INFORMATIQUE & PROBLEMES

1. 1. Probabilités

1. 1. Simulation d'un tirage de boules dans des urnes – 06/2009

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher.

L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9.

Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante.

Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un entier naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Partie A

1. On simule 1000 exécutions du jeu sur un tableur. On fixe dans un premier temps $a = 150$.

a- Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	B	C	D
1	Rang du tirage	Numéro de la boule tirée dans l'urne U	Numéro de la boule tirée dans l'urne V	Gain algébrique
2	1			
3	2			
…	…			
1001	1000			

Appeler l'examinateur pour vérifier la feuille de calcul.

b. Déterminer la moyenne des gains obtenus lors de cette simulation.

c. À l'aide d'autres simulations, conjecturer la valeur vers laquelle semble tendre la moyenne des gains obtenus.

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

2. On souhaite faire varier la valeur de a.

a. Adapter la feuille de calcul pour obtenir des simulations en fonction de a.

b. Est-il possible de donner une valeur à a qui paraisse rendre le jeu équitable ?

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

Partie B

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.

a. Déterminer l'espérance de X en fonction de a.

b. Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?

c. Comparer le résultat avec les conjectures obtenues dans la Partie A.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la feuille de calcul.
- Réponses argumentées pour les questions posées en 3.(a), 3.(b) et 3.(c).

1. 2. Recherche d'une stratégie de jeu – 06/2009

On dispose de trois urnes, notées A, B et C, contenant chacune 10 jetons indiscernables au toucher :

- l'urne A contient 4 jetons noirs et 6 jetons blancs,
- l'urne B contient 7 jetons noirs et 3 jetons blancs,

- l'urne C contient 6 jetons noirs et 4 jetons blancs.

Le jeu consiste à extraire successivement un jeton dans chacune des trois urnes, le joueur pouvant choisir d'effectuer ces tirages soit dans l'ordre A puis B puis C soit dans l'ordre A puis C puis B.

Lorsque le jeton extrait de la 2ème urne est d'une couleur différente de celui de la 1ère, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.

Lorsque le jeton extrait de la 3ème urne est d'une couleur différente de celui de la 2ème, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.

La partie est gagnée si le total des points marqués est égal à 2.

On se propose d'étudier si l'un des deux ordres de tirages proposés est plus favorable au joueur que l'autre.

1. a. À l'aide d'un tableur, simuler 500 parties de ce jeu, en choisissant l'ordre A puis B puis C, et afficher la fréquence des parties gagnées.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul.

b. Compléter la feuille de calcul par la simulation de 500 parties réalisées dans l'ordre A puis C puis B, et afficher la fréquence des parties gagnées.

c. Réaliser ainsi 10 simulations de 500 parties dans chacune des deux stratégies de jeu envisagées et compléter le tableau par la fréquence des parties gagnées, exprimée sous forme décimale approchée à 0,01 près.

Simulation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Première stratégie										
Deuxième stratégie										

Les résultats obtenus permettent-ils de conjecturer si l'une des deux stratégies de jeu envisagées est plus favorable que l'autre pour le joueur ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul et lui proposer une conjecture.

2. Déterminer la probabilité de gagner une partie en appliquant l'une ou l'autre des stratégies de jeu. La conjecture émise est-elle validée ?

Production demandée

- Réalisation de la simulation.

- Réponse argumentée à la question 2.

1. 3. Étude d’un jeu – 06/2008

On lance trois dés bien équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Alice et Bob calculent la somme des trois nombres obtenus.

Si la somme obtenue est égale à 9, Alice gagne.

Si la somme obtenue est égale à 10, Bob gagne.

Dans tous les autres cas, la partie est annulée.

Le but de l’exercice est de déterminer qui, d’Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner.

Étude expérimentale

1. Sur un tableur, réaliser une simulation de cette expérience aléatoire.

Appeler l’examinateur pour valider cette simulation.

2. Sur un tableur, réaliser une simulation sur un échantillon de taille 1000 de cette expérience aléatoire et déterminer, pour cette simulation, les fréquences de réussite respectives d’Alice et de Bob.

Appeler l’examinateur pour valider la feuille de calcul construite.

3. Est-il possible de conjecturer qui, d’Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

Appeler l’examinateur pour lui fournir cette réponse et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Étude mathématique

On souhaite maintenant calculer la probabilité de gagner d’Alice et de Bob.

4. Répondre aux deux questions suivantes (dans n’importe quel ordre) :

– Calculer la probabilité de gagner d’Alice et de Bob.

– Qui, d’Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

Production demandée

– Bilan de la simulation de la question 2 ;

– Réponse orale à la question 3 ;

– Réponses argumentées à la question 4.

1. 4. Marche aléatoire – 06/2008

Un pion est placé sur la case de départ :

				Départ				

Le lancer d’une pièce bien équilibrée détermine le déplacement du pion.

- PILE, le pion se déplace vers la droite,
- FACE, le pion se déplace vers la gauche.

Un trajet est une succession de 4 déplacements. On s'intéresse à l'événement A : « le pion est revenu à la case départ après 4 déplacements ».

A chaque lancer, on associe le réel $+1$ si le résultat est PILE et -1 si le résultat est FACE.

Etude expérimentale

1. Simuler à l'aide du tableur de 200 à 2000 trajets du pion et estimer la fréquence de l'événement A. Compléter le tableau suivant :

Nombred'essais	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
Fréquence de A										

Appeler l'examinateur pour vérifier le tableau obtenu.

Etude mathématique

2. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des quatre réels.

a. En précisant la méthode choisie, calculer les valeurs possibles de X et le nombre de trajets possibles.

Appeler l'examinateur pour contrôler la réponse et lui indiquer la démarche prévue à la question suivante.

b. Calculer la probabilité de l'événement A à l'aide d'un schéma de Bernoulli et comparer avec l'estimation obtenue.

Production demandée

– Réaliser une simulation en utilisant les fonctions appropriées.

– Donner une réponse argumentée à la question 2.

1. 5. Suite aléatoire – 06/2008

On considère une suite (S_n) définie par le lancer d'une pièce équilibrée de la façon suivante :

$S_0 = 0$ et

$S_{n+1} = S_n + 1$ si on obtient PILE,

$S_{n+1} = S_n - 1$ si on obtient FACE.

On note A_n l'événement « obtenir $S_n = 0$ ».

On s'intéresse à la probabilité de réaliser l'événement A_n pour un entier n non nul donné.

Etude expérimentale

1. En utilisant un tableur, effectuer une simulation donnant les 11 premiers termes de 1 000 suites définies de la même façon que (S_n).

Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles l'événement An est impossible ? Justifier votre réponse.

Appeler l'examinateur pour présenter votre simulation et votre justification.

