Corrigé abrégé

Première Partie

1. Le triangle CAD étant isocèle de sommet A, on dispose des congruences entre angles de droites :

$$(BC, BA) - (CA, CB) \equiv (BD, BA) + (DA, DB) \equiv -(AB, AD) \qquad (\text{modulo } \pi)$$

valables dans tous les cas de figure (il n'y a donc pas à discuter selon la position de B).

2. Si ABC est rectangle en A, la relation $PA^2 = PB.PC$ est bien connue. S'il est pseudo-rectangle en A, alors ABD est rectangle en A et la même relation donne le résultat car $PD = PC$.

Réciproquement, la non-nullité de PA montre que $PB.PC$ n'est pas nul, et que la droite (BC) n'est pas perpendiculaire à (AB). Elle coupe en un point C' la perpendiculaire à (AB) issue de A, qui vérifie l'égalité $PA^2 = PB.PC'$ d'où $PC = PC'$. Si $C' = C$, alors ABC est rectangle en A. Sinon, $C' = D$ et ABC est pseudo-rectangle en A d'après le **1.**

3. Soit H le symétrique de A par rapport à (BC). Il appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC et en est l'orthocentre si, et seulement s'il appartient aussi à celle issue de B, donc si BHD est rectangle en H puisque $ACHD$ est un losange, donc si, et seulement si, HBC est pseudo-rectangle en H et son symétrique ABC pseudo-rectangle en A.

4. Le réel R est aussi le rayon du cercle circonscrit au triangle ABD, puisque $AB = 2R \sin \widehat{ACB}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Donc si ABC est rectangle, on a $PB + PC = BC = 2\,R$ et, s'il est pseudo-rectangle, on a $PB + PC = PB + PD = BD = 2\,R$ d'après le **1.**

Supposons réciproquement vérifiée l'égalité $PB + PC = 2\,R$.

a) Si P appartient au segment $[BC]$, alors $BC = 2\,R$ et le centre du cercle circonscrit étant le milieu I de $[BC]$ le triangle ABC est rectangle en A.

b) Sinon, le point C par exemple appartient au segment $[PB]$ d'où $BD = PB + PD = PB + PC = 2\,R$, ce qui implique comme au a) que ABD est rectangle en A puisque R est aussi le rayon de son cercle circonscrit, et donc que ABC est pseudo-rectangle en A.

5. Il existe une solution presque évidente de cette question si l'on utilise la notion de puissance qui ne figure pas explicitement dans les programmes du lycée. On peut l'éviter en utilisant le **4.** En effet :

a) Si (AP) est tangente en A au cercle circonscrit à ABC, le point P est strictement extérieur à $[BC]$ et ABC n'est pas rectangle. Si l'on note Ω le centre de son cercle circonscrit, le quadrilatère $API\Omega$ est un rectangle, d'où $PB + PC = 2\,PI = 2\,A\Omega = 2\,R$, et ABC est pseudo-rectangle en A.

b) Réciproquement, P est strictement extérieur à $[BC]$, d'où $2PI = PB + PC = 2\,R = 2\,\Omega A$ et le trapèze rectangle $API\Omega$, qui a son côté oblique $A\Omega$ de même longueur que son côté droit PI, est un rectangle. La droite AP étant perpendiculaire à ΩA est donc tangente en A au cercle.

6. a) Si ABC est direct, des arguments respectifs de $\dfrac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}$, $\dfrac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}$ et $\dfrac{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)^2}$ sont $\widehat{B}$, $-\ \widehat{C}$ et $\widehat{B} - \widehat{C} + \pi$, nombres à multiplier par -1 si ABC est indirect. Il en découle que ABC est pseudo-rectangle en

A si, et seulement si, ce dernier argument est égal à $\pm\dfrac{\pi}{2}$, donc si, et seulement si, $\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}$ est imaginaire pur.

b) Si $\beta=-\gamma=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ et $\alpha=x+\mathrm{i}y$, on trouve $\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4\,\beta^2}=\dfrac{x^2-y^2+\mathrm{i}\,(2\,xy-1)}{4\mathrm{i}}$, et (E_1) qui possède $2\,xy=1$ comme équation cartésienne est une hyperbole équilatère.

c) Si $\beta=-\gamma=1$ et $\alpha=x+\mathrm{i}y$, on trouve $\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4\,\beta^2}=\dfrac{x^2-y^2-1+2\mathrm{i}\,xy}{4}$ et (E_2) possède $x^2-y^2=1$ comme équation cartésienne.

d) Comme (E_2) est l'image de (E_1) par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$, c'est également une hyperbole équilatère.

Remarque Il existe d'autres caractérisations des triangles pseudo-rectangles en A, comme par exemple $PA^2=\overrightarrow{PB}\,.\,\overrightarrow{PC}$, (CA) est une bissectrice de $(CB,C\Omega)$, $(A\Omega)$ et (BC) sont parallèles, le centre du cercle d'Euler appartient à (BC), les bissectrices de (AB,AC) font avec (BC) des angles de mesure $\pm\dfrac{\pi}{4}$, $AP=R\cos\widehat{A}$, $\cos\widehat{A}=2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}$, $AB^2+AC^2=BC^2+4\,PA^2$, $|AB^2-AC^2|=2\,R\,BC$, $AB\,AC=2\,R^2\cos\widehat{A}$, $\cos\widehat{A}=\dfrac{2\,AB\,AC}{AB^2+AC^2}$ *etc* (voir aussi la partie suivante).

Il existe également d'autres caractérisations des triangles rectangles ou pseudo-rectangles en A, comme par exemple $\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}=1$, $AB^2+AC^2=4\,R^2$ et $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AP^2}$.

Deuxième Partie

1. a) [i] $\Rightarrow$ [ii] : si B et C ont pour coordonnées respectives $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ et $\left(-\dfrac{a}{2},0\right)$ et si l'ordonnée de A est positive, elle est égale à la fois à $b\sin\widehat{C}$ et à $c\sin\widehat{B}$ d'après les relations usuelles dans les triangles rectangles ACP et ABP. Toujours pour la même raison, son abscisse est égale à $b\cos\widehat{C}-\dfrac{a}{2}$ et à $c\cos\left(\pi-\widehat{B}\right)+\dfrac{a}{2}=c\sin\widehat{C}+\dfrac{a}{2}$. En résultent les égalités $a=b\cos\widehat{C}-c\sin\widehat{C}$ et $b\sin\widehat{C}=c\sin\widehat{B}$, puis $b=a\dfrac{\cos\widehat{C}}{\cos 2\,\widehat{C}}$, $c=a\dfrac{\sin\widehat{C}}{\cos 2\,\widehat{C}}$ et enfin $b^2-c^2=a\sqrt{b^2+c^2}$.

Remarque On peut aussi faire de la trigonométrie à partir des relations évidentes $\widehat{B}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\widehat{A}}{2}$, $\widehat{C}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\widehat{A}}{2}$ et $\widehat{A}<\dfrac{\pi}{2}$ qui donnent a, b et c en fonction de R et de $\widehat{A}$.

b) [ii] $\Rightarrow$ [iii] : puisque $b>c>0$, il vient la représentation polaire $b=\rho\cos\theta$, $c=\rho\sin\theta$ avec $\rho>0$ et $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$, puis $a=\dfrac{b^2-c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}=\rho\cos 2\theta$.

c) [iii] $\Rightarrow$ [i] : reprenant le repère du a) et en définissant le point A comme ayant $\dfrac{\rho}{2}$ et $\rho\sin\theta\cos\theta$ pour coordonnées, on trouve que a, b et c sont bien les longueurs des côtés du triangle ABC. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}$ montrent qu'ils font avec l'axe des abscisses des angles de mesures respectives $\dfrac{\pi}{2}+\theta$ et θ, d'où le résultat.

Remarque On peut aussi utiliser la question **6.** c) de la première partie.

d) On vient de voir que $\theta = \widehat{C}$. Comme $4\,R^2 = b^2 + c^2 = \rho^2$, l'égalité $\rho = 2\,R$ (diamètre du cercle circonscrit) en résulte.

2. a) Puisque $\tan\theta = \dfrac{c}{b}$, ce nombre est rationnel, ainsi que $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, et il en va de même pour $\rho = \dfrac{a}{\cos 2\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{b}{\rho}$ et $\sin\theta = \dfrac{c}{\rho}\cdot$ On dispose alors de la relation $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \in \mathbb{Q}$.

b) Posant $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$, il vient aussitôt $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ et l'encadrement $0 < p < q\,(\sqrt{2}-1)$. Les égalités de l'énoncé sont claires si l'on pose $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$ et $r = \rho\,(p^2+q^2)^2\cdot$

3. On vérifie aussitôt que b et c sont strictement positifs ; pour a, c'est un peu plus long, mais il suffit de décomposer $p^4 - 6\,p^2q^2 + q^4 = [p^2 - (\sqrt{2}-1)^2q^2]\,[p^2 - (\sqrt{2}+1)^2q^2]$ et d'utiliser l'encadrement de p. Enfin la vérification de l'égalité $b^2 - c^2 = a\,\sqrt{b^2+c^2}$ est mécanique.

4. a) Soit D le plus grand diviseur commun aux trois nombres $p^2 - 6\,p^2q^2 + q^4$, $q^4 - p^4$ et $2\,pq\,(p^2+q^2)$. Montrons qu'ils n'admettent aucun diviseur commun premier impair. En effet, ce nombre diviserait $pq\,(p^2+q^2)$, mais non p (puisqu'alors il diviserait q^4 et donc q), ni q pour une raison analogue ; il diviserait donc p^2+q^2 et $p^4 - 6\,p^2q^2 + q^4 - (p^2+q^2)^2 = -8\,p^2q^2$ ce qui ne se peut. Donc D, comme tous les diviseurs communs étudiés, est de la forme $D = 2^\delta$.

Si p et q n'ont pas la même parité, D est donc égal à 1 puisqu'il divise le nombre impair $q^4 - p^4$.

Si p et q sont de même parité, donc impairs, un raisonnement classique montre que 8 divise p^2-1, q^2-1, $4\,(pq-1)$ et donc $2\,pq\,(p^2+q^2) - 4$, ce qui montre qu'il ne peut diviser $2\,pq\,(p^2+q^2)$ et que $D \leqslant 4$. Mais 4 divise $2\,(p^2+q^2)$, $q^2 - p^2$, $q^4 - p^4$ et $(q^2-p^2)^2$, donc chacun des trois nombres considérés, d'où finalement $D = 4$.

b) Nous savons qu'il existe un quadruplet d'entiers positifs (p,q,n,d), avec p et q premiers entre eux comme n et d, tels que

$$a = \frac{n}{d}\,(p^4 - 6\,p^2q^2 + q^4), \quad b = \frac{n}{d}\,(q^4 - p^4), \quad c = \frac{n}{d}\,(2\,pq)\,(p^2+q^2)$$

et $0 < p < q\,(\sqrt{2}-1)$. Puisque a, b et c sont entiers, d qui est premier avec n est un diviseur commun aux trois nombres $p^2 - 6\,p^2q^2 + q^4$, $q^4 - p^4$ et $2\,pq\,(p^2+q^2)$. Il en résulte que $d = 1$ si p et q sont de parité différente, et que d est égal à 1, 2 ou 4 s'ils sont tous deux impairs.

Comme ces quadruplets assujettis aux conditions nécessaires que l'on vient d'exhiber conviennent visiblement, nous avons donc complètement déterminé les triangles pseudo-rectangles en A et obtus en B à côtés entiers.

Remarque On voit que l'on peut remplacer dans les formules précédentes le rationnel réduit $\dfrac{n}{d}$ par un rationnel de la forme $\dfrac{N}{D}$ avec N entier arbitraire et D égal à 1 ou 4 selon le cas.

On peut même avoir toujours 1 au dénominateur à condition d'accepter de permuter les formules donnant b et c et changer a en $-a$. En effet, si p et q sont impairs, les égalités $p' = \dfrac{q-p}{2}$ et $q' = \dfrac{q+p}{2}$ conduisent aux égalités $a = -N\,(p'^4 - 6\,p'^2q'^2 + q'^4)$, $b = N\,(2\,p'q')\,(p'^2+q'^2)$ et $c = N\,(q'^4 - p'^4)$ (ici $0 < q'(\sqrt{2}-1) < p' < q'$).

5. L'ensemble des solutions de l'équation diophantienne $x^2(y^2+z^2) = (y^2-z^2)^2$ est évidemment l'ensembles des entiers côtés de triangles pseudo-rectangles en A et obtus en B si l'on pose $a = x$, $b = y$ et $c = z$ ou $a = x$, $b = z$ et $c = y$ selon le signe de $y - z$. Il est donc défini par des formules absolument analogues à celles de l'énoncé, dédoublées pour tenir compte de la remarque précédente.

6. Il suffit de remarquer que, par homogénéité de l'équation, tout triplet rationnel solution est obtenu en multipliant par un rationnel strictement positif arbitraire tout triplet entier solution défini à la question précédente.

7. La résolution de cette dernière équation (que l'on pourrait d'ailleurs également regarder dans le corps des rationnels) est tout à fait analogue. Donnons seulement les grandes lignes. On pose ici $\rho > 0$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ avec $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$, d'où $x = \dfrac{\rho}{|\cos 2\theta|}\cdot$ Ici encore, on peut poser $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $0 < p < q$ (forme réduite) ce qui conduit aux relations

$$x = \frac{n}{d}\,(p^2+q^2)^3, \quad y = \frac{n}{d}\,(q^2-p^2)\,|p^4 - 6\,p^2q^2 + q^4|, \quad z = \frac{n}{d}\,(2\,pq)\,|p^4 - 6\,p^2q^2 + q^4|$$

avec $\dfrac{n}{d} = \dfrac{\rho}{(p^2+q^2)\,|p^4 - 6\,p^2q^2 + q^4|}\cdot$ Un travail analogue sur les diviseurs communs aux trois numérateurs mis ainsi en évidence montre que $d = 1$ si p et q sont de parité différente, et peut prendre les valeurs 1, 2, 4 ou 8 s'ils sont tous deux impairs, avec $D = 8$. On peut aussi faire des remarques analogues à celles qui concluent la question **4.**

Troisième partie

1. La rotation indiquée par l'énoncé consiste à remplacer le couple (x, y) des coordonnées avant rotation en le couple $\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \dfrac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$ où (x, y) représente maintenant le couples des coordonnées du même point après rotation. Elle transforme $\mathcal{H}$ en l'arc de l'hyperbole équilatère d'équation $2\,xy = 1$ défini par $x + y \geqslant \sqrt{2}$ et $y - x \geqslant 0$. L'aire $\mathcal{A}$ à calculer est celle de la partie du plan définie par $\sqrt{2} \leqslant x + y \leqslant r\sqrt{2}$ et $2\,xy \geqslant 1$, traduction exacte des anciennes relations $1 \leqslant x \leqslant r$ et $y^2 \leqslant x^2 - 1$.

Le réel $\mathcal{A}$ est donc la différence entre l'aire définie par le nouvel axe Ox, les droites $x = \dfrac{r-s}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{r+s}{\sqrt{2}}$ (abscisses des points d'intersection de la droite $x + y = r\sqrt{2}$ et de l'hyperbole $2\,xy = 1$) et la droite $y + x = r\sqrt{2}$, et l'aire définie par les trois mêmes premières droites et l'hyperbole. On trouve aussitôt $\mathcal{A} = r + s - \ln(r+s)$.

2. a) Faire le croquis demandé. On notera que les coordonnées des sommets du côté oblique du trapèze T_k sont respectivement $\left(\dfrac{u^{k-1}+u^{1-k}}{2}, \dfrac{u^{k-1}-u^{1-k}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{u^{k}+u^{1-k}}{2}, \dfrac{u^{k}-u^{1-k}}{2}\right)\cdot$ Le premier appartient à $\mathcal{H}$ et le second est situé en dessous de cette courbe (c'est-à-dire que son ordonnée est strictement inférieure à la racine carrée du carré de son abscisse diminué de 1) si $u > 1$, c'est-à-dire si $r > 1$).

b) Soit X la partie définie par $1 \leqslant x$ et $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x^2-1}$, d'aire $\mathcal{A}$, à laquelle on ajoute la plaque triangulaire ABC où B et C sont les points de coordonnées respectives $(r, 0)$ et $(r+s, 0)$, d'aire $\dfrac{s^2}{2}\cdot$ L'aire de X est alors $\dfrac{1}{2}\,(\mathcal{A} + s^2)$. Or la construction géométrique du a) montre que les trapèzes T_k sont deux à deux disjoints (sauf s'ils correspondent à des indices différents de 1 auquel cas leur intersection est réduite à un segment). La somme de leurs aires est donc inférieure à celle de X d'après les propriétés habituellement admise des aires planes, et tend vers l'aire de X si n tend vers l'infini, d'où l'explication demandée. Ce n'est toutefois qu'une conjecture, faute de connaissances précises sur les aires.

Remarque Tous les cours d'intégration présentent la notion de sommes de Riemann d'une intégrale (1854), qui servent notamment à donner des valeurs approchées d'une aire. Si l'on donne souvent, à la suite de Cauchy (1821), l'exemple de sommes associées à des points formant une suite arithmétique, il est très rare d'évoquer l'un de leurs ancêtres directs où la suite est géométrique. C'est pourtant grâce à elles que Fermat, comme le rappelle l'énoncé, a réussi à calculer quelques intégrales importantes. Cette partie du problème montre comment elles auraient pu le conduire à reconaître dans les logarithmes de John Napier (1614) l'outil nécessaire pour calculer les aires comprises entre un arc d'hyperbole équilatère et ses asymptotes.

c) Une démonstration possible d'une partie de cette conjecture consisterait à considérer d'autres trapèzes rectangles du même type, mais dont les côtés droits seraient cette fois-ci strictement extérieurs à $\mathcal{H}$ sauf pour un sommet qui, lui, serait sur $\mathcal{H}$. Alors l'aire de X serait encadrée par deux sommes finies, dont il est facile de voir qu'elles définissent des suites adjacentes. On sait qu'alors ces deux suites ont une même limite ; que cette limite soit l'aire de X repose sur une définition de l'aire d'une partie non polygonale du plan, dépassant le niveau de la classe de Terminale, mais très proche d'une intuition raisonnable qui aurait évidemment suffi à des hommes tels qu'Archimède ou Fermat (leurs œuvres le prouvent). C'est d'ailleurs par des suites adjacentes analogues que l'on détermine "élémentairement" l'aire d'un disque circulaire ou d'un segment de plaque parabolique.

d) Reste donc à calculer l'aire S_k d'un trapèze T_k et à les sommer. Les calculs sont mécaniques et donnent respectivement $S_k = \dfrac{u-1}{4}\,(u^{2k-1}+u^{2k-2}-2)$ et $S = \dfrac{u^{2n}-1}{4} - n\,\dfrac{u-1}{2} = \dfrac{(r+s)^2-1}{4} - n\,\dfrac{u-1}{2}\cdot$ On en déduit que $2\,S - s^2 = rs - n\,(u-1)$. Le nombre $\mathcal{A}$ est donc égal, si la conjecture est vraie, à rs diminué de la limite au voisinage de l'infini de $n\,(u-1) = n\big(\sqrt[n]{r+s}-1\big)$.

Soit $a = r+s$. Le réel $a_n = n\big(a^{1/n}-1\big)$ s'écrit encore $\dfrac{\mathrm{e}^{\,t\ln a}-1}{t}$ en posant $t = \dfrac{1}{n}$, qui tend vers 0. La dérivation de l'exponentielle montre que $n\big(a^{1/n}-1\big)$ tend donc vers $\ln a = \ln\,(r+s)$, ce qu'il fallait démontrer.

Les trapèzes évoqués au c) ont presque les mêmes aires, puisqu'elles s'écrivent sous la form $S'_k = \dfrac{u-1}{4}\left(u^{2k-1}+u^{2k-2}-\dfrac{2}{u}\right)\cdot$ Que les sommes des aires de ces trapèzes forment une suite adjacente à la précédente résulte facilement des calculs ci-dessus à partir de la limite de la suite $n\,(u-1)$.

Remarque La remarque selon laquelle $\ln a$ est la limite de la suite de terme général a_n peut donc parfaitement servir de point de départ à une théorie de la fonction logarithme népérien indépendante de l'existence d'une primitive pour toute fonction continue (quoique cette partie montre justement comment relier les deux). On peut ainsi montrer que, au moins pour $a > 1$, cette suite est décroissante et minorée, et que sa limite $\lambda\,(a)$ vérifie les égalités $\lambda\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ et la relation fonctionnelle $\lambda\,(ab) = \lambda\,(a) + \lambda\,(b)$ pour tout couple (a,b) de réels strictement positifs. La majoration $\ln a < a_2$ pour $a > 1$ donne aussitôt la limite de $\dfrac{\ln a}{a}$ quand a tend vers l'infini *etc.*

3. On sait par le **6.** c) de la première partie que A se trouve sur la partie $\mathcal{H}$ de l'hyperbole équilatère d'équation $y^2 = x^2-1$. L'aire S du triangle est évidemment égale à $y = \sqrt{x^2-1}$. L'aire S' de la portion de la plaque triangulaire formée de ses points dont l'ordonnée vérifie $Y \leqslant \sqrt{X^2-1}$ est égale à $\dfrac{\mathcal{A}}{2}$, diminué de l'aire d'un triangle rectangle de côtés parallèles aux axes et d'hypothénuse $[BC]$, égale à $\dfrac{(x-1)\,y}{2}\cdot$ Par suite $S' = \dfrac{1}{2}\,[y+\ln\,(x+y)]$ et déterminer une éventuelle limite du rapport $\dfrac{S'}{S}$ au voisinage de l'infini revient à déterminer une éventuelle limite de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln\,\big(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\big)}{\sqrt{x^2-1}}\cdot$ Or la très élémentaire majoration $\ln\,a < a$ montre que le nombre positif $\dfrac{\ln\,\big(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\big)}{\sqrt{x^2-1}}$ est majoré par $\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}}$, lui même majoré par $\sqrt{\dfrac{2\,x}{x^2-1}}$ qui tend vers 0. Il en résulte qu'une telle limite existe, et qu'elle est égale à $\dfrac{1}{2}\cdot$

Quatrième partie

1. a) Notons dès le départ que l'énoncé, qui ne dit pas comment distinguer B de C, est néanmoins cohérent puisque si un triangle AC est pseudo-rectange en A, il en va de même pour le triangle ACB. La question **2.** de la première partie et le fait que P soit extérieur au segment $[BC]$ montre qu'une condition nécessaire et suffisante s'écrit $PA^2 = PB.PC$. La théorie de la puissance d'un point par rapport à un cercle, ou la considération des triangles TPC et BPT semblables d'après la congruence (modulo π) d'angles de droites $(TP, TC) \equiv (BP, BT)$, ou un calcul analytique élémentaire montrent que $PB.PC = PT^2$. Il en résulte que l'on trouve exactement deux points solutions sur (D), définis par $PA = PA' = PT$, donc tels que les droites (TA) et (TA') parallèles à $\big(O; \overrightarrow{w}\big)$, qui existent puisque P n'est pas sur le cercle, fassent des angles de mesures $\dfrac{\pi}{4}$ ou $-\dfrac{\pi}{4}$ avec le plan d'équation $z = 0$.

b) Il suffit d'écrire $x^2 + y^2 + z^2 = OA^2 = OP^2 + PA^2 = OP^2 + PT^2 = 2\,OP^2 - OT^2 = 2\,(x^2 + y^2) - 1$.

2. a) La réciproque de la propriété qui veint d'être démontrée est presque vraie : tous les points tels que $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ appartiennent à $\mathcal{H}$, sauf ceux pour lesquels $z = 0$ (le cercle de diamètre $[BC]$). En effet, pour tout point A de cette forme avec $z \neq 0$, il est immédiat de construire sa projection orthogonale P, puis l'un des deux points T possibles et le couple (B, C) associé, et de vérifier que la construction de l'énoncé redonne bien A.

L'intersection demandée est donc l'ensemble vide si ce plan passe par O, et le cercle de centre $(0, 0, h)$ et de rayon $|h|$ si ce plan a pour équation $z = h \neq 0$.

b) Ici T, B et C sont fixes. D'après la fin de la première partie, l'intersection demandée est formée des points d'une hyperbole équilatère privée de ses deux sommets, c'est-à-dire justement des points B et C.

c) La question précédente vient de montrer que tout point A appartenait à une droite passant par un point du cercle et faisant un angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ ou son opposé avec le plan d'équation $z = 0$. Inversement tout point d'une telle droite, sauf celui de cote nulle, convient comme on le voit en considérant sa projection orthogonale P comme nous venons de le faire au a). Par suite $\mathcal{H}$ est bien inclus dans la réunion de ces droites. Il n'en diffère que par leurs points de cote nulle.

On aurait également pu remarquer que la surface d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ est la réunion des droites définies par le couple d'équations $\big(x + 1 = \lambda\,(y + z),\ z - y = \lambda\,(x - 1)\big)$, ainsi que celle des droites définies par le couple d'équations $\big(x - 1 = \mu\,(y + z),\ z - y = \mu\,(x + 1)\big)$.

Remarque On appelle ces droites des *génératrices* ; leur réunion, qui est la surface d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, est le plus simple des *hyperboloïdes de révolution à une nappe*.

3. a) Si x et y étaient tous deux pairs, il existerait un entier z dont le carré soit de la forme $4k - 1$, ce qui est impossible (il doit être multiple de 4 ou de la forme $8h + 1$).

b) Puisque x et y jouent le même rôle, la précision de l'énoncé est sans influence sur le problème posé. Ici $x + 1$ est donc pair ; il en est de même de $x^2 - 1$ et donc de $z^2 - y^2$, et donc de $z - y$ et $z + y$ qui sont de même parité. Par suite d doit être multiple de 2.

Supposons donc $d = 2\,\delta = \dfrac{x+1}{a} = \dfrac{z+y}{b}\cdot$ Les entiers strictement positifs a et b sont premiers entre eux et vérifient les égalités $2\,\delta a\,(2\,\delta a - 2) = x^2 - 1 = z^2 - y^2 = 2\,\delta b\,(2\,\delta b - 2y)$. Simplifiant par $4\,\delta$, le théorème de Gauß montre qu'il existe un entier relatif c vérifiant $\delta a - 1 = bc$ et $\delta b - y = ac$, soit $x = 2\,\delta a - 1$, $y = \delta b - ac$, $z = \delta b + ac$.

Réciproquement, l'entier strictement positif δ étant connu, pour tout entier strictement positif a, on peut décomposer l'entier $\delta a - 1$ sous la forme bc où b et c sont entiers strictement positifs (la seule exception serait pour $\delta = a = 1$, mais il suffirait alors de prendre $a > 1$). Les triplets (x, y, z) donnés par les formules ci-dessus sont tels que $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 4\,\delta a\,(\delta a - bc - 1) = 0$. Les nombres x et z sont visiblement strictement positifs ; si y est négatif, ce qui est possible comme le montre l'exemple $\delta = 3$, $a = 3$, $b = 2$ et $c = 4$, correspondant à $(17, -6, 18)$, il suffit de le remplacer par $-y$ pour obtenir un élément de $\mathcal{S}$. Comme il existe une infinité de choix pour a conduisant notamment à une infinité de nombres x, l'ensemble étudié est infini.

c) Soit donc $x = m \geqslant 3$. Notons que l'équation $x^2 = z^2 + 1$ est impossible car elle équivaudrait à $z = 0$ et $x = 1$; y n'est donc pas nul. Posons $m = 2\,p + 1$. Cherchons d'abord le nombre de couples solutions (m, y, z) avec $z > 0$ et y de signe quelconque. Si N est le nombre de diviseurs de $p+1$, c'est aussi le nombre de couples (δ, a) d'entiers strictement positifs tels que $m = 2\,\delta a - 1$. Si N' est le nombre de diviseurs de $p \geqslant 1$, c'est aussi le nombre de couples (b, c) d'entiers strictement positifs tels que $p = bc$. Il existe donc NN' quadruplets (δ, a, b, c) d'entiers positifs tels que $m = 2\,\delta a - 1$ et $\delta a - bc = 1$.

Il faut étudier si deux quadruplets distincts (δ, a, b, c) et (δ', a', b', c') peuvent conduire à des couples (y, z) et (y', z') égaux. Si c'est le cas, l'égalité $z - y = z' - y'$ implique $ac = a'c'$; en combinant avec $bc = b'c'$, il vient $ab' = a'b$. Le théorème de Gauß s'applique puisque $\delta a - bc = \delta' a' - b'c' = 1$; il implique $a' = a$ et $b' = b$, d'où $\delta' = \delta$ et $c' = c$. Il existe donc NN' couples (y, z) solutions distincts avec $z > 0$ et $y \neq 0$.

Il est évident, en regardant les formules, que les choix $\delta' = a$, $a' = \delta$, $b' = c$ et $c' = b$ donnent un quadruplet convenable très analogue à (δ, a, b, c), puisqu'alors $x' = x = m$, $y' = -y$ et $z' = z$. Puisque le nombre y est différent, ces deux quadruplets sont distincts. Il n'y a pas d'autre façon d'obtenir les relations $y' = -y$ et $z' = z$, car elles conduisent à l'égalité $y' + z' = z - y$, soit encore $\delta' b' = ac$, et l'égalité $bc = b'c'$ implique alors $\delta' b = ac'$. Le théorème de Gauß s'applique encore et montre qu'il existe un entier k tel que $\delta' = ka$ et $c = kb'$. On en déduit que $1 = (p + 1) - p = \lambda\,(aa' - bb')$, d'où $\lambda = 1$, c'est-à-dire $\delta' = a$ et $c' = b$, puis $a' = \delta$ et $b' = c$.

Finalement les NN' quadruplets (δ, a, b, c) possibles peuvent être regroupés exactement deux par deux pour donner le même z et la même valeur absolue à y. Il existe donc $\dfrac{NN'}{2}$ solutions dans $\mathbb{N}^*$ satisfaisant à $x = m$, où N et N' sont respectivement les nombres de diviseurs de $p + 1$ et p (notons, bien que cela ne soit pas indispensable, qu'un nombre de diviseurs n'est impair que si, et seulement s'il s'agit d'un carré parfait : ce qui ne peut effectivement être le cas à la fois pour p et pour $p + 1$).

Pour $m = 3$, on trouve $p = 1$, $N = 2$, $N' = 1$ et $\dfrac{NN'}{2} = 1$. La seule solution est $(3, 1, 3)$, le seul quadruplet est $(2, 1, 1, 1)$; on pourra vérifier que, conformément à la théorie ci-dessus, $(1, 2, 1, 1)$ donne la solution $(3, -1, 3)$ à rejeter.

Pour $m = 5$, on trouve $p = 2$, $N = 2$, $N' = 2$ et $\dfrac{NN'}{2} = 2$. Les deux solutions sont $(5, 1, 5)$ et $(5, 5, 7)$, les deux quadruplets sont $(3, 1, 1, 2)$ et $(3, 1, 2, 1)$.

Pour $m = 7$, on trouve $p = 3$, $N = 3$, $N' = 2$ et $\dfrac{NN'}{2} = 3$. Les trois solutions sont $(7, 1, 7)$, $(7, 4, 8)$ et $(7, 11, 13)$, les trois quadruplets sont $(4, 1, 1, 3)$, $(2, 2, 3, 1)$ et $(4, 1, 3, 1)$.

Pour $m = 5$, on trouve $p = 4$, $N = 2$, $N' = 3$ et $\dfrac{NN'}{2} = 3$. Les trois solutions sont $(9, 1, 9)$, $(9, 8, 12)$ et $(9, 19, 21)$, les trois quadruplets sont $(5, 1, 1, 4)$, $(5, 1, 2, 2)$ et $(5, 1, 4, 1)$.

Remarque On peut se demander quels sont les triplets entiers (x, y, z) situés sur une génératrice de l'hyperboloïde. Un calcul immédiat montre que λ et μ sont obligatoirement rationnels, et même de formes réduites respectives $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{\delta}\cdot$ Les points entiers d'une génératrice, par exemple du type $\dfrac{x+1}{y+z} = \dfrac{z-y}{x-1} = \lambda = \dfrac{a}{b}$, ont des coordonnées du type $x = x_0 + 2\,k\,ab$, $y = y_0 + k\,(b^2 - a^2)$ et $z = z_0 + k\,(b^2 + a^2)$ où k est un entier arbitraire, et forment donc une suite arithmétique. Une génératrice du type $\dfrac{x-1}{y+z} = \dfrac{z-y}{x+1} = \mu = \dfrac{c}{\delta}$ contient de même les points entiers dont les coordonnées sont du type $x = x_1 + 2\,h\,c\delta$, $y = y_1 + h\,(\delta^2 - c^2)$ et $z = z_1 + h\,(\delta^2 + c^2)$ où h est entier. Si l'on peut prendre $(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0)$, le point qui a ces triplets comme coordonnées est alors le point d'intersection des deux génératrices, et $x_0 = \dfrac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}$, $y_0 = \dfrac{1 - \lambda\mu}{\lambda + \mu}$ et $z_0 = \dfrac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu}\cdot$

Remarque On voit que, pour l'équation diophantienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, les solutions ne peuvent se définir de façon aussi simple que pour celles de la deuxième partie, puisque les quatre paramètres qui apparaissent dans la solution générale sont nécessairement liés par une relation de Bachet-Bézout et sont donc loin d'être arbitraires.