathrm{E}(L) = \dfrac{S}{N} = 3R^2 + \dfrac{2(2n-2)}{N}\sum_{1\leq i<j\leq 2n}\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_j}$. Mais

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{2n}\overrightarrow{OM_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{2n}\overrightarrow{OM_i}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 2n}\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_j} = 2nR^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 2n}\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_j},$$

donc $2\sum_{1\leq i<j\leq 2n}\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_j} = -2nR^2$ et

$$\mathrm{E}(L) = 3R^2 + (2n-2)\times\frac{3}{n(2n-1)(2n-2)}\left(-2nR^2\right) = 3R^2\left(1-\frac{2}{2n-1}\right) = \boxed{\frac{3(2n-3)}{2n-1}R^2}$$

Troisième partie

1. La hauteur issue de C a pour équation $b(x-c) - ay = 0$ et l'orthocentre D, à l'intersection de cette droite et de l'axe $(0, \vec{v})$, a pour coordonnées $x = 0$ et $\boxed{y = -\dfrac{bc}{a}}$

2. Les orthocentres des triangles MBC où B et C sont deux points distincts de Δ sont sur la hauteur issue de M qui est la perpendiculaire D menée de M à Δ. Sans diminuer la généralité, on peut prendre comme droite Δ la droite $(0, \vec{u})$ et comme droite D la droite $(0, \vec{v})$. Si M a pour ordonnée a l'ensemble des ordonnées des orthocentres des triangles MBC est l'ensemble des nombres réels s'écrivant $\dfrac{-bc}{a}$ où b et c prennent toutes les valeurs réelles distinctes : c'est donc l'ensemble des nombres réels et $\mathcal{H}(X) = D$. Il est alors immédiat que $\mathcal{H}(X) \cup X = \Delta \cup D$ est orthocentrique puisque $\mathcal{H}(\Delta \cup D) = \Delta \cup D$.

3. a) Supposons qu'il y a sur $(O, \vec{u})$ deux points B_1 et B_2 d'abscisses $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$ et un point C d'abscisse $c < 0$. Comme X, orthocentrique, n'est pas inclus dans une droite, il y a un point A_1 sur $(O, \vec{v})$ d'ordonnée non nulle a_1. Le point A_2, orthocentre du triangle $A_1B_1B_2$ est aussi sur $(O, \vec{v})$ et a une ordonnée non nulle $a_2 = -\dfrac{b_1b_2}{a_1}$ du signe contraire de celui de a_1. Notons d'ailleurs que A_1 est l'orthocentre du triangle $A_2B_1B_2$. Supposons, pour fixer les idées, que $a_1 > 0$ et $a_2 < 0$. L'un des deux triangles A_1CB_1 ou A_1CB_2 est non rectangle en A_1 donc a son orthocentre A_3 sur $(O, \vec{v})$ avec une ordonnée $a_3 > 0$. Supposons que A_1CB_1 est non rectangle et a pour orthocentre A_3, donc $a_3 = -\dfrac{cb_1}{a_1}$, avec $a_1^2 \neq -cb_1$. L'un des deux triangles $B_1A_2A_3$ ou $B_2A_2A_3$ est non rectangle au point B_i. Son orthocentre B_3 est sur $(O, \vec{u})$ avec une abscisse $b_3 > 0$.

- si B_3 est l'orthocentre de $B_1A_2A_3$, $b_3 = -\dfrac{1}{b_1} \times \dfrac{-cb_1}{a_1} \times \dfrac{-b_1b_2}{a_1} = -\dfrac{cb_1b_2}{a_1^2} \neq b_2$ puisque $a_1^2 \neq -cb_1$.
- si B_3 est l'orthocentre de $B_2A_2A_3$, $b_3 = -\dfrac{1}{b_2} \times \dfrac{-cb_1}{a_1} \times \dfrac{-b_1b_2}{a_1} = -\dfrac{cb_1^2}{a_1^2} \neq b_1$ puisque $a_1^2 \neq -cb_1$.