2. a. Donner les fréquences d'apparition de l'événement A_n pour n variant de 1 à 10.

b. Faire d'autres simulations de même taille pour compléter le tableau suivant :

Fréquences d'apparition de A_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Simulation n° 1										
Simulation n° 2										
Simulation n°3										
Simulation n° 4										
Simulation n° 5										

Appeler l'examinateur pour une vérification.

Etude mathématique

3. Déterminer les probabilités de réaliser les événements A_2, A_4 et A_6.

Appeler l'examinateur pour une vérification.

4. Donner une expression de $p(A_n)$ en fonction de la parité de n.

Production demandée

– Présentation orale des premiers termes des suites puis du tableau des fréquences des 5 simulations ;

– Calcul de $p(A_2)$, de $p(A_4)$ et de $p(A_6)$;

– Justification de la méthode de calcul de $p(A_n)$.

1. 6. Simulation d'une expérience aléatoire, lois de probabilités – 01/2007

On dispose d'une roue divisée en trois secteurs identiques numérotés 1, 2 et 3.

On suppose qu'après rotation, la roue s'arrête sur l'un des trois secteurs de façon équiprobable.

On fait tourner successivement trois fois de suite la roue dans le sens trigonométrique en supposant que chaque résultat est indépendant des deux autres.

S désigne la variable aléatoire définie par la somme des trois numéros obtenus.

La variable aléatoire D est le numéro obtenu lors de la seconde rotation.

1. Sur un tableur réaliser une simulation de taille 100 de cette expérience.

Appeler l'examinateur en cas de difficulté et pour valider.

2. Déterminer pour cette simulation les répartitions des fréquences de la variable aléatoire S.

Appeler l'examinateur pour valider les résultats.

3. En utilisant les résultats connus sur la répétition d'expériences indépendantes, déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires S et D.

4. La simulation du 2. est-elle cohérente avec les valeurs théoriques obtenues au 3. ?

5. Les évènements « S=3 » et « D=1 » sont-ils indépendants ?

Production demandée

– Pour les questions 3 et 5, les réponses sont à justifier.

– Pour la question 4, une rapide explication de la cohérence est demandée.

1. 2. Géométrie

2. 7. Optimisation en géométrie plane – 06/2009

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative C de la fonction $y = e^x$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

On se propose de déterminer, s'il existe, un point M de C tel que la distance de M à la droite D soit minimale.

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire la droite D et la courbe C.

2. Placer un point mobile M sur C et construire le point N image de M par la projection orthogonale sur D.

3. Conjecturer, au moyen du logiciel, l'abscisse du point M_0 de C dont la distance à D est minimale. Proposer une valeur approchée de cette distance minimale. Conjecturer une propriété de la tangente en M_0 à C.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les constructions, la valeur approchée et les conjectures.

Partie B

4. Élaborer une méthode permettant de démontrer ces conjectures.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la méthode.

5. Calculer les coordonnées de M_0 et sa distance à D.

Production demandée

- Construction de C, D, M et N au moyen du logiciel de géométrie.
- Conjectures relatives à l'abscisse de M_0 et à la tangente en M_0 à C.
- Proposition d'une valeur approchée de la distance de M_0 à D.
- Calcul des coordonnées de M_0 et de sa distance à D.

2. 8. Positions relatives dans une configuration – 06/2008

Dans le plan orienté, on définit le triangle OAB et on note M le milieu du segment $[AB]$. On construit les triangles AOD et OBC directs, rectangles et isocèles en O.

L'objet du problème est d'étudier les longueurs et les positions relatives des segments $[OM]$ et $[DC]$.

Étude expérimentale

1. Construire la figure décrite précédemment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour valider la construction.

2. En modifiant le triangle OAB, émettre une conjecture concernant les longueurs OM et DC et une autre au sujet des positions relatives des droites (OM) et (DC).

Appeler l'examinateur pour valider les conjectures et exposer la démarche envisagée pour la preuve.

Démonstrations

3. Proposer une démonstration des conjectures faites.

Production demandée

– Construction de la figure ; – Énoncé des deux conjectures ; – Réponses argumentées à la question 3.

2. 9. Section plane d'un tétraèdre, optimisation d'une distance – 06/2008

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on définit les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$ et le point I milieu du segment $[AB]$.

Partie expérimentale

1. a. A l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, représenter le tétraèdre $OABC$ et le point I.

b. Pour un point M du segment $[AC]$, on définit le plan P passant par le point I et orthogonal à la doite (IM). Tracer la section du tétraèdre $OABC$ par le plan P.

c. Le plan P coupe la droite (OB) en un point N. Construire le point N et tracer le segment $[MN]$.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite.

2. Étudier à l'aide du logiciel, les variations de la longueur MN et conjecturer la position du point M, sur le segment $[AC]$, telle que cette longueur soit minimale. Quelle est, d'après le logiciel, cette longueur minimale ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les observations faites et les résultats obtenus.

Démonstration

On définit le réel $t=\dfrac{AM}{AC}$ et on admet que les coordonnées des points M et N sont respectivement $M(1-t,0,t)$ et $N(0,t,0)$.

3. Calculer la longueur MN en fonction de t.

Appeler l'examinateur pour lui expliquer la méthode prévue pour déterminer le minimum de cette longueur.

4. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.

5. Donner la valeur minimale prise par la longueur MN.

Production demandée

– Réalisation d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ;

– Présentation orale, à partir de l'écran, des conjectures ;

– Solution argumentée de la question 4.

2. 10. Optimisation dans l'espace – 06/2008

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0, 6, 0)$, $B(0, 0, 8)$, $C(10, 0, 8)$. M est un point appartenant au segment $[OB]$. Le plan (Π) passant par M et orthogonal à la droite (OB) coupe la droite (AC) en P.

Partie expérimentale

1. En utilisant un logiciel de géométrie, construire une figure traduisant l'énoncé.

Appeler l'examinateur pour la vérification de la construction.

2. On note respectivement N et Q les points d'intersection du plan (Π) avec les droites (OC) et (AB) et l'on admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle. En déplaçant le point M, émettre une conjecture quant à la position de ce point rendant maximale l'aire du rectangle.

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

Partie démonstration

On note $z = OM$.

3. Exprimer en fonction de z les longueurs MN et MQ.

4. Démontrer la conjecture émise en 2.

Production demandée

– La figure réalisée avec le logiciel ;

– Les démonstrations demandées dans les questions 3. et 4.

2. 11. Points équidistants d'une droite et d'un point – 06/2008

On considère dans le plan (P) une droite D et un point F non situé sur cette droite. Il s'agit de déterminer l'ensemble G, lieu géométrique des points du plan équidistants de D et de F.

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la droite D et le point F. Construire également un point H sur la droite D et la droite T perpendiculaire à D en H.

Appeler l'examinateur pour vérifier la figure et exposer la démarche envisagée pour la suite de la construction.

2. Construire un point M de T équidistant de F et de H. Construire le lieu géométrique du point M lorsque le point H décrit la droite D. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de G ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure et lui indiquer votre conjecture.

