1. Géométrie

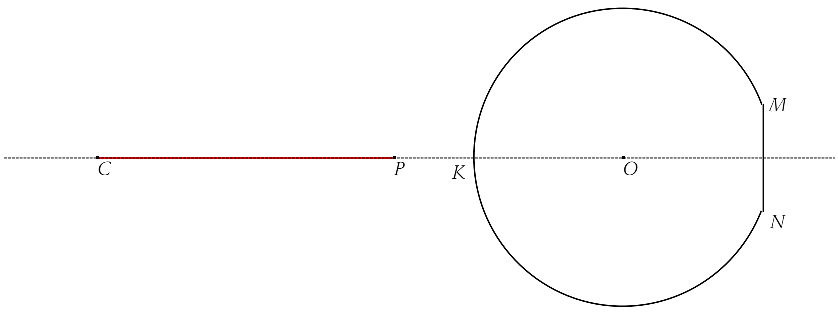
*1-2 : * Le Chien et le Visiteur (Olympiades académiques)*

En sortant de son phare le gardien a laissé la porte ouverte, mais il a laissé son chien *C* (féroce, voir sa photo plus bas) attaché à un piquet *P* situé à 2m du pied *K* du phare avec une chaîne *PC* de 10 m, à l'opposé de la porte dont l'ouverture *MN* mesure 1 m de large.

Je connais bien le gardien mais malheureusement le chien ne me connaît pas.

Vais je pouvoir entrer pour attendre mon ami ?

Le rayon de la base circulaire du phare est 3 m.



*1-3 : * Droite d'Euler*

La droite d'Euler d'un triangle est la droite passant par le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité.

On se donne deux points *A* et *B* ainsi qu'une droite (d). Construire le point *C* pour que (d) soit la droite d'Euler du triangle *ABC*.

1-4 : Triangle

Construire un triangle *ABC* connaissant le sommet *A*, l'orthocentre *H*, le centre *O* de son cercle circonscrit.

*1-5 : ** Diophante.fr D102*

On considère un triangle ABC quelconque. Soit un point P non situé sur les côtés du triangle. On prend le milieu M_1 de AP puis M_2 le milieu de BM_1 puis M_3 le milieu de CM_2 puis M_4 le milieu de AM_3 …. Où se placent les points M_n quand on répète l'opération une infinité de fois ?

1-6 : Angle inscrit

Démonstration du théorème de l'angle inscrit en utilisant les complexes.

1-7 : Triangle

Soit ABC un triangle. Construire un triangle $A'B'C'$ de sorte que A' soit le milieu de $[CC']$, B' celui de $[AA']$ et C' celui de $[BB']$.

1-8 : Centre de gravité

Construire deux triangles ayant le même centre de gravité.

1-9 : Trapèze

Dans un trapèze quelconque $ABCD$ où AB est parallèle à CD et $AB = a$, $CD = b$, déterminer la position des points M et N de sorte que MN soit parallèle à AB et l'aire de $ABNM$ soit égale à l'aire de $MNCD$.

1-10 : Droites

Soient trois droites concourantes. Comment construire un triangle dont les trois droites sont les médianes ?

Même questions lorsque les trois droites sont les hauteurs ; les bissectrices ; les médiatrices.

1-11 : Triangle isocèle

Peut-on construire un triangle isocèle connaissant la base et une de ses bissectrices intérieures ?

1-12 : Cercle

Quatre points A, B, C et D non alignés sont donnés dans le plan. Construire un cercle qui passe à égale distance de ces quatre points.

1-13 : Carré

$ABCD$ est un quadrilatère convexe. Construire un carré tel que chacun des côtés contienne un des sommets A, B, C ou D et un seul.

1-14 : Carré

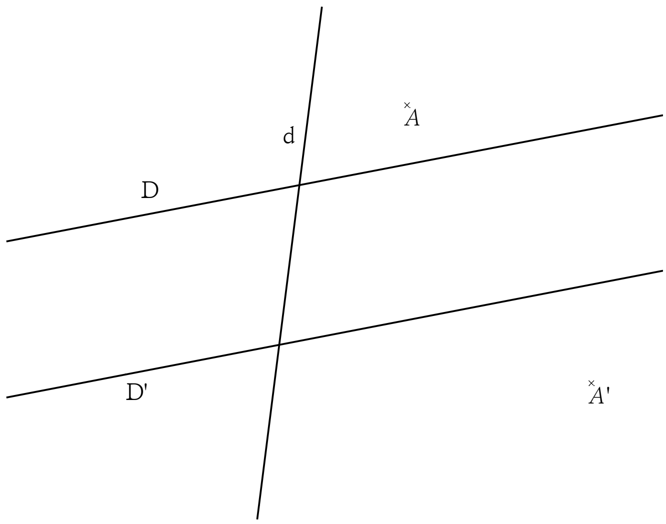
A, B, C, D sont quatre points non alignés. Construire à la règle et au compas un carré dont deux côtés opposés passent par A et B et les deux autres et les deux autres par C et D.

1-15 : Parallélogramme

On donne deux points A et B et deux droites (d) et (d') ; construire un parallélogramme $ABCD$ tel que C et D appartiennent respectivement à (d) et (d').

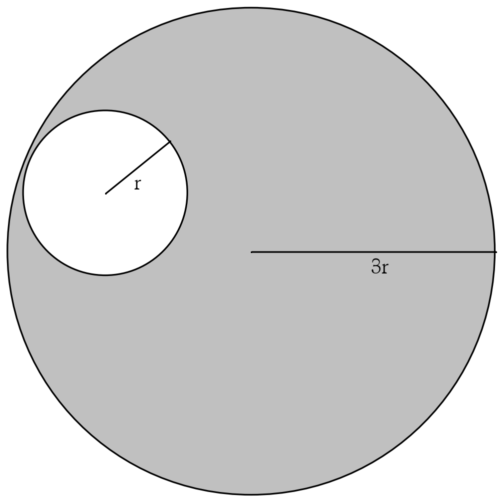
1-16 : Droites parallèles

Soient D et D' deux droites parallèles et d une droite sécante avec D et D'. Soient deux points *A* et *A'* extérieurs à la bande délimitée par D et D'. Construire *M* sur D et *M'* sur D' de sorte que *M* appartient à D, *M'* appartient à D', (*MM'*) est parallèle à d et *AM* = *A'M'*.



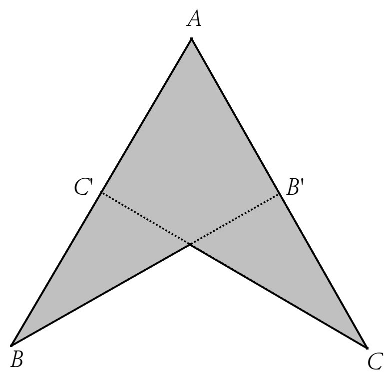
1-17 : Centre de gravité

Construire le centre de gravité de ce disque évidé à la règle et au compas.



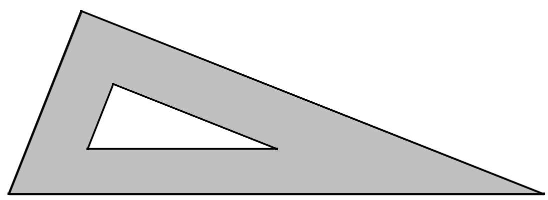
1-18 : Centre de gravité

ABC est un triangle équilatéral ; *B'* et *C'* sont respectivement les milieux de [*AC*] et [*AB*]. Construire à la règle uniquement le centre de gravité de cette plaque homogène.



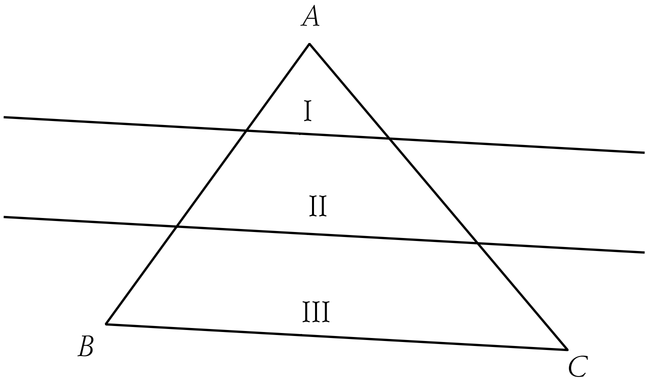
1-19 : Centre de gravité

Pouvez-vous construire à la règle et au compas le centre de gravité de l'équerre dessinée ci-contre ?