3. b) Montrons symétriquement que, dans le cas étudié au **3.** a), il y a trois points de X sur $(O, \vec{u})$ d'abscisse strictement négative. D'après le travail fait au **3.** a), il suffit de montrer qu'il y en a deux : ce sont C et l'orthocentre de celui des deux triangles CA_1A_2 et CA_2A_3 qui est non rectangle en C.

4. a) Parties à trois points : $\{O, A, B\}$, avec A sur $(O, \vec{u})$ distinct de O et B sur $(O, \vec{v})$ distinct de O.
Parties à quatre points : deux points A et C sur $(O, \vec{u})$ et deux points B et D sur $(O, \vec{v})$ avec trois configurations possibles :

1 Aucun des points n'est en O et C est l'orthocentre de ABD.
2 C est en O et le triangle ABD est rectangle en A.
3 $ABCD$ est un carré (rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires).

Parties à cinq points : on a vu que s'il y avait dans une partie orthocentique X incluse dans la réunion des axes, trois points, sur l'un des axes, distincts de O il y avait en fait au moins sept points dans X. Si une telle partie X a exactement 5 points, l'un est donc O, qui est lui-même l'orthocentre de tous les triangles dont il est l'un des sommets et d'aucun autre (puisque pour les autres triangles, il est sur l'un des côtés sans être un sommet). Les parties orthocentriques à 5 éléments sont donc les parties $\{O, A, B, C, D\}$, où $\{A, B, C, D\}$ est une partie orthocentrique à 4 éléments du type 1 ou 3.

4. b) Si X a au moins six points il en a au moins trois sur l'un des deux axes en dehors de O donc, d'après la question **3.** au moins trois sur $(O, \vec{u})$ d'abscisse strictement positive, soit $B(b, 0)$, $C(0, c)$ et $M_0(0, x)$ avec $0 < b < c$. Il y a aussi un point $A(0, a)$ de X sur $(O, \vec{v})$ d'ordonnée $a > 0$.
On définit successivement dans X, $A_1(0, a_1)$ orthocentre de ACM_0, puis $M_1(x_1, 0)$ orthocentre de AA_1B. On a $a_1 = -\dfrac{cx_0}{a}$ et $x_1 = \dfrac{c}{b}x$.
Si on suppose définis dans X, pour $1 \leq k \leq n-1$, $A_k(0, a_k)$ comme orthocentre de ACM_{k-1} et $M_k(x_k, 0)$ comme orthocentre de AA_kB avec $x_k = \left(\dfrac{c}{b}\right)^k x_0$, on peut définir dans X, $A_n(0, a_n)$ comme orthocentre de ACM_{n-1} puis $M_n(x_n, 0)$ comme orthocentre de AA_nB, avec $a_n = -\dfrac{c}{a} \times \left(\dfrac{c}{b}\right)^{n-1} x_0$, puis $x_n = \left(\dfrac{c}{b}\right)^n x_0$. Comme $c > b$, la suite (x_n) tend bien vers $+\infty$.
Si on considère un point A' sur $(O, \vec{v})$ d'ordonnée strictement négative a' et si on désigne par $M'_n(x'_n, 0)$ l'orthocentre de $AA'M_n$, on a, en posant $\alpha = -aa' > 0$, $x'_n = \dfrac{\alpha}{x_n} \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$.

Quatrième partie

1. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (b-a)(d-c) + \left(\dfrac{k}{b} - \dfrac{k}{a}\right)\left(\dfrac{k}{d} - \dfrac{k}{c}\right) = (b-a)(d-c) \times \dfrac{abcd + k^2}{abcd}$, d'où le résultat.

b) Il existe un unique point de Y d'abscisse $d = \dfrac{-k^2}{abc}$, le point D d'ordonnée $-\dfrac{abc}{k}$. D'après a), (DC) est perpendiculaire à (AB) ; symétriquement, (DB) est perpendiculaire à (CA) et (DA) est perpendiculaire à (BC) donc D est l'orthocentre du triangle ABC.

c) D'après b), l'orthocentre d'un triangle dont les sommets sont dans Y est dans Y donc Y est orthocentrique.