3. On considère un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ tel que D est la droite $(O\,;\vec{i})$ et le point F est sur la droite $(O\,;\vec{j})$.

Pour un point M (x, y) quelconque du plan, on considère le point H, projeté orthogonal de M sur la droite D.

a. Calculer MF^2 et MH^2 en fonction de x et y et en déduire une condition liant x et y pour que le point M soit équidistant de F et de D.

b. Donner alors une équation de G et conclure.

Production demandée

– Réaliser une figure adaptée à la situation ;

– Expressions de MF^2 et MH^2 ;

– Réponses argumentées pour la question 3. b.

2. 12. Tétraèdre trirectangle – 06/2008

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on construit le tétraèdre $OABC$ avec : $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 2)$.

Ce tétraèdre est dit « trirectangle » car trois de ses faces sont des triangles rectangles.

Pour tout point M du segment $[AB]$, on construit le projeté orthogonal H du point O sur la droite (MC).

1. Proposer, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une figure traduisant la situation et construire le lieu des points H lorsque le point M décrit le segment $[AB]$.

Quel semble être le lieu du point H ?

Appeler l'examinateur pour vérifier le tracé du lieu et la conjecture.

2. Conjecturer les positions du point M sur le segment $[AB]$ pour lesquelles la longueur CH semble maximale, minimale.

Appeler l'examinateur pour vérifier ces conjectures.

3. On se propose de démontrer les conjectures émises.

a. Démontrer la double égalité : $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CO}^2$.

Appeler l'examinateur pour lui indiquer les stratégies retenues pour répondre aux questions b. et c. suivantes.

b. Valider ou invalider alors les conjectures faites à la question 2. Calculer les extremums de CH.

c. Le lieu de H est-il un arc de cercle ?

Production demandée

– Expression des conjectures des questions 1. et 2.

– Réponses argumentées à la question 3.

2. 13. Etude de deux lieux géométriques – 06/2008

On considère un tétraèdre $ABCD$ et un point I quelconque du segment $[AB]$. Le plan parallèle au plan (BCD) passant par I coupe la droite (AC) en J et la droite (AD) en K.

On désigne par L l'isobarycentre des trois points I, J et K. On considère le point H projeté orthogonal du point C sur la droite (BL).

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu géométrique du point L ainsi que celui du point H, lorsque I décrit le segment $[AB]$.

Expérimentation

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure géométrique correspondant à cette situation.

2. Visualiser quelques positions du point L pour des positions différentes du point I sur le segment$[AB]$.

On aura intérêt à utiliser le mode « trace » si cette fonction est disponible dans le logiciel utilisé.

Quel semble être le lieu géométrique du point L ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.

3. Visualiser quelques positions du point H pour des positions différentes du point I sur le segment $[AB]$. Quel semble être le lieu géométrique du point H ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.

Démonstrations

4. Démontrer une des deux conjectures émises.

Production demandée

– Obtention à l'écran de la figure demandée dans les questions 2 et 3.

– Une des stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question 4.

2. 14. Etude de lieux géométriques – 06/2008

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(1\,;\,0)$ et $B(0\,;\,1)$.

A tout point M du segment $[AB]$, on associe les points P et Q, projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (OA) et (OB), et les points R et S, sommets du carré $PRQS$ de diagonale $[PQ]$ tels que $\left(\overrightarrow{PR}\,;\overrightarrow{PS}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

On note aussi I le milieu du segment $[PQ]$.

Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment $[AB]$.

1. a. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

b. Visualiser les lieux des points R et S quand M décrit le segment $[AB]$, puis émettre une conjecture sur la nature de ces lieux.

Appeler l'examinateur pour vérification de la conjecture.

c. Déterminer de manière expérimentale une équation du lieu du point S.

Appeler l'examinateur pour vérifier la réponse et expliquer les manipulations effectuées.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier ces conjectures en se plaçant dans le plan complexe. On appelle x l'abscisse du point M, avec $x \in [0;1]$.

a. Montrer que l'affixe de M est : $x+i(1-x)$.

b. Déterminer l'affixe de R ou celle de S. Justifier l'une des conjectures émises à la question 1.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la figure ;

– Démarches et réponses argumentées pour les questions 2. a. et 2. b.

2. 15. Triangle inscrit dans une courbe donnée – 06/2008

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On appelle (E) la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.

On désigne par a, b, c trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par A, B, C les points de (E) d'abscisses respectives a, b, c.

Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

On appelle C le cercle circonscrit au triangle ABC, son centre est le point E.

Le point D est le symétrique du point H par rapport à O.

Le but de l'exercice est d'observer la position de certains points de la figure et d'étudier celle du point H.

1. a. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure construite.

b. Faire varier a, b, c et émettre une ou deux conjectures concernant :

– la position du point H ;

– la position du point D.

Appeler l'examinateur pour vérifier les conjectures.

c. A l'aide de manipulations appropriées, émettre une conjecture sur les ordonnées des points D et H en fonction de a, b, c, puis sur l'abscisse de H.

Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture.

2. Démontrer la conjecture émise sur les coordonnées du point H.

3. Proposer une démarche permettant de démontrer la (ou les) conjecture(s) faite(s) pour le point D (on ne demande pas les calculs mais uniquement le plan proposé).

Production demandée

– Figure réalisée avec le logiciel de géométrie.

– Démarches et réponses argumentées pour les questions 2. et 3.

2. 16. Recherche d'un lieu géométrique – 01/2007

Dans le plan P, on donne quatre points O, A, B et C et un cercle (Γ) de centre O.

Le point M est un point quelconque variable sur le cercle (Γ). On associe au point M l'unique point M' du plan P défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}.$$

Il s'agit de déterminer le lieu géométrique L du point M' lorsque le lieu géométrique du point M est le cercle (Γ).

1. a. à l'aide d'un logiciel de géométrie plane construire les points O, A, B et C, le cercle (Γ) et un point libre M sur ce cercle.

b. Construire le point M' associé à M.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite

c. En observant plusieurs positions du point M faire une conjecture sur la nature de la transformation du plan qui transforme M en M' ainsi que la nature du lieu géométrique du point M'.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée et de la conjecture faite

2. a. Déterminer par le calcul la nature de la transformation du plan qui transforme le point M en le point M'.

b. Déterminer le lieu géométrique L du point M'.

Production demandée

– La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.

– Le calcul permettant d'obtenir la nature de la transformation.

– La caractérisation du lieu géométrique de M' et sa justification.

2. 17. Orthocentre – 01/2007

Dans le plan, ABC est un triangle quelconque.

On note K le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.

On s'intéresse au lieu (L) des points H quand C se déplace sur une droite parallèle à la droite (AB).

1. a. Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique, faisant apparaître les points A et B, le point C sur une droite parallèle à la droite (AB), le triangle ABC, le point H et le point K.

Afficher la trace du point H quand C varie sur la parallèle à (AB).

Faire une conjecture concernant la nature du lieu des points H

b. Vérifier à l'aide du logiciel (la vérification par le calcul n'est pas demandée ici) l'égalité (e) : $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}$.

Appeler l'examinateur

2. à partir de cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$; les points A et B sont donnés par leurs coordonnées : $A(-1\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 1)$. Le point C est sur l'axe des abscisses et a pour abscisse un réel x.

a. Demander à nouveau le lieu (L) des points H.

b. Quelle en serait une équation ?

3. Vérifier la conjecture émise en traçant le lieu des points H grâce à son équation.

Appeler l'examinateur

4. En admettant que K a pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{2-x^2}{2}\right)$ et l'égalité (e) donnée à la première question, en déduire les coordonnées de H puis l'équation de (L).

Production demandée

– Calculs et démonstration relatifs à la question 4.

2. 18. Distance de deux droites dans l'espace – 01/2007

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. A l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, faire figurer les points $A(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(\ 1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $C(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$, les droites (OB) et (AC), un point M mobile sur la droite (OB) et un point N mobile sur la droite (AC).

2. Afficher la distance MN et essayer de placer des points M et N de façon à minimiser cette distance. Donner une valeur approximative de cette distance minimale.

Appeler l'examinateur pour vérifier la figure

3. Combien de couples de points $(M\,;N)$ répondant à cette condition de distance minimale semble-t-il y avoir ? Afficher les coordonnées de ces points.

4. Quelles semblent être les positions respectives des droites (MN) et (OB) d'une part, et (MN) et (AC) d'autre part ? Mettre en évidence cette conjecture, à l'aide du logiciel.

Appeler l'examinateur pour vérification

5. Calculer MN^2. (On pourra écrire $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AC}$. Vos résultats confirment-ils certaines de vos conjectures ?

Production demandée

– Réponses aux questions posées dans les questions 2, 3 et 4.

– Calculs et démonstration relatifs à la question 5.

2. 19. Barycentre – 01/2007

On considère A, B et C trois points du plan et k un réel de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

On note G_k le barycentre du système de points pondérés : $\{(A,\ k^2+1)\ ;\ (B,\ k)\ ;\ (C,-k)\}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

1. Visualisation à l'aide d'un logiciel de géométrie :

a. Construire les points A, B, C, G_1 et G_{-1}.

b. Construire le point G_k puis visualiser l'ensemble des points G_k lorsque k décrit $[-1\ ;\ 1]$.

c. Quelle est la nature de l'ensemble précédent ?

Appeler l'examinateur pour vérification

2. Justification mathématique :

a. Justifier, pour tout réel k de $[-1\ ;\ 1]$ l'existence du point G_k.

b. Démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on a : $\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

c. Démontrer la conjecture faite avec le logiciel. On pourra utiliser les variations de la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$

.

Production attendue

– Réponses écrites aux questions 1. c. et 2. a. et b.

– Obtention à l'écran de la figure demandée à la question 1.

2. 20. Partage d'un triangle – 01/2007

Dans le plan on définit un triangle ABC non isocèle en A et dont les angles en B et en C sont aigus. On note a son aire.

On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et l'on se place dans le cas où $CH > BH$.

On se propose de démontrer qu'il existe une droite et une seule perpendiculaire au côté $[BC]$, en un point M, qui partage le triangle ABC en deux polygones de même aire.

1. Construire la figure demandée en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Déterminer, à l'aide du logiciel, la position de M en lequel la droite recherchée doit couper le segment $[CH]$ pour répondre au problème posé.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure construite

2. Etudier le cas où le point M est sur le segment $[BH]$.

Appeler l'examinateur afin qu'il vérifie la formulation de votre conclusion

3. On suppose que le point M est situé sur le segment $[CH]$ et on pose $CM = x$. On appelle N le point d'intersection du segment $[AC]$ avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par M.

On note L la longueur du segment $[CH]$. On admet que la fonction f qui, à tout x de $[0\ ;L]$, associe l'aire du triangle CMN est continue.

On ne cherchera pas à expliciter $f(x)$.

a. Que traduit l'égalité $f(x)=\dfrac{a}{2}$?

b. Préciser les variations de f à l'aide du logiciel. Déterminer la valeur de $f(0)$.

c. Comparer $f(x)$ et $\dfrac{a}{2}$ quand M est en H.

d. En déduire la réponse au problème posé.

Production demandée

– Figure réalisée avec emplacement du point M répondant au problème.

– Interprétation de l'égalité 3. a.

– Utilisation d'un théorème d'analyse.

2. 21. Etude d'une courbe – 01/2007

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points défini par

$$\mathrm{C}=\left\{M(x\,;y)\,/\,x>0, y>0 \text{ et } \sqrt{x}+\sqrt{y}=1\right\}.$$

1. A l'aide d'un logiciel, donner une représentation graphique de l'ensemble C.

Indication : on pourra exprimer y en fonction de x.

On constate que cette représentation graphique est une courbe qui ressemble à un quart de cercle. On admet de plus que C est une courbe tangente aux axes de coordonnées.

Appeler le professeur, lui montrer la figure et lui indiquer comment elle a été obtenue

On se propose de répondre à la question (Q) : C est-il un quart de cercle ?

2. Déterminer une équation du cercle Γ tangent aux axes de coordonnées aux mêmes points que C. Le tracer sur la même figure. Quelle réponse à la question (Q) peut-on conjecturer ?

Appeler le professeur, lui montrer la figure complète, lui indiquer la réponse conjecturée à la question (Q) ainsi que les stratégies prévues pour la démonstration

3. Démontrer la conjecture trouvée et répondre à la question (Q).

Production demandée

– Recopie d'écran ou impression d'écran donnant C et Γ mettant en évidence la conjecture.

– Démonstration de la réponse à la question (Q).

1. 3. Géométrie (spécialistes)

3. 22. Recherche d'un point fixe (spécialistes) – 06/2009

Dans le plan complexe orienté, on considère un triangle $OO'A$ de sens direct, rectangle en O. On considère M un point du cercle C de centre O et passant par A. On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme O en O' et on désigne par M' le point image de M par la similitude S. On cherche à prouver que la droite (MM') passe par un point fixe.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire la figure associée à la situation décrite ci-dessus.

2. Construire l'image C' du cercle C par la similitude S. Caractériser cet ensemble C'.

3. Quelle conjecture peut-on émettre pour la droite (MM') lorsque M décrit le cercle C ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite.

On appelle A et B les points d'intersection de C et C'.

4. On pose $S(B) = B'$. Quelle propriété relative est vérifiée par les triangles ABB' et AOO' ? Justifier.

5. Positionner le point M afin que le point B soit entre les points M et M'.

6. Donner des arguments mathématiques permettant de prouver que les points M, B et M' sont alignés.

Appeler l'examinateur pour vérification.

Production demandée

- La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La caractérisation de l'ensemble C'.
- La justification de la propriété de la question 4.

. La justification de la conjecture de la question 3. seulement dans le cas où le point B est entre les points M et M'.

3. 23. Étude d'une figure du plan (spécialistes) – 06/2009

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment $[BC]$.

La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F. Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A', symétriques de G et A par rapport à la droite (BC).

On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.

On se propose d'étudier la nature du triangle HIJ quand D décrit le segment $[BC]$.

1. a. Représenter la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

b. Quelle semble être la nature du triangle HIJ ?

c. Visualiser les lieux des points I et J lorsque le point D décrit le segment $[BC]$.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

Lui proposer les conjectures émises concernant le triangle HIJ et les lieux des points I et J.

2. On définit les similitudes directes S_1, de centre C, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et S_2, de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d'angle $\frac{\pi}{6}$ et leur composée $f = S_2 \circ S_1$.

a. Déterminer les images de J et H par f.

b. Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f.

c. En déduire la nature du triangle HIJ.

Production demandée

- Réalisation de la figure.
- Réponse argumentée à la question 2.

3. 24. Étude d'un ensemble de points (spécialistes) – 06/2009

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct qui permet une assimilation à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le nombre complexe $f(z) = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On pose $a_0 = 4+2i$ et, pour tout n entier, $a_{n+1} = f(a_n)$. On note A_n le point d'affixe a_n dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A

1. a. En utilisant un logiciel adapté, calculer a_n pour n variant de 1 à 30.

b. Représenter le nuage des points A_n pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les calculs et le graphique réalisés.

2. Soit J le point d'affixe i. Pour tout n entier, on pose $d_n = JA_n$.

a. Calculer d_n pour n variant de 1 à 30.

b. Représenter le nuage des points de coordonnées (n; d_n) pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

c. Conjecturer la nature de la suite (d_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé. Lui proposer des conjectures relatives à la suite (d_n).

Partie B

3. a. Soit S la transformation du plan, d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Préciser la nature de S et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.

b. Déterminer la nature de la suite (d_n). Étudier sa convergence.

c. Interpréter les observations faites sur les points A_n représentés dans la question 1. b.

Production demandée

- Affichage à l'écran des calculs et du graphique.
- Réponses argumentées pour la question 3.

3. 25. Étude d'un lieu de points – 06/2008 (spécialité)

On considère le carré direct $ABCD$ du plan orienté tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$. On appelle O le centre du carré. Un point M décrit le segment $[DC]$. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par A coupe (BC) en N. On appelle I le milieu de $[MN]$. On se propose de déterminer le lieu des points I lorsque M décrit le segment $[DC]$.

Étude expérimentale

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

2. Mettre en évidence avec le logiciel la nature du triangle AMN.

3. Faire afficher le lieu des points I lorsque M décrit le segment $[DC]$.

Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et pour lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Démonstrations

4. Démontrer que le triangle AMN est rectangle isocèle (on pourra utiliser une rotation de centre A).

5. En déduire la nature du triangle AIM ; établir que le point I est l'image de M par une similitude S de centre A dont on précisera l'angle et le rapport.

6. Déterminer $S(D)$ et $S(C)$ puis conclure sur le lieu de points cherché.

Production demandée

– Figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique

– Réponses argumentées pour les questions 5 et 6.

3. 26. Recherche d'un lieu géométrique – 06/2008 (spécialité)

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABB' tel que : $\left(\overrightarrow{BB'};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point variable de la droite (BB') et M' l'image de A dans la rotation de centre M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On note I le milieu de $[BB']$ et J le milieu de $[MM']$.

On cherche à déteminer le lieu du point J lorsque M décrit la droite (BB').

1. a. Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

b. Visualiser le lieu du point J quand M décrit la droite (BB'). Quelle conjecture peut-on émettre ?

c. Que peut-on conjecturer à propos des triangles ABI et AMJ ?

Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures.

2. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en I.

a. Déterminer l'image du point M par la similitude S.

Appeler l'examinateur pour faire le point et lui indiquer la méthode prévue pour la résolution de la question 2. b.

b. En déduire le lieu du point J quand M décrit la droite (BB').

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la figure ;

– Formulation orale des conjectures sur le lieu du point J et sur les triangles ABI et AMJ ;

– Réponses argumentées aux questions 2. a. et 2. b.

3. 27. Cercles et similitudes – 06/2008 (spécialité)

On considère un triangle équilatéral direct $O_1O_2O_3$, le milieu O du segment $[O_1O_2]$ et le cercle C de centre O_1 passant par O. On note A un point du cercle C distinct du point O.

Pour tout point Mdu cercle C, on note M_1 le point symétrique de M par rapport à O puis M' le point tel que le triangle MM_1M' soit équilatéral direct.

Etude expérimentale

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire le triangle $O_1O_2O_3$, placer le point O et tracer le cercle C.

Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.

2. Le point A étant construit sur le cercle C, construire le point A' associé au point A par le procédé indiqué dans le préambule.

Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.

3. Placer un autre point, noté M, sur le cercle C et construire le point M' associé à ce point.

Visualiser la courbe (ou lieu) que semble décrire le point M' lorsque le point M décrit le cercle C et émettre une conjecture à ce propos.

Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture.

4. Lorsque les points M et A sont distincts, les droites (AM) et $(A'M')$ se coupent en un point P. Placer le point P sur la figure. Emettre une conjecture concernant le lieu décrit par le point P lorsque le point M décrit le cercle C privé du point A.

Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Démonstrations

5. Montrer qu'il existe une similitude directe de centre O par laquelle le point M du cercle C a pour image le point M'. Préciser l'angle et le rapport de cette similitude.

6. Déterminer le lieu du point M' lorsque le point M décrit le cercle C.

7. Préciser le lieu du point P lorsque le point M décrit le cercle C privé du point A.

Production demandée

– Réalisation d'une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;

– Réponse argumentée pour les questions 5. et 6. ;

– Informations obtenues concernant le point P.

3. 28. Famille de cercles (spé) - 01/2007

Dans le plan, on considère un triangle OAB rectangle en O, de sens direct, et une droite (d) passant par O.

On note A' le projeté orthogonal de A sur (d), B' le projeté orthogonal de B sur (d) et (C) le cercle de diamètre $[A'B']$. Enfin I est le pied de la hauteur issue de O dans OAB.

1. a. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

b. Quelle conjecture peut-on faire concernant les différents cercles (C) lorsque la droite (d) tourne autour de O ?

Appeler l'examinateur pour vérification

2. On considère la similitude directe S de centre I qui transforme A en O.

a. Quel est l'angle de cette similitude ? Justifier que l'image de O par S est B.

b. Déterminer les images par S des droites (AA') et (d), puis celle du point A'.

c. Démontrer la conjecture faite au 1.

Production attendue

– Obtention de la figure à l'écran avec contrôle par l'examinateur au 1. – Réponses écrites aux questions 1. b. et 2. a., b. et c.

1. 4. Analyse fonctions

4. 29. Étude d'une courbe de Bézier – 06/2009

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A de coordonnées (0 ; 6), B de coordonnées (2 ; 0) et C de coordonnées (4 ; 6).

Soit t un réel de l'intervalle [0 ; 1]. On définit les points :

- G barycentre du système de points pondérés $\{(A\,;1-t)\,;(B\,;t)\}$;
- H barycentre du système de points pondérés $\{(B\,;1-t)\,;(C\,;t)\}$;
- M barycentre du système de points pondérés $\{(G\,;1-t)\,;(H\,;t)\}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le lieu des points M quand t décrit l'intervalle [0; 1], et la position de cet ensemble par rapport aux droites (AB) et (BC).

Partie A

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique. Tracer les droites (AB) et (BC), puis faire apparaitre le lieu décrit par le point M lorsque t varie.

Appeler l'examinateur pour lui montrer le lieu du point M.

2. Quelles semblent être les positions des droites (AB) et (BC) par rapport au lieu obtenu ?

3. Sur quelle courbe semble se déplacer le point M ?

Appeler l'examinateur pour annoncer les conjectures et décrire la démarche.

Partie B

4. Déterminer en fonction de t les coordonnées des points G, H et M.

5. Valider ou invalider la conjecture émise à la question 3. Donner l'expression analytique du lieu du point M.

Production demandée

- Visualisation du lieu du point M.

- Énoncé des conjectures : courbe décrite par le point M et position des droites (AB) et (BC) par rapport à cette courbe.

- Réponses pour les questions 4. et 5.

4. 30. Distance minimale d'un point à une courbe – 06/2009

Dans un repère orthonormal d'origine O, on considère la courbe C représentative de la fonction logarithme népérien.

On s'intéresse à la distance OM lorsque M parcourt C . Le but de l'exercice est de préciser si cette distance peut être rendue minimale et de caractériser le ou les point(s) M, s'il en existe, situé(s) sur C et rendant cette distance minimale.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure permettant d'explorer cette situation.

2. Cette distance semble-t-elle minimale pour un (ou plusieurs) point(s) particulier(s) de C ? Si oui donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette plus petite distance et de l'abscisse de ce(s) point(s).

Appeler le professeur pour une vérification de la figure construite et des conjectures émises.

3. Tracer la droite (OM) ainsi que la tangente en M à la courbe C. Que semble-t-il se passer lorsque M est positionné sur la courbe C de sorte que la distance OM soit minimale ?

Appeler le professeur pour une vérification de la conjecture.

Partie B

4. Quelle relation doit vérifier l'abcisse x_0 d'un point M_0 en lequel la distance OM est minimale ?

Appeler le professeur pour lui présenter la méthode envisagéeet une vérification de la relation éventuellement obtenue.

5. Prouver la conjecture élaborée dans la question 3.

Production demandée

- Les différentes étapes des stratégies prévues pour répondre aux questions 4. et 5.

- La mise en forme de l'une de ces étapes.

4. 31. Intersection de tangentes – 06/2009

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{1+x}+e^{1-x}}{2}$ et $g(x)=\dfrac{e^{1+x}-e^{1-x}}{2}$.

On note C_f la courbe représentative de f et C_g la courbe représentative de g.

Pour tout réel a , on note A le point de C_f d'abscisse a et T_A la tangente à C_f au point A, B le point de C_g d'abscisse a et T_B la tangente à C_g au point B, M (x_M ; y_M) le point d'intersection des tangentes T_A et T_B.

On souhaite étudier le lieu géométrique E du point M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

a. Construire les courbes C_f et C_g ainsi que les tangentes T_A et T_B.

b. Construire le point M.

Appeler l'examinateur pour valider la figure, ou en cas de difficultés.

c. En observant la situation obtenue avec plusieurs valeurs de a, dire quelle relation semble exister entre les réels a et x_M.

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

2. Tracer le lieu L du point M. Ce point semble appartenir à la courbe représentative E d'une fonction connue, quelle est cette fonction ? Comment peut-on vérifier cette conjecture ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

3. Démontrer que L fait effectivement partie de E . Que dire de plus ?

Production demandée

- Courbes demandées aux questions 1 et 2.

- Réponse à la question 3.

4. 32. Aire variable d'un triangle – 06/2009

Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan et la courbe C d'équation $y=e^x-1$.

Soit B le point de C d'abscisse 1 et A le point de C d'abscisse a, a étant un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].

On s'intéresse à l'aire du triangle OAB et à la variation de cette aire en fonction de a.

Partie A

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite.

2. Afficher à l'écran l'aire du triangle OAB. En faisant varier a, chercher une valeur approchée de la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle OAB est maximale. Donner une valeur approchée de cette aire maximale.

Appeler l'examinateur pour lui exposer la conclusion.

3. Pour tout a dans l'intervalle [0 ; 1], on note $f(a)$ l'aire du triangle OAB. Construire l'ensemble des points M (a ; $f(a)$). Retrouver les résultats de la question précédente.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la courbe obtenue et lui proposer la démarche envisagée pour la question suivante.

Partie B

4. a. Déterminer l'expression de $f(a)$ en fonction de a.

b. En étudiant la fonction f, déterminer la valeur exacte de la variable a pour laquelle la fonction f atteint son maximum et la valeur exacte de ce maximum.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la figure demandée et de l'ensemble des points M de la question 3.
- Affichage des valeurs approchées de a et de $f(a)$ pour lesquelles l'aire du triangle est maximale.
- Démarches et réponses argumentées à la question 4.

4. 33. Distance d'un point à une courbe – 06/2008

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe C est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point B a pour coordonnées (2 ; −1).

On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit C. Ce minimum est appelé distance du point B à la courbe C.

Le but de l'exercice est de trouver la distance du point B à la courbe C.

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure dynamique correspondant à cette situation.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

a. M est un point quelconque de la courbe C. Faire une conjecture sur la position du point M pour laquelle la distance BM semble minimale. On appelle ce point M_0.

b. Tracer la droite (d) perpendiculaire en M_0 à la droite (BM_0). Quelle semble être la position particulière de la droite (d) ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures émises et lui indiquer la ou les méthodes de contrôle prévues à la question c..

c. Utiliser le logiciel pour contrôler les conjectures et, éventuellement, les rectifier.

2. On se propose de déterminer la valeur exacte de la distance du point B à la courbe C .

Appeler l'examinateur pour lui présenter les contrôles faits et lui proposer une méthode permettant à la fois de déterminer le point M_0 et la distance du point B à la courbe C .

a. Déterminer, par le calcul, la position du point M_0.

b. Quelle est la valeur exacte de la distance du point B à la courbe C ?

3. Vérifier, par le calcul, la conjecture formulée au 1. b.

Production demandée

– Obtention à l'écran de la figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.

– La formulation des conjectures et leur contrôle.

– Les stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question 2 et le résultat des calculs.

– La vérification demandée à la question 3.

4. 34. Courbes et équations – 06/2008

m un réel. On cherche à déterminer le nombre de solutions réelles dans l'intervalle [−5 ; 5] de l'équation : $-x^2+2x-1+me^{-x}=0$ (E).

1. Dans cette question on pose $m = 2$.

A l'aide d'un grapheur (logiciel ou calculatrice), donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'unique solution de (E).

Appeler l'examinateur pour validation du résultat et de la méthode employée.

2. Soit f la fonction définie sur [−5 ; 5] par : $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$. A l'aide d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f et émettre une conjecture quant au nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ dans l'intervalle [−5 ; 5], en fonction des valeurs de m.

Appeler l'examinateur pour validation de la conjecture.

3. Démontrer que, pour tout m, l'équation (E) et l'équation $f(x)=m$ ont le même ensemble de solutions dans l'intervalle [−5 ; 5].

4. Répondre au problème posé.

Production demandée

– Présentation de la méthode de résolution utilisée en 1. et graphique correspondant ;

– Représentation graphique et énoncé de la conjecture pour la question 2. ;

– Réponses argumentées aux questions 3. et 4.

4. 35. Tangentes à deux courbes – 06/2008

Soit C_1 et C_2 les courbes d'équations respectives $y=e^x$ et $y=e^{-x}$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan.

Soit a un nombre réel quelconque. On désigne respectivement par M et N les points de C_1 et C_2 d'abscisse a et par (T_1) et (T_2) les tangentes à C_1 et C_2 en M et N.

Les droites (T_1) et (T_2) coupent respectivement l'axe des abscisses en P et Q.

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique (ou une calculatrice graphique) construire les courbes C_1 et C_2 et les droites (T_1) et (T_2). Que peut-on remarquer pour les droites (T_1) et (T_2) ?

Appeler le professeur pour lui montrer le graphique créé et lui indiquer la conjecture faite au sujet de (T_1) et de (T_2).

2. A l'aide du logiciel émettre une conjecture à propos de la longueur du segment $[PQ]$.

Appeler le professeur pour lui présenter la conjecture et la démonstration envisagée.

3. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Production demandée

– Exposé oral de la méthode de construction de la figure adaptée à la situation ;

– Exposé oral des conjectures ;

– Exposé de la méthode choisie pour démontrer la dernière conjecture.

<u>4. 36. Problème d'optimisation – 01/2007</u>

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.

Sur ce plan :

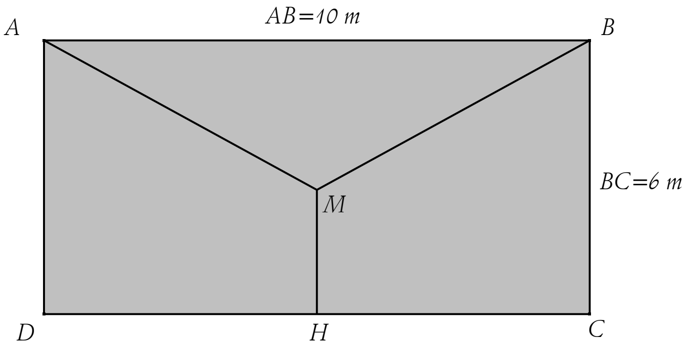
– $[AM]$ et $[BM]$ représentent les deux premiers tuyaux ;

– $[MH]$ représente le troisième tuyau ;

– (MH) est la médiatrice de $[DC]$.

On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{BMQ}=\theta$.



1. a. Utiliser un logiciel de géométrie pour simuler la situation décrite précédemment.

b. En déduire une valeur approchée au centième de la valeur de θ qui rend minimale la longueur des tuyaux. Déterminer, grâce au logiciel, une valeur approchée au centième de la longueur minimale totale des tuyaux.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées

2. On définit la fonction g : $g:\theta \to g(\theta)=2MA+MH$ sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

a. On note g' la fonction dérivée de g. Démontrer que $g'(\theta)=5\times\dfrac{2\sin\theta-1}{(\cos\theta)^2}$.

b. Déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux.

Production demandée

– Les réponses attendues dans la question 1.

– Les démonstrations attendues dans la question 2.

<u>4. 37. Nombre de solutions d'une équation – 01/2007</u>

On donne un réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln x = kx^2$ pour x strictement positif.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :

a. Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

b. Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

Appeler l'examinateur pour vérifier la valeur trouvée

2. Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution.

Production demandée

– Pour la question 1. b., recopier la valeur approchée obtenue pour k.

– Réponse écrite pour la question 2.

4. 38. Courbe représentative de la fonction exponentielle – 01/2007

On désigne par a un nombre réel. Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe C , représentative de la fonction exponentielle et la droite D_a d'équation $y = ax$.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique, dire si les propositions suivantes semblent vraies ou fausses :

– Proposition 1 : La courbe C est au-dessus de D_1.

– Proposition 2 : Pour tout réel x, $e^x > 3x$.

– Proposition 3 : Il existe une valeur de a pour laquelle la droite D_a est tangente à la courbe C.

Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses

2. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique, conjecturer, suivant les valeurs du réel a, la position relative de C et D_a.

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture

3. Justifier la proposition 3 de la question 1.

Production demandée

− Réponse écrite pour la question 3.

4. 39. Planètes et ajustement – 01/2007

Le tableau ci-contre donne, pour chaque planète du système solaire, sa période de révolution et le rayon de l'orbite considérée comme circulaire.

A	B	C
Planète	r (en m)	T (en s)
Mercure	5.79E+10	7.60E+06
Vénus	1.08E+11	1.94E+07
Terre	1.49E+11	3.16E+07
Mars	2.28E+11	5.94E+07
Jupiter	7.78E+11	3.74E+08
Saturne	1.42E+12	9.30E+08
Uranus	2.87E+12	2.66E+09
Neptune	4.50E+12	5.20E+09

1. Entrer sur une feuille de calcul d'un tableur les données des colonnes A, B et C. Tracer à l'aide du tableur le graphique représentant la période T en fonction du rayon r.

Combien de points apparaissent nettement sur le graphique ? Les identifier et expliquer le phénomène.

2. Faire afficher le graphique donnant $\ln(T)$ en fonction de $\ln(r)$. Combien de points apparaissent sur le graphique et que constatez-vous ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer les graphiques obtenus

3. Déterminer, à l'aide du tableur le coefficient directeur d'une droite qui permet de donner un ajustement des points représentés. Quelle est l'équation de la droite que l'on peut retenir expérimentalement ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter la procédure retenue et contrôler le résultat

4. En déduire que pour les huit planètes étudiées, $T \approx k\left(\sqrt{r}\right)^3$ où k est une constante réelle. Vérifier avec le tableur.

Production demandée

– Pour la question 1, une analyse argumentée du graphique obtenu est attendue.

– Pour la question 2, une analyse du nouveau graphique obtenu est attendue. L'argumentation fera l'objet des questions suivantes.

– Pour la question 3, préciser la méthode de calcul choisie pour établir une équation de la droite d'ajustement.

– Pour la question 4, une rédaction détaillée du calcul de la valeur de k est attendue.

4. 40. Modélisation d'une situation géométrique – 01/2007

Un agriculteur doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres de cette dernière, comme indiqué sur la figure suivante :

On considère que :

* Les points H, M et F sont alignés sur le bord de la route ;

* $CH = 3$; $CF = 5$;

* La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (HF).

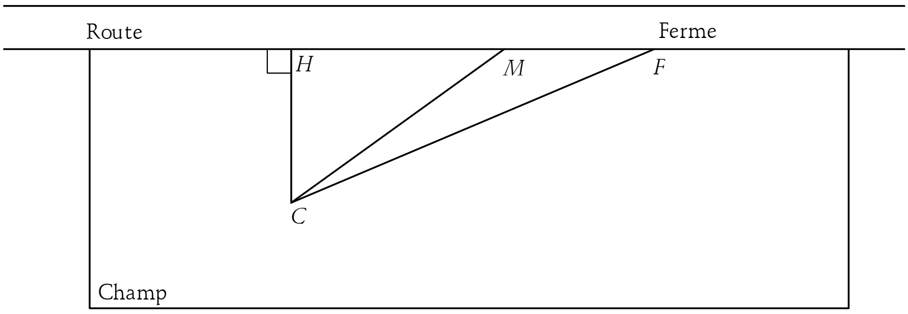
On note x la distance HM.

Le fermier cherche à économiser sa consommation de carburant. Il sait que sa consommation est :

* d'un litre de carburant par kilomètre parcouru sur la route

* de k litres de carburant par kilomètre parcouru à travers champs (le facteur k, avec $k > 1$, dépend de l'état du terrain : plus le terrain est accidenté plus k est grand).

On admettra pour réaliser l'étude expérimentale que la fonction « consommation de carburant », notée f_k, est définie par : pour tout réel x de [0 ; 4], $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9}+4-x$.



I. Etude expérimentale

1. Recherche de la consommation minimale pour $k = 2$: on cherche dans cette question à savoir en quel point M il faut rejoindre la route, dans le cas où la consommation à travers champ est le double de celle sur la route.

a. Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, la représentation graphique de la fonction f_2.

b. Déterminer graphiquement ou à l'aide d'une table de valeurs un encadrement à 10^{-1} près de la distance HM en kilomètres correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.

Appeler l'examinateur

2. Détermination graphique de la valeur limite k_0 : le fermier, qui a un grand sens pratique, pense que si k est inférieur à une certaine valeur limite k_0, il n'est pas utile de rejoindre la route et que couper directement à travers champ n'est pas plus cher ! On cherche à vérifier cette affirmation.

a. Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, les représentations graphiques des fonctions f_k pour $k \in \{1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,6 ; 1,7 ; 1,8 ; 1,9 ; 2\}$.

Appeler l'examinateur pour vérification des courbes

b. Calculer $f_k(4)$ et interpréter cette valeur dans le cadre du problème.

c. Observer, expliquer et conjecturer la valeur k_0 au-dessous de laquelle il est inutile de chercher à rejoindre la route.

II. Détermination de la fonction « consommation »

1. Exprimer CM en fonction de x.

2. Démontrer que, pour tout réel x de [0 ; 4], $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9}+4-x$.

Production demandée

Partie I.

– 1.b. Donner la valeur de la distance, en kilomètres, correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.

– 2. b. et 2. c. Donner la valeur exacte de $f_k(4)$, interprétation. Donner la valeur expérimentale de k_0 et expliquer.

Partie II.

– Rédaction des justifications demandées.

4. 41. Tangentes à une parabole – 01/2007

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère la parabole P d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$. Etant donné un réel t non nul, on se propose de mettre en évidence, puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole P aux points M et M' d'abscisses respectives t et $t' = -\frac{1}{t}$.

1. a. à l'aide d'un logiciel adapté, tracer la parabole P .

b. On se donne un réel t. Placer le point M d'abscisse t sur la courbe P.

c. Tracer la droite D tangente à P au point M.

Indication : Si le logiciel utilisé le nécessite, calculer d'abord le coefficient directeur de cette tangente.

Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la construction de P, M et D

d. Placer le point M' d'abscisse $t' = -\frac{1}{t}$ sur la courbe P. Tracer la droite D' tangente à P en M'. Placer le point d'intersection P des droites D et D'.

e. Lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$, à quel ensemble le point P semble-t-il appartenir ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite et lui proposer une conjecture

2. Démonstration :

a. Donner les équations des droites D et D'.

b. Calculer les coordonnées du point P et conclure sur la propriété conjecturée.

Production demandée

Question 1

– Visualisation à l'écran et si possible impression de la figure réalisée avec le logiciel.

– Rédiger la conjecture relative au point P.

Question 2

– Calcul des équations des droites D et D'.

– Calcul des coordonnées du point P et conclusion.

4. 42. Triangle d'aire maximale – 01/2007

On considère un triangle isocèle de périmètre fixé, égal à 15.

Le but de cet exercice est de déterminer parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

1. Expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie :

a. A l'aide d'un logiciel de géométrie, construire un triangle ABC isocèle en A, dont le périmètre est fixé et exactement égal à 15.

Appeler l'examinateur pour vérification

b. Parmi tous les triangles possibles, quelle semble être la nature du triangle d'aire maximale ?

Appeler l'examinateur pour vérification

2. Démonstration : on note x la longueur BC et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ABC.

a. Dans quel intervalle le réel x peut il prendre ses valeurs ?

b. Soit H le milieu de $[BC]$, exprimer AH en fonction de x et en déduire que $\mathcal{A}(x) = \frac{x}{4}\sqrt{225-30x}$.

c. Résoudre le problème posé.

Production attendue

– Réponses écrites aux questions 1. b. et 2. a., b. et c.

– Obtention à l'écran de la figure correspondant aux hypothèses au 1. a. avec éventuellement impression.

1. 5. Analyse suites

5. 43. Étude d'une suite définie par une relation de récurrence – 06/2009

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_1 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

1. a. En utilisant un tableur ou une calculatrice, donner les 40 premiers termes de cette suite.

b. Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

c. En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures.

2. On cherche à déterminer une formule qui permette de calculer u_n en fonction de n.

a. Compléter le tableau de valeurs