1-20 : Parallèles

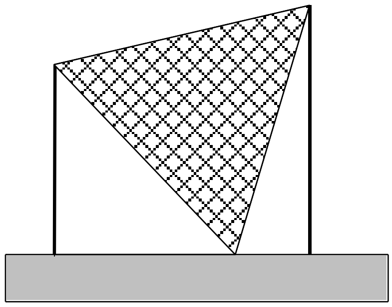
Soit ABC un triangle. Construire à la règle et au compas les droites (Δ_1) et (Δ_2) parallèles à (BC) de sorte que les aires I, II, III soient égales.



1-21 : Le drapeau triangulaire.

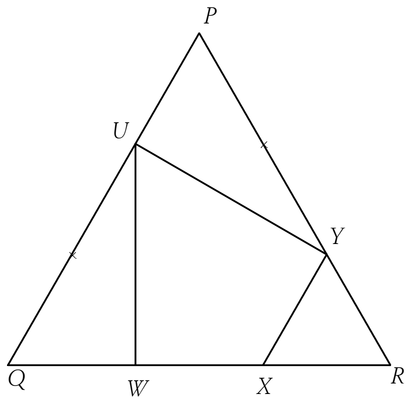
Un grand drapeau de la forme d'un triangle équilatéral est suspendu par deux de ses coins au sommet de mats verticaux de 3 et 4 mètres de haut. Le troisième coin affleure exactement au sol.

Quelles sont les dimensions exactes de ce drapeau ?



1-22 : Aire d'un quadrilatère

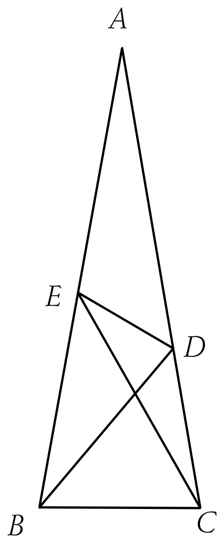
PQR est un triangle équilatéral, on divise chaque côté en trois parties égales. Evaluer $\dfrac{\text{aire}(UWXY)}{\text{aire}(PQR)}$.



1-23 : * L'Angle**

Le triangle *ABC* est isocèle de sommet *A* et $\widehat{BAC}=20°$. On a également $\widehat{BCE}=60°$ et $\widehat{CBD}=50°$.

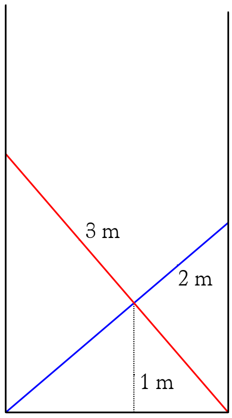
Combien vaut l'angle $\widehat{CED}$?



*1-24 : ** Le Couloir*

Deux échelles de 2 mètres et 3 mètres de long se croisent dans un couloir. Le point d'intersection est à 1 mètre du sol.

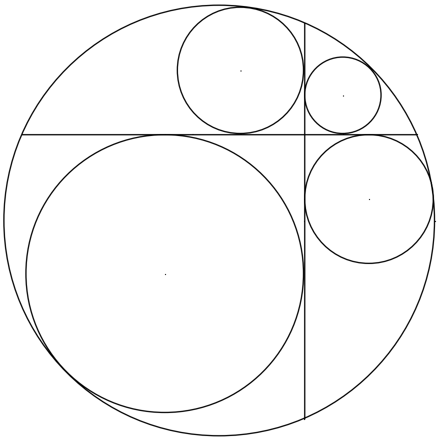
Quelle est la largeur du couloir ?



*1-25 : *** Câbles (Rallye d'Alsace1994)*

La construction du Tramway de Montpellier a nécessité d'enterrer 4 câbles. Une des solutions retenues a été de choisir une gaine de diamètre D compartimentée par deux parois perpendiculaires, les câbles étant collés aux parois.

Montrer que la somme des diamètres des 4 câbles est inférieure à $4(\sqrt{2}-1)D$.



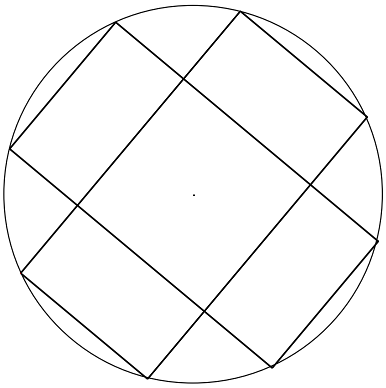
*1-26 : ** Sets de table*

On désire placer 4 sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon R

Ils ne peuvent ni se chevaucher ni dépasser de la table et sont disposés comme sur la figure.

On veut évidemment que ces sets soient d'aire maximale.

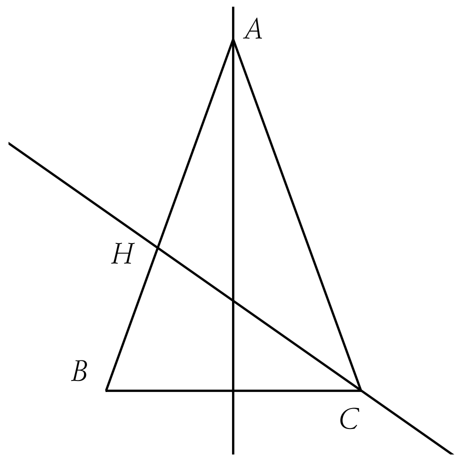
Quelles doivent être leurs dimensions ?



1-27 : Triangle isocèle

Le triangle ABC est isocèle, d'angle au sommet 40°, (CH) est la bissectrice de $\widehat{BCA}$.

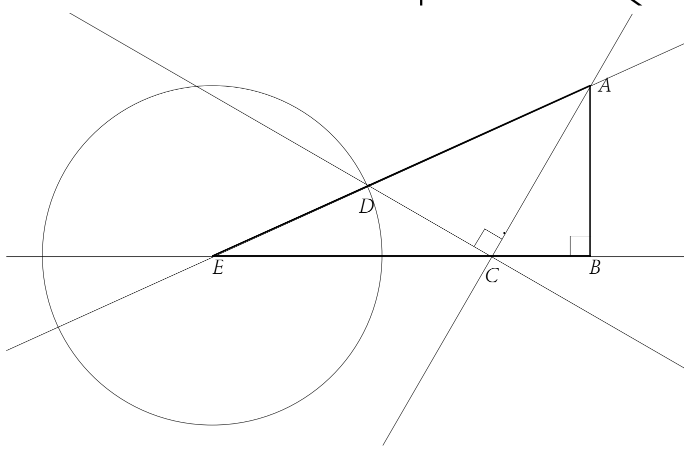
Trouver $\widehat{BHC}$.



1-28 : Pythagore

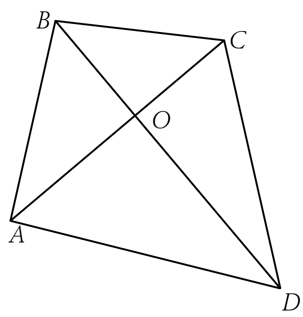
On connaît $CB=1/2$, $AB = 1$, $ED = 1$.

Combien vaut AD ?



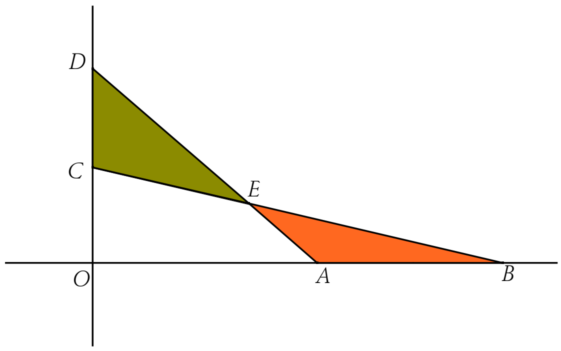
1-29 : Quadrilatère

On connaît les aires des triangles BOC : a, COD : b, AOD : c. Quelle est l'aire de AOB (suivant que l'angle en O est droit ou non…) ?



1-30 : * Aires

A quelle condition les triangles ABE et CDE ont-ils la même aire ?



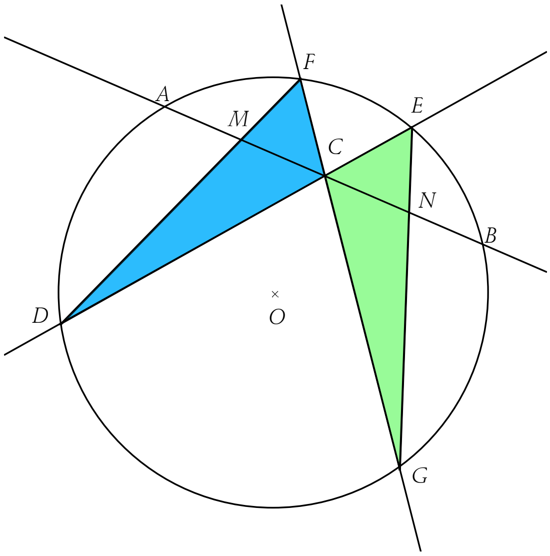
1-31 : ** Diophante.fr D118

Soit un cercle de centre O et une corde AB de milieu C.

Par ce point passent deux autres cordes DE et FG.

Les cordes DF et EG coupent AB en M et N.

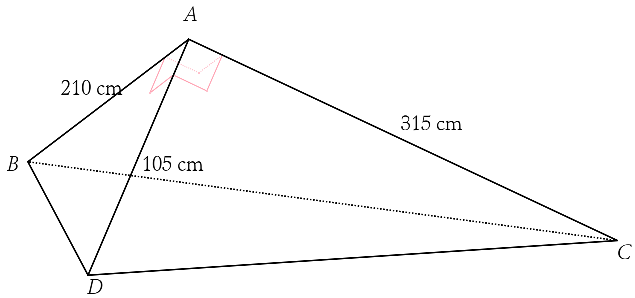
Démontrer que C est milieu de MN.



1-32 : ** Diophante.fr D306 / Donald B. Eperson – Revue Symmetry Plus n°10 Automne 1999

Pour aller camper sur les bords du Nil, Diophante s'est équipé d'une tente montée sur trois tiges AB, AC et AD qui ont respectivement pour longueurs 210 cm, 315 cm et 105 cm. Les trois tiges reposent sur le sol en B, C et D et sont perpendiculaires entre elles au sommet de la tente.

Quelle est la hauteur de cette tente ?

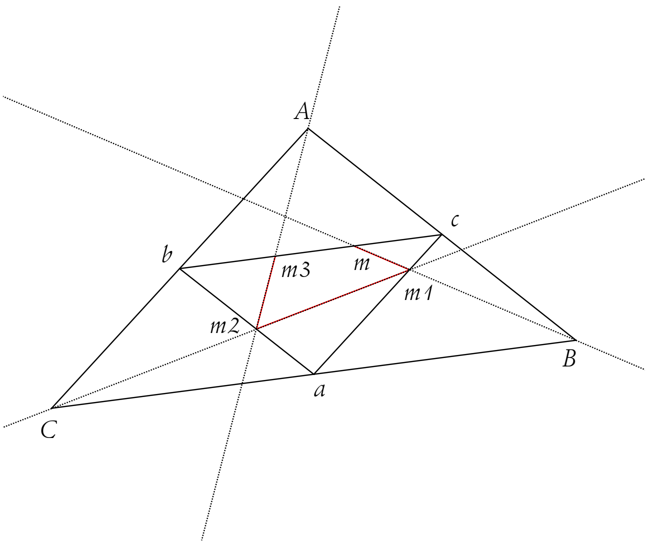


1-33 : ** Arachnides… (Rallye de première, Alsace 96)

Le professeur Spidermaths a découvert que l'espèce d'araignée Araneida Dreiecka tisse sa toile de la manière suivante :

- elle place trois fils formant un triangle ABC,
- elle place trois nouveaux fils aux milieux des côtés de ABC formant un triangle abc,
- elle part d'un point sur bc, va vers C, arrive sur ab, repart vers B, arrive sur ac, repart vers A, etc.

Peut-elle retomber à son point de départ ?



1-34 : Triangle équilatéral

On donne trois droites strictement parallèles. Construire un triangle équilatéral dont les sommets appartienent à chacune des droites.

1-35 : Similitude

Dans le plan, on considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ tels que $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On désigne par M le milieu de $[AC]$ et par N celui de $[BD]$. On appelle (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

On construira la figure au fur et à mesure des besoins.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles (C_1) et (C_3).

b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles (C_2) et (C_4).

c. Quelle est la nature du quadrilatère $INJM$? On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2. Soit s la composée de l'homothétie de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et de la rotation r de même centre et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de $[PR]$.

1-36 : Napoléon

On considère un triangle ABC direct de centre de gravité O.

On construit les triangles équilatéraux CBA', ACB' et BAC' tels que les angles $\left(\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'B}\right)$, $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'C}\right)$, $\left(\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{C'A}\right)$ aient pour mesure $+\frac{\pi}{3}$. On désigne par F, G et H les centres des triangles équilatéraux.

1. Quelle semble être la nature du triangle FGH ?

2. a. Soit R la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Déterminer R(C') et R(C). En déduire que $CC' = BB'$ et que $\left(\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{BB'}\right)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

b. Vérifier puis montrer que $\overrightarrow{HO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$.

c. Vérifier puis montrer que $OH = OG$ et $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OG}\right)=-\frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

d. Conclure.

1-37 : Ptolémée

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.

1. On désigne par E le point de (BD) tel que les triangles ACD et ABE soient semblables. Justifier l'existenec de E. Construire E.

2. Montrer que AD × BC = DE × AC.

3. a. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ (modulo 2π) puis que $\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}$.

b. Montrer que les triangles ABC et ADE sont semblables.

c. Prouver que AB × CD = AC × BE.

3. En déduire la relation : AC × BD = AB × CD + AD × BC.

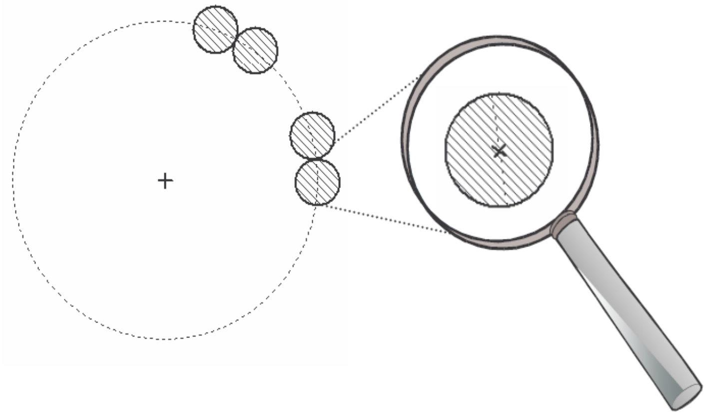
1-38 : ** Le collier de perles (Olympiades académiques 2007)

Un collier est composé de n perles de rayon r.

Hypothèse : il y a suffisamment de perles pour que l'on puisse schématiser le collier comme la figure ci-dessous et donc considérer que la longueur de fil du collier (représenté en pointillés) nécessaire pour chaque perle est égale à $2r$.

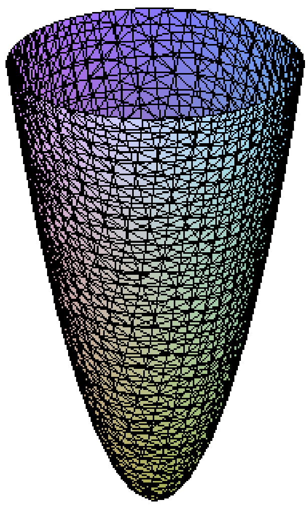
Calculer alors le rayon R du collier en fonction de n et r.

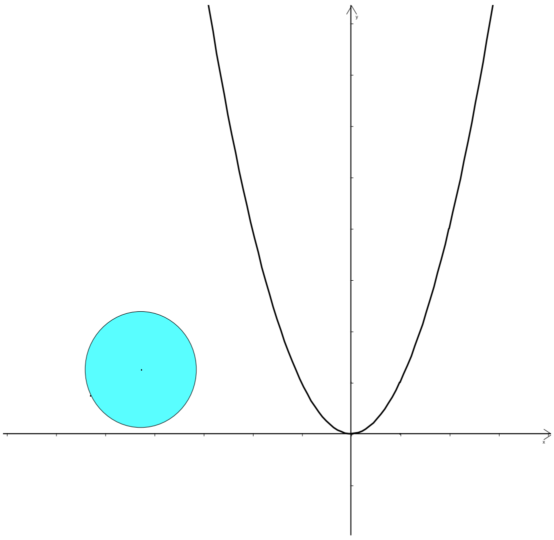
Que pensez-vous de la validité de l'hypothèse choisie ci-dessus quand $n=10$; quand $n=20$?



1-39 : * Chute des corps (Olympiades académiques 2007)

Une urne a la forme d'un paraboloïde de révolution de hauteur 9 cm. La section de ce paraboloïde par un plan passant par son axe est la parabole dont une équation dans un repère orthonormal bien choisi est $y=x^2$.





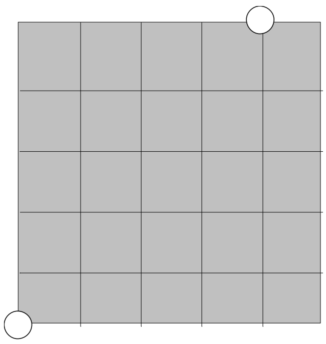
1. On fait tomber dans l'urne une bille sphérique B de rayon 0,1 cm. La bille va-t-elle toucher le fond de l'urne ?

2. On fait tomber dans l'urne une seconde bille sphérique B' de rayon 1 cm. La bille B' va-t-elle toucher la bille B ?

1-40 : Les arbres (Kangourou)

On se donne le quadrillage suivant :

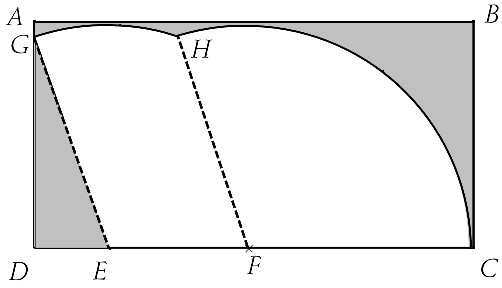
Placer quatre autres pions blancs sur des intersections de sorte que toutes les distances entre tous les pions soient différentes.



1-41 : Les essuie-glaces

Le pare-brise d'une voiture est un rectangle. Les essuie-glaces de mêmes longueurs sont schématisés par les segments [*EG*] et [*FH*].

Quelle est l'aire balayée par les essuie-glaces en pourcentage de l'aire du pare-brise ? La distance *AG* est égale à la distance de *H* à (*AB*) et les cercles sont tangents à (*AB*).

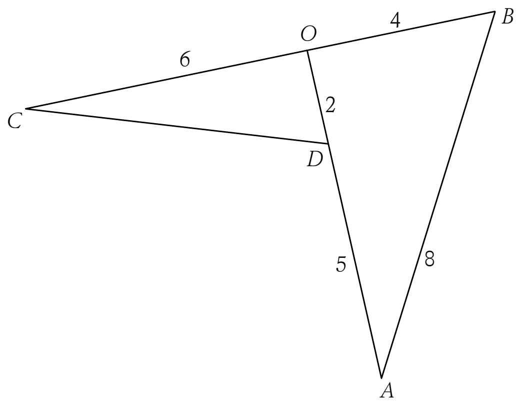


1-42 : La tarte

Après le passage des monstres la tarte avait cette forme.

Les parents décident de se venger et de manger le reste : Papa prend *OCD*, Maman prend *ABO*.

Quelle aire chacun va-t-il s'enfiler ?



1-43 : Les villes

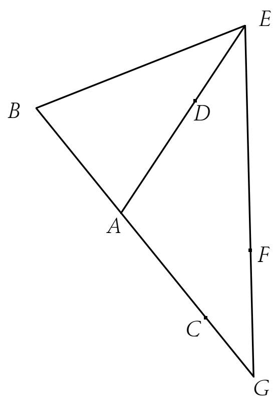
Les villes *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* sont situées de sorte que

$AB = AD = AC = AF = 24$ km

et

$EB = EA = EF = 40$ km.

Quelle est la distance entre *F* et *G* ?

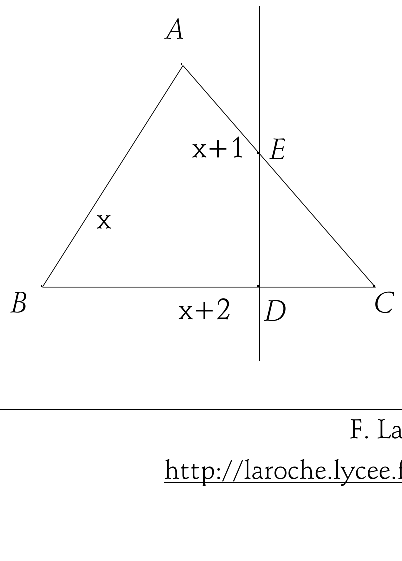


1-44 : Le partage

x est un réel positif.

On doit partager un triangle *ABC* dont les côtés mesurent x, $x+1$ et $x+2$ en deux aires égales par un segment *DE* perpendiculaire à *AB*.

Quelle doit être la position de *D* ?



1-45 : Le terrain

Je possède un terrain en forme de pentagone non régulier. Il y a deux grands côtés consécutifs perpendiculaires de 100 m de long chacun et trois petits côtés de même longueur. L'un de ces petits côtés est parallèle à un des grands côtés.

Enfin mon terrain a une aire d'un demi hectare.

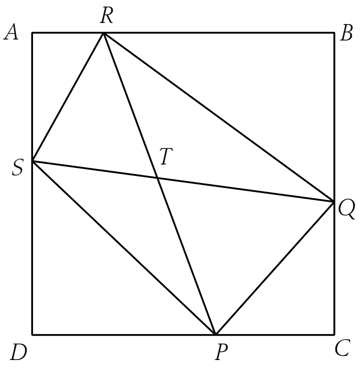
Quel est le périmètre de mon terrain ?

1-46 : Le quadrilatère

Sur les côtés d'un carré ABCD on place les points PQRS de sorte que

$SR=6, SP=10, SQ=14, \widehat{PSR}=\frac{2\pi}{3}, \widehat{RTS}=\frac{\pi}{3}$.

Quelle est l'aire du carré $ABCD$?

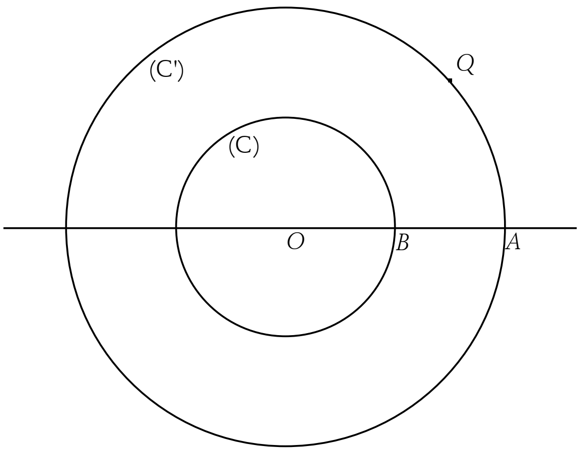


1-47 : Un angle

Le cercle (C') a pour rayon OB où B est le milieu de OA.

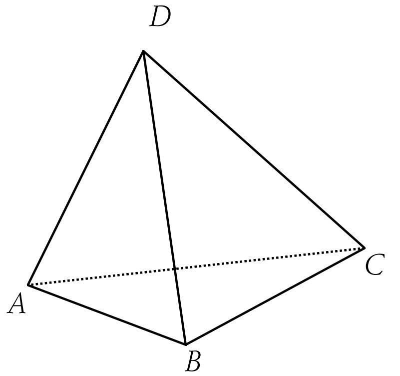
P est un point du cercle (C) ; le point Q a été choisi de sorte que l'angle $\widehat{OQP}$ soit le plus grand possible.

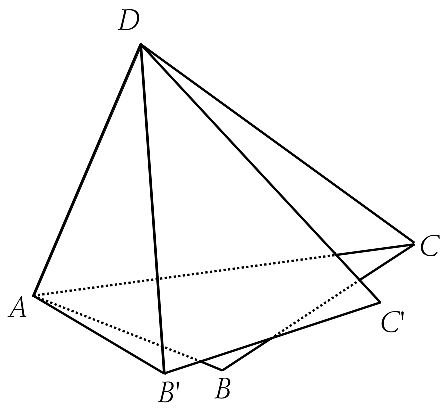
Combien vaut cet angle ?

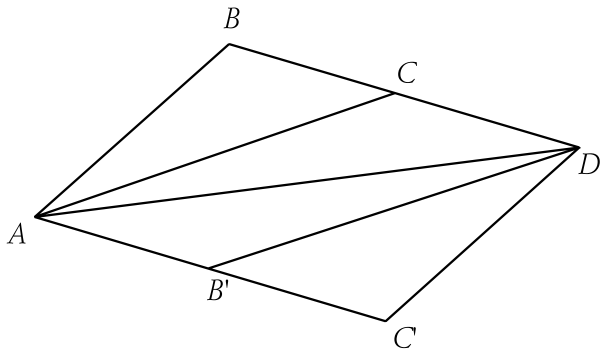


1-48 : Le tétraèdre aplati

Un tétraèdre en carton ABCD a été découpé le long des arêtes AB, BC et CD. On l'a ensuite mis à plat, ce qui a donné un rectangle de 9 sur 5. Quel était le volume du tétraèdre ?







1-49 : Un triangle

Un triangle ABC a pour côtés AB = 10 et AC = 26.

Quelle longueur doit-on donner à BC pour que le plus petit angle du triangle ABC soit le plus grand possible ?

1-50 : Le p'tit bois derrière cheu moué

Avec mes deux sœurs, nous avons acheté trois terrains carrés jouxtant chacun par un côté un bois de forme triangulaire.. Le triangle du bois, qui n'est pas isocèle, a une particularité : les tangentes de ses trois angles sont des nombres entiers.

D'autre part, un côté de ce bois, ni le plus grand, ni le plus petit, mesure 400 m.

Quelle est la somme des aires des terrains ?

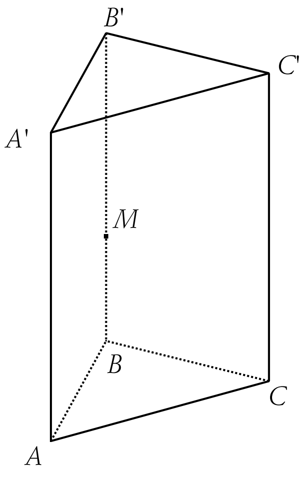
1-51 : Les miroirs du prisme

Les parois intérieures d'une boîte en forme de prisme droit sont constituées de miroirs.

La base ABC est un triangle isocèle rectangle en B, tel que AB = 1 m.

D'un point M situé sur une arête verticale, on émet un rayon lumineux orthogonal à cette arête, qui se reflète plusieurs fois sur les parois latérales du prisme avant de toucher à nouveau une arête.

Sachant que le rayon lumineux a parcouru 13 mètres, combien de fois s'est-il réfléchi ?

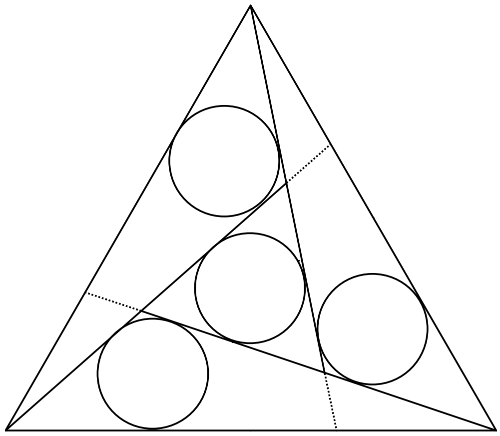


1-52 : Une construction de ouf !

Par un hasard extraordianire j'ai réussi à construire la figure ci-contre :

Le triangle principal est équilatéral, les segments sont tangents aux cercles, les cercles ont mêmes rayons.

Quel est ce rayon ?



1-53 : L'ouvre-porte

Devant l'ouvre-porte de l'immeuble de Chloé, Léa et Jules sont bien embêtés : ils ont encore oublié de noter cet idiot de code !

Jules : « Je sais que le code est pair et qu'il a trois chiffres dont je me souviens ».

Léa : « Ah oui, j'avais d'ailleurs remarqué que le nombre formé par ces trois chiffres est égal au triple du produit de deux nombres consécutifs augmenté de 1. »

Jules : « Ca va encore prendre du temps à essayer les combinaisons. Heureusement il n'y en a pas beaucoup. »

Quiels sont ces trois chiffres ?

1-54 : La grille

On dispose d'une grille de 19 lignes et 98 colonnes.

On écrit l'alphabet dans l'ordre ligne par ligne, une lettre par case, et en répétant l'alphabet autant de fois que nécessaire pour remplir la grille.

Dans une grille identique on fait la même chose mais colonne par colonne.

On noircit les cases comportant la même lettre dans les deux grilles. Combien y-a-t'il de cases noires ?

1-55 : Les classes de première (Olympiades académiques 2008)

Dans un lycée, les classes de première sont numérotées ainsi : 1$^{\text{ère}}$ 1, 1$^{\text{ère}}$ 2 …et ainsi de suite.

Pour n'importe quelle classe, sauf pour la dernière, si on ajoute deux fois le nombre d'élèves de cette classe au nombre d'élèves de la classe suivante, on trouve 64. (Propriété P).

Le nombre de classes de première de ce lycée est le plus grand vérifiant la propriété P.

Quel est le nombre de classes de première de ce lycée ?

Combien y a-t-il alors d'élèves en 1$^{\text{ère}}$ 1 ?

*1-56 : * Des carrés parfaits (Olympiades académiques 2007)*

1, 4, 9, 16, 25….. sont des carrés parfaits.

2, 3, 5, 6, 7…….. ne sont pas des carrés parfaits.

Le but de l'exercice est de déterminer des entiers naturels non nuls a et n (avec $a < n$) de telle sorte que les trois entiers naturels distincts $n - a$, n et $n + a$ soient des carrés parfaits.

Le triplet $(n - a, n, n + a)$ est appelé une solution du problème.

1. Peut-on trouver une solution pour $n = 9$? Pour $n = 16$? Pour $n = 25$?

2. Soit k, p, q, r des entiers strictement positifs.

Prouver que si $\left(p^2, q^2, r^2\right)$ est une solution du problème alors $\left((kp)^2, (kq)^2, (kr)^2\right)$ en est une autre.

3. En déduire trois solutions du problème.

4. Trouver une solution du problème telle que $n + a = 529$.

5. On cherche toutes les solutions de la forme $\left(1, q^2, r^2\right)$.

A l'aide d'une calculatrice, trouver toutes les solutions telles que $q \leq 250$.

*1-57 : ** Diophante.fr I120 / Philippe Paclet - Jeux et Stratégie n°9 Juillet –Août 1981*

Un planteur de bananes ne dispose que d'un vieil éléphant pour transporter ses bananes. L'animal consomme une banane au kilomètre et n'accepte de porter que 1000 bananes au plus sur son dos.

Le plus proche marché se trouve à 1000 kilomètres de la plantation.

La production est de 5000 bananes. Combien de bananes au maximum, ce planteur pourra-t-il mettre en vente sur le marché ? Quel est le coefficient de perdition (bananes consommées par l'éléphant/bananes produites) ?

Mêmes questions avec 10000 bananes.

Mêmes questions avec 25000 bananes.

Que peut-on en conclure sur le coefficient de perdition si le nombre de bananes à transporter devient très grand ?

1-58 : ** Ecriture décimale (Rallye d'Alsace Terminale 1996)

Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer sans l'aide d'une calculatrice les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de 97^{1996}.

1-59 : *** Heures de cours (Rallye d'Alsace Terminale 1994)

Madame Lacraie, prof. de Maths, enseigne dans deux classes de même niveau ayant chacune deux heures de maths par semaine. La classe A a une heure le lundi et une heure le jeudi. La classe B a une heure le mardi et une heure le vendredi.

Normalement Mme Lacraie traite un paragraphe par heure, mais lorsqu'elle refait le même cours, elle va deux fois plus vite.

Au bout de 10 semaines combien de paragraphes auront été traités dans chaque classe ? Au bout de n semaines ?

1-60 : ** Histoire d'œufs (Rallye d' Alsace Terminale 1995)

Il est bien connu que les Shadocks pondent des œufs. Pour pondre un œuf ils doivent compter jusqu'à 4 ou plutôt, quand un Shadock compte régulièrement, il pond un œuf à chaque multiple de 4.

Le Ministre des Pontes a chargé son Conseiller de compter tous les œufs entreposés dans la réserve du ministère. Le conseiller résussit tant bien que mal à compter 1995 œufs. Combien y avait-il d'œufs dans la réserve initialement ?

1-61 : *** Diophante.fr F101. Nombres croisés – Grille n° 01

A : carré plus grand que celui du e

B : carré

C : multiple de 7 et 11

D : multiple de 7 et 11

E : multiple de 5

F : multiple de 11

G : multiple de 13

e : multiple de 6 nombres premiers consécutifs

g : carré

h : carré

i : le produit des chiffres vaut 362 880

Les 18 nombres A, B, …h, i sont tous anagrammes du même nombre.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A									
B									
C									
D									
E									
F									
G									
H									
I									

1-62 : * Diviseurs

Un nombre N s'écrit $N = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots$ où les a_i sont des nombres premiers.

1. Quel est le nombre de diviseurs de N ?

2. Donner une expression de la somme S des diviseurs de N.

1-63 : ** « Qui a vu verra »

A. Champ de vision simple.

Soit E l'ensemble des points dont les coordonnées sont des entiers relatifs. Soient P et Q deux points de E. On dit que Q est dans le champ de vision de P si et seulement si l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et $\vec{i}$ (premier vecteur de base) est compris entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ (inégalité au sens large).

1. L'ordre de la vision.

a. Montrer que tout point est dans son champ de vision (On conviendra que le vecteur nul fait un angle nul avec n'importe quel vecteur).

b. Montrer que si R est dans le champ de vision de Q et que si Q est dans le champ de vision de P, alors R est dans le champ de vision de P.

c. Montrer que si Q est dans le champ de vision de P et si P est dans le champ de vision de Q, alors les points P et Q sont confondus.

2. Soit A, l'ensemble des points (p, q) de E tels que $p^2+q^2 \leq 4$.

a. Y a-t-il des points de A qui peuvent être vus par tous les autres points de A ?

b. Y a-t-il des points de A qui peuvent voir tous les autres points de A ?

c. Quels sont les points de A qui ne peuvent être vus par aucun autre point de A ? (hormis eux-mêmes)

d. Quels sont les points de A qui peuvent voir un maximum d'autres points de A ?

3. Reprendre le A.2. avec l'ensemble B des points (p, q) de E tels que $p^2+q^2 \leq 5$.

B. Champ de vision limité (pour ceux qui sont myopes).

Soit E l'ensemble des couples d'entiers relatifs. Soient P et Q, deux points de E. On dit que Q est dans le champ de vision de P si et seulement si l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et $\vec{i}$ est compris entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ (inégalité au sens large), et si la distance de P à Q est strictement inférieure à 2.

Reprendre les questions posées au A.1. Il se peut que certaines affirmations soient dans ce cas fausses.

C. Double champ de vision symétrique (pour ceux qui ont aussi des yeux dans le dos).

Soit E l'ensemble des couples d'entiers relatifs. Soient P et Q deux points de E.

On dit que Q est dans le champ de vision de P si et seulement si l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et $\vec{i}$ est compris entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, ou bien si l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{QP}$ et $\vec{i}$ est compris entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.

Reprendre les questions posées au A.1. en remplaçant la question A.1.c. par :

c. montrer que si Q est dans le champ de vision de P alors P est dans le champ de vision de Q.

D. Double champ de vision non symétrique (pour ceux qui ont des petits yeux dans le dos).

Soit E l'ensemble des couples d'entiers relatifs. Soient P et Q deux points de E.

On dit que Q est dans le champ de vision de P si et seulement si l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et $\vec{i}$ est compris entre $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, ou bien si l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{QP}$ et $\vec{i}$ est compris entre $-\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{\pi}{12}$.

Reprendre les questions posées au A.1.a, b., c. sous ses deux formes. Il se peut que certaines affirmations soient dans ce cas fausses.

1-64 : La boum

DJ Raymond a devant lui trois interrupteurs pour commander à 100 lampes numérotées de 1 à 100.

- La touche n°1 change l'état de toutes les lampes : celles qui étaient allumées s'éteignent et vice-versa.
- La touche n°2 change l'état de toutes les lampes portant un numéro impair.
- La touche n°3 change l'état de toutes les lampes portant un numéro de la forme $3k+1$.

Au début toutes les lampes étaient allumées puis DJ Raymond a appuyé de manière aléatoire 1000 fois sur un interrupteur. A la fin de la soirée les lampes 95 et 96 étaient éteintes. Combien de lampes étaient encore allumées ?

1-65 : Un cube

Le cube d'un nombre entier a cinq fois plus de diviseurs que ce nombre. Combien de diviseurs a le carré de ce nombre ?

1-66 : La calculette pour les nuls

Lorsque je rentre deux nombres a et b et que j'appuie sur +, ma machine à calculer minable me donne seulement le chiffre des unités de $a+b$. Puis elle se met à dérailler et ajoute les deux derniers nombres affichés et affiche le chiffre des unités du résultat. Après avoir introduit a puis b ($a < b$), la machine affiche les 4 mêmes chiffres indéfiniment. Que valaient a et b ?

1-67 : Les carreaux

- J'ai douze petits carreaux. Combien de pavages de 12 carreaux rectangulaires différents (sans tenir compte des rotations, symétries, etc.) puis-je former ?

- J'ai réussi à former 6 pavages rectangulaires différents : combien avais-je de petits carreaux ?

1-68 : Sommez

On donne la somme 1+2+3+…+94+95+96. Si on supprime des signes d'addition, par exemple 2+3 devient 23 ou 2+3+4+5 devient 2345 on obtient une nouvelle somme.

Quel est le nombre minimum de + à supprimer pour obtenir 9696 ?

1-69 : Classement

Dans un concours les candidats doivent résoudre 42 exercices.

Chaque problème est affecté d'un coefficient : 1 pour le 1er exercice, 2 pour le 2ème, 3 pour le 3ème, …

On effectue alors le classement en partant de la gauche : les deux premiers chiffres indiquent le nombre d'exercices résolus, les trois derniers le total des coefficients obtenus.

Par exemple Lucien a résolu les problèmes 5, 10 et 23 : son classement est 03038.

Combien aura-t'on de résultats possibles ?

1-70 : Partage

J'ai une habitude de partage avec mon petit frère Onésime un peu étrange : si on nous donne un paquet de bonbons, j'en prends la moitié et je mets de côté l'autre moitié. S'il en reste un c'est pour Onésime.

Puis je recommence avec la partie mise de côté. Par exemple il y a 15 bonbons, j'en prends 7, Onésime 1, il en reste 7 dont je prends 3, Onésime 1, il reste 3, j'en prends 1, Onésime 1 et le dernier est quand même pour Onésime (je suis assez généreux dans le fond puisqu'il aura toujours au moins un bonbon).

Sachant qu'un paquet de bonbons ne peut en contenir plus de 2000, combien Onésime doit-il demander de bonbons dans un paquet pour en manger le plus possible ?

1-71 : * Robinets

On dispose de trois robinets A, B et C pour remplir une piscine. A et B ensemble mettent 2 heures, B et C mettent ensemble 1 h 30 mn, A et C mettent 2 h 30 mn. Combien de temps mettra chaque robinet ? Les trois ensemble ?

1-72 : * Poker

Trois joueurs font une partie de poker. Quand un joueur perd, il double la mise de chacun des autres joueurs. Ils jouent trois parties et chacun en perd une. A la fin de ces trois parties, chacun se retrouve avec 400 €. De combien disposait chaque joueur au départ ?

1-73 : ** Comparons

Soient quatre réels a, b, c, d tels que $a < b < c < d$.

On pose $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$.

Comparer les nombres x , y et z .

1-74 : *** Inéquation (Rallye d'Alsace 1996)

On fixe deux réels positifs a et b. Montrer que si a et b sont inférieurs ou égaux à 2, alors $a^b + b^a > ab$.

1-75 : Equation (Rallye d'Alsace 1994)

Déterminez x, y, z entiers tels que $x^{(y^z)}y^{(z^x)}z^{(x^y)} = 1994^{1994}xyz$.

1-76 : Divers

1. On augmente de 30 % la longueur et la largeur d'un rectangle. De quel pourcentage augmente sa superficie ?

2. Si on écrit en notation décimale $100^{33} - 33$ quelle est la somme de chiffres de ce nombre ?

3. De quel pourcentage faut-il augmenter la longueur des côtés d'un rectangle pour que sa superficie soit augmentée de 44 % ?

6. On a un rectangle de côtés 2 et 5 ; dessiner un rectangle dont l'aire est 30 % plus grande.

7. Quel est le quotient de 2^{2^3} par $\left(2^2\right)^3$?

8. Ecrire $\dfrac{8^{-3}}{2^{-5}}$ comme une puissance de 4.

11. Trouver deux entiers distincts non nuls a et b tels que $7560a = b^2$.

12. Si $x + \dfrac{1}{x} = 7$, que vaut $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$?

13. Résoudre l'équation $3^x - 3^{x-3} = 78\sqrt{3}$.

14.

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 ……………………

Quelle est la ligne et la colonne de 795 471 ?

1-77 : ** Diophante.fr A128

A titre de zakouski, quelle est la valeur simplifiée de la somme de ces trois radicaux :

$\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{13-2\sqrt{42}} + \sqrt{29+4\sqrt{7}}$?

A titre de plat de résistance, quelle est la valeur de l'expression ci-après ?

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt[5]{76\left(\sqrt[3]{1+2\frac{\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{1-2\frac{\sqrt{21}}{9}}\right)+44\sqrt{\sqrt[3]{6+11\frac{\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{6-11\frac{\sqrt{21}}{9}}}}+\sqrt[5]{76\left(\sqrt[3]{1+2\frac{\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{1-2\frac{\sqrt{21}}{9}}\right)-44\sqrt{\sqrt[3]{6+11\frac{\sqrt{21}}{9}}+\sqrt[3]{6-11\frac{\sqrt{21}}{9}}}}\right]$$

PS : L'usage d'une calculette ou d'un ordinateur est évidemment interdit…

1-78 : * Diophante.fr A230

Comment partager un carré en deux rectangles dont le plus petit peut s'insérer dans le plus grand avec chacun de ses sommets placés sur chacun des côtés du plus grand.

1-79 : * Diophante.fr E110

Sachant que : $x_{n+3}=x_{n+2}(x_{n+1}+x_n)$, $x_0\in\mathbb{N}$, $x_1, x_2\in\mathbb{N}^*$, $x_8=1152$, que vaut x_{10} ?

1-80 : * Diophante.fr E101

Quels sont les nombres de la série ci-après qui sont remplacés par A et B ?

A, 1, 2, 5, 12, 28 ,65, 151, 351, B

1-81 : Développement décimal / B. Lachambre

Quel est le développement décimal du carré du nombre rationnel dont le développement décimal illimité est 1,001 001 001 ... ?

Prolongement : les nombres de chiffres des périodes de a et de a^2 laissent à penser que si n est un rationnel dont l'écriture décimale illimitée à une période de k chiffres, et si p est un entier naturel, alors $\frac{n}{p}$ a une écriture décimale illimitée dont la période a un nombre de chiffres au plus égal à kp.

http://artic.ac-besancon.fr/mathematiques/pb-1001carre/index.htm

1-82 : Equation

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=4$ (poser $A^4 = 41 + x$, $B^4 = 41 - x$).

1-83 : Le ballon

Trois amis ont acheté ensemble un ballon pour 45 euros. Le premier a moins payé que les deux autres réunis, le deuxième a payé une somme inférieure ou égale à la moitié de celle payée par les deux autres réunis, quand au troisième, il a payé une somme inférieure ou égale au cinquième de celle payée par les deux autres réunis.

Combien chacun a-t-il payé ?

1-84 : Prisunic

Dans la boutique de Marie-Lou tout est à un prix entier d'euros.

Elle décide de faire une promo « Tout à 10 euros » avec une règle quand même :

si un client achète plusieurs exemplaires d'un produit qui vaut moins de 10 euros, il paye dix euros par objet mais avec une remise égale au prix d'un des objets (par exemple 3 gâteaux à 8 euros seront payés 3.10–8=22 euros)

Je viens d'acheter plusieurs paquets de thé, habituellement à moins de dix euros, et je m'aperçois que j'ai payé le même prix que ce que j'aurais payé en temps normal. Combien coûte un paquet de thé ?

1-85 : Zgrobl

Chez les habitants de la planète Zgrobl, les habitants (les zorglbs) ont la sale manie d'ajouter les fractions de la manière suivante : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1-\frac{ac}{bd}$.

Lors de ma dernière rencontre avec leur boss, Zorglub, on est tombé sur le même résultat (numérateurs et dénominateurs entiers compris entre 1 et 10), ce qui nous a permis d'éviter une guerre intergalactique. Quelles étaient ces deux fractions ?

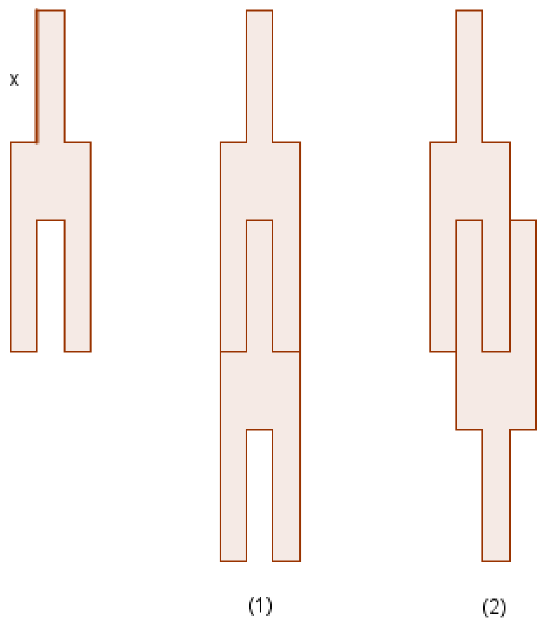
1-86 : Glisse

Un nombre glissant N est un nombre qui peut s'écrire comme somme de deux entiers a et b tels que la somme des inverses de a et b s'écrive avec les chiffres du nombre N dans le même ordre et précédés de 0 et d'une virgule. Par exemple $20=10+10$ et $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=0,20$.

Combien y en a-t-il ? Trouvez en au moins deux.

1-87 : Diapasons

On a une espèce de diapason de la forme ci-dessous. Deux diapasons peuvent s'emboîter parfaitement comme sur la figure. L'assemblage (1) a pour périmètre 2,60 m et l'assemblage (2) a pour périmètre 2,28 m. Que vaut x ?



1-88 : Limite 1

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+i\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ où α est un réel quelconque.

1-89 : Limite 2

Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$; $a, b>0$.

1-90 : Limite 3

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$.

1-91 : Dérivées 1

Soit $f(x)=xe^{-x}$. Déterminer les dérivées successives de *f*.

1-92 : Dérivées 2

Déterminer les dérivées successives des fonctions suivantes : $f(x)=\dfrac{1}{ax+b}$ puis de $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

1-93 : Dérivées 3

Calculer la fonction dérivée de $f(x)=\ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

1-94 : Comparaisons 1

Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$;

1-95 : Comparaisons 2

Montrer que pour tout $x < 0$, $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}<e^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

1-96 : Fonction 1

a. Étudier les variations et construire la courbe C de la fonction $f(t)=\ln\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$.

b. Former l'équation de la tangente à C au point d'abscisse t_0. Déterminer l'ordonnée $g(t_0)$ du point de cette tangente d'abscisse nulle.

c. Étudier les variations et construire le graphe de *g*.

1-97 : Fonction 2

Soit $0<a\le b$. On pose $f: x\mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

1. Ensemble de définition de *f*.

2. Etudier la monotonie de *f* et montrer que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\le(\ln 2)^2$

1-98 : Fonction 3

Etudier la fonction $f: x\to f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}$.

1-99 : Courbe 1

On veut construire une rampe pour handicapés permettant de descendre une marche de hauteur 1 ; trouver une courbe permettant le tracé de la rampe de sorte qu'il n'y ait pas de point anguleux et que la pente maximale de la rampe soit de 10% ; quelle est l'emprise au sol de la rampe ?

1-100 : Courbe 2

On considère une droite (D) sur laquelle se déplacent deux points B et C tels que la distance BC reste constante et égale à a. Soit A un point fixe n'appartenant pas à (D).

Déterminer l'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles ABC.

1-101 : Courbe 3

On considère un cercle (C) sur lequel se déplacent deux points B et C tels que la distance BC reste constante et égale à a. Soit A un point fixe appartenant à (C).

a. Déterminer l'ensemble des centres de gravité des triangles ABC.

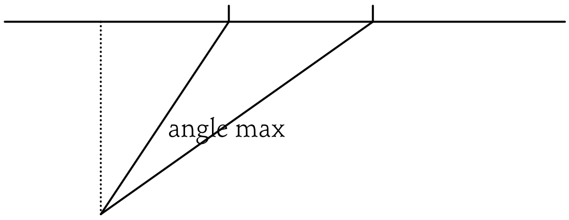
b. Déterminer l'ensemble des orthocentres des triangles ABC.

1-102 : Auge à cochons

On veut construire une auge à cochons ayant une forme plus ou moins cylindrique. Pour ce faire on dispose d'une plaque de tôle de largeur l et de longueur L que l'on plie dans le sens de la largeur pour former un arc de cercle. Quels sont alors les paramètres de l'arc de cercle pour obtenir un volume maximal ?

1-103 : Allez les petits

Au rugby après le marquage d'un essai le buteur doit se placer à une certaine distance de la ligne de but et tirer entre les poteaux. Quel est le lieu des points du terrain où l'angle de tir est maximal ?



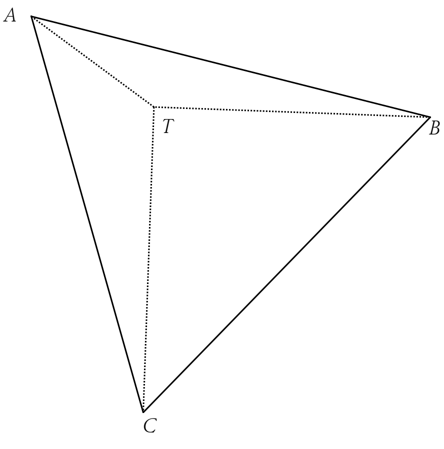
1-104 : Minimum

ABCD est un rectangle, M est un point à l'intérieur de ce rectangle, P est un point du segment $[DC]$. Pour quelles positions de M et P la somme $MA+MB+MP$ est-elle minimum ?

1-105 : Triangle et côtés

Les distances de T aux sommets du triangle équilatéral sont 3, 5 et 6 cm.

Quelle est la longueur du côté de ce triangle ?



1-106 : Deux sommes

On définit la fonction **cosh** (cosinus hyperbolique) par $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\cosh(a+kb)$.

1-107 : Suites 1

a. Montrer que l'équation $x+x^2+...+x^n=1$ a une solution x_n dans [0 , 1]. Montrer que x_n converge vers une limite l dans [0 ; 1].

b. Vérifier que $x_n(1-x_n^n)=1-x_n$. En déduire que $l=\dfrac{1}{2}$.

1-108 : Suites 2

a. Montrer que l'équation $e^x=x^n$ a deux racines positives u_n et v_n ($u_n<v_n$) pour n assez grand. (On pourra utiliser les variations de $f(x)=1-x^ne^{-x}$)

b. Montrer que u_n converge et trouver sa limite l.

1-109 : Suites 3

a. Montrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\le\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\le\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

b. En déduire un équivalent de $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, c'est à dire une fonction $f(n)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{f(n)}=1$.

1-110 : Suites 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer lorsque c'est possible une suite (u_n) non constante dont tous les termes sont strictement positifs, qui converge vers la valeur 2007 (valeur à changer tous les ans…), et qui vérifie la condition indiquée.

1. $u_n=f(n)$, où f est une fonction homographique, c'est-à-dire une fonction qui s'exprime comme le quotient de deux fonctions affines.

2. (u_n) est une suite géométrique.

3. (u_n) est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

4. (u_n) est une suite arithmétique.

5. (u_n) est une suite définie par une relation de récurrence affine, c'est-à-dire qu'il existe deux réels a et b tels que l'on ait, pour tout entier n : $u_{n+1}=au_n+b$.

6. (u_n) est une suite telle que, si $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$, alors les deux suites extraites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

1-111 : Suites 5

Pour chacune des phrases suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si la phrase est vraie, donner un exemple de suite vérifiant l'affirmation, et démontrer éventuellement cette affirmation. Si la phrase est fausse, justifier à l'aide d'un contre-exemple.

1. Une suite croissante et majorée est convergente.
2. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
3. Une suite croissante et minorée est convergente.
4. Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
5. Une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.
6. Une suite qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
7. Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée.

1-112 : Suites 6

1. a. Quel sens peut-on donner à l'écriture : 0,999999… ?

b. L'égalité : 0,999999… = 1 est-elle vraie ?

2. De même, si le nombre 0,200720072007… a une signification, écrire plus simplement ce nombre.

1-113 : Suites 7

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$.

(u_n s'écrit avec n radicaux emboîtés).

La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

2. Soit (a_i) une suite de nombres réels telle que pour tout entier $i>0$, le coefficient a_i vaut 0 ou 1.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $v_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}}$.

La suite (v_n) est-elle convergente ?

5. Divers

1-114 : Vaches et Pré (Vrai-Faux, Fesic 2001)

5 vaches ont brouté en 2 jours l'herbe d'un pré de 2 ares.

11 vaches ont brouté en 5 jours l'herbe d'un pré de 8 ares.

On suppose constantes la quantité b d'herbe broutée par vache et par jour, la quantité initiale h d'herbe par are et la quantité p d'herbe qui pousse par jour et par are. Alors :

a. $5b = h+2p$ et $11b = 8h+5p$.

b. $h = 6p$.

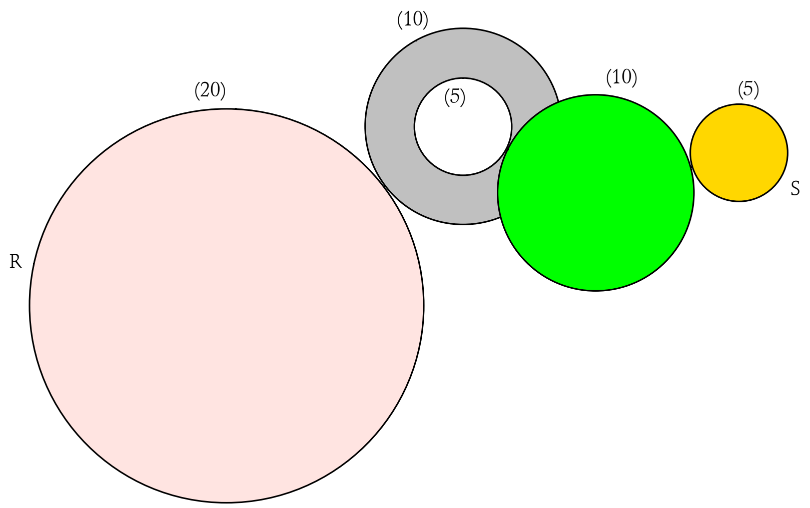
c. $b = \frac{8}{5}p$.

d. Un pré de 12 ares peut nourrir 15 vaches pendant 6 jours.

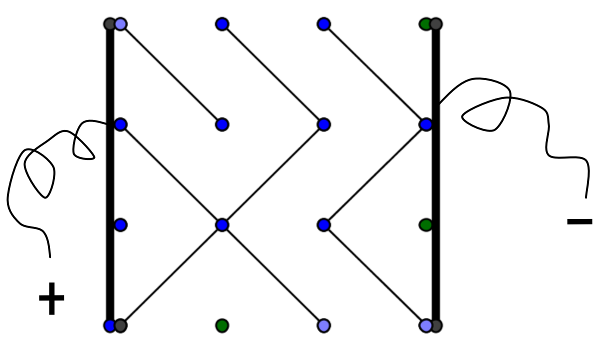
1-115 : Engrenages

Dans le train d'engrenages ci-dessous, lorsque la roue R fait un tour dans le sens des aiguilles d'une montre, de combien tourne la roue S ?

Le nombre entre parenthèses indique le nombre de dents de chaque roue dentée. Deux cercles concentriques représentent deux roues solidaires de même axe.



1-116 : Au courant ?



On dispose de neuf barettes métalliques qui laissent passer le courant entre deux plaques : ces barrettes se fichent dans des orifices, mais seulement en diagonale comme indiqué sur la figure.

Si on place les barrettes au hasard, quelle est la probabilité que le courant passe ?