2. a) Le discriminant $\Delta = q^2 + 4$ est strictement positif et l'équation a deux racines distinctes. Si le rationnel $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont des entiers non nuls premiers entre eux, est racine de l'équation, $a^2 - qab - b^2 = 0$, donc b divise a et a divise b soit, en fin de compte, $\dfrac{a}{b} = \pm 1$ donc $qa = 0$, ce qui est contradictoire puisque $q \neq 0$.

On peut prendre, mais cela n'a pas d'importance $r = \dfrac{q+\sqrt{q^2+4}}{2}$ et $r' = \dfrac{q-\sqrt{q^2+4}}{2}$.

b) Si $s : x+\mathrm{i}y \mapsto x'+\mathrm{i}y'$, on a $x'+\mathrm{i}y' = (1-r\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)$, donc $x' = x+ry$ et $y' = -rx+y$. On a alors :

$$\begin{aligned} x'y' &= (x+ry)(-rx+y) = r(y^2-x^2)+(1-r^2)xy \\ &= r(y^2-x^2) - qrxy \quad \text{puisque } r^2-qr-1=0 \\ &= r(y^2-x^2-qxy+1)-r \end{aligned}$$

de sorte que $\boxed{x^2+qxy-y^2 = 1 \Longleftrightarrow x'y' = -r}$ et $s(X) = Y$, avec $k=-r$.

La similitude conserve l'orthogonalité donc les orthocentres des triangles et X image par la similitude s^{-1} de l'ensemble orthocentrique Y est donc orthocentrique.

3. a) Cela résulte de l'expression de x' donnée au **2.** b) et de l'égalité $(x+ry)(x+r'y) = x^2+(r+r')xy+rr'y^2 = x^2+qxy-y^2$, conséquence de $r+r'=q$ et $rr'=-1$.

b) -1 correspond à $(x,y) = (-1,0)$ qui vérifie les deux expressions et r^2 à $(x,y) = (1,q)$ qui vérifie aussi les deux expressions puisque $1+qr = r^2$ et $(1+qr)(1+qr') = 1+q(r+r')+q^2rr' = 1+q^2-q^2 = 1$.

c) $(x_1+ry_1)(x_2+ry_2) = x_1x_2+r(x_1y_2+x_2y_1)+r^2y_1y_2 = x_1x_2+y_1y_2+r(x_1y_2+x_2y_1+qy_1y_2) = X+rY$ avec X et Y entiers. De plus $(X+rY)(X+r'Y) = (x_1+ry_1)(x_2+ry_2)(x_1+r'y_1)(x_2+r'y_2) = 1$.

De même, $\dfrac{1}{x+ry} = \dfrac{x+r'y}{(x+ry)(x+r'y)} = \dfrac{x+y-ry}{x^2+qxy-y^2} = x+y-ry$

et $(x+y-ry)(x+y-r'y) = \dfrac{1}{(x+ry)(x+r'y)} = 1$.

Γ est stable par produit et contient r^2, donc contient tous les r^{2n}, $n \in \mathbb{N}$. Comme $q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, $|q| \geq 1$ et $r = \dfrac{q+\sqrt{q^2+4}}{2} \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$: la suite des r^{2n} est infinie, donc aussi Γ.

4. L'ensemble G est infini, puisque Γ l'est. Si $A_1 = (x_1,y_1)$, $A_2 = (x_2,y_2)$ et $A_3 = (x_3,y_3)$ sont trois points de X, $s(A_1)$, $s(A_2)$ et $s(A_3)$ sont trois points de l'hyperbole Y d'équation $xy=-r$, d'abscisses respectives x_1+ry_1, x_2+ry_2 et x_3+ry_3 appartenant à Γ. D'après la question **1.** b) l'orthocentre K du triangle $s(A)s(B)s(C)$ est le point de Y d'abscisse $x = \dfrac{-r^2}{(x_1+ry_1)(x_2+ry_2)(x_3+ry_3)}$.

D'après la question **3.** c), comme -1, r^2, x_1+ry_1, x_2+ry_2 et x_3+ry_3 appartiennent à Γ, x appartient à Γ. L'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$ est le point H de X tel que $s(H) = K$ (par conservation de l'orthogonalité par similitude). Comme l'abscisse de $s(H)$ est dans Γ, H est dans G.

Conclusion : G est un ensemble orthocentrique infini.

Cinquième partie

Après similitude, on se ramène à deux cas :

cas 1 : $\{A_0,B_0,C_0,D_0\} \in Y_1$ cas 2 : $\{A_0,B_0,C_0,D_0\} \in Y_0$

cas 1

1. Soit a_0,b_0,c_0,d_0 les abscisses respectives de A_0,B_0,C_0,D_0, qui définissent quatre triangles $B_0C_0D_0$ d'orthocentre A_1, $A_0C_0D_0$ d'orthocentre B_1, $A_0B_0D_0$ d'orthocentre C_1 et $A_0B_0C_0$ d'orthocentre D_1. On note a_1,b_1,c_1,d_1 les abscisses respectives de A_1,B_1,C_1,D_1.

On définit ensuite de la même manière A_n,B_n,C_n,D_n (d'abscisses a_n,b_n,c_n,d_n) orthocentres respectifs des quatre triangles dont les sommets sont dans X_{n-1}. On a $a_1 = -\dfrac{1}{b_0c_0d_0}$, … et de même $a_n = -\dfrac{1}{b_{n-1}c_{n-1}d_{n-1}}$, …

Si on pose $p_n = a_nb_nc_nd_n$ avec, pour simplifier $p = p_0$, on obtient : $a_1 = -\dfrac{a_0}{p}$, $b_1 = -\dfrac{b_0}{p}$, $c_1 = -\dfrac{c_0}{p}$, $d_1 = -\dfrac{d_0}{p}$ et, plus généralement : $a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{p_{n-1}}$, $b_n = -\dfrac{b_{n-1}}{p_{n-1}}$, $c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{p_{n-1}}$, $d_n = -\dfrac{d_{n-1}}{p_{n-1}}$.

On a donc $p_1 = p^{-3}$ et, plus généralement, $p_n = p^{(-3)^n}$. Il y a périodicité si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ tel que $p_k = 1$. Les seuls cas possibles sont $p=1$ qui correspond à une période $m=2$ et $p=-1$ qui correspond à une période $m=1$.

• Si $m = 1$, $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ est orthocentrique.

• Si $m = 2$, montrons que A_0, B_0, C_0 et D_0 sont cocycliques (on se trouve alors dans la situation étudiée au **3.** de la première partie. On remarque d'abord que $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ sont les symétriques respectifs de $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ par rapport à O. Si on considère le centre Ω du cercle circonscrit au triangle $A_0B_0C_0$, comme son orthocentre est D_1, on a $\overrightarrow{A_0\Omega} + \overrightarrow{B_0\Omega} + \overrightarrow{C_0\Omega} = \overrightarrow{D_1\Omega} = \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OD_0} = 2\overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{D_0\Omega}$, d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{A_0\Omega} + \overrightarrow{B_0\Omega} + \overrightarrow{C_0\Omega} + \overrightarrow{D_0\Omega} = 2\overrightarrow{O\Omega}}$$

De la symétrie de cette expression, on déduit que $\overrightarrow{B_0\Omega} + \overrightarrow{C_0\Omega} + \overrightarrow{D_0\Omega} = \overrightarrow{A_1\Omega}$ donc, puisque A_1 est l'orthocentre du triangle $B_0C_0D_0$ que Ω en est le centre du cercle circonscrit. Les quatre points sont donc cocycliques ; la réciproque a été faite au I.3.b).

Note : Pour un triangle donné ABC, d'orthocentre H, il y a un unique point Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{H\Omega}$: c'est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(H, -1)$ et c'est donc d'après la seconde question préliminaire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

cas 2

Si trois des points appartenaient l'un des axes, X_1 aurait au plus trois lments donc X_2 au plus un et il ne pourrait y avoir priodicit. C'est donc que deux des points sont sur $(O, \vec{u})$ et deux sur $(O, \vec{v}$, aucun des points n'tant en O. On part donc de $A_0(a_0, 0)$, $B_0(b_0, 0)$, $C_0(0, c_0)$ et $D_0(0, d_0)$, avec $a_0b_0c_0d_0 \neq 0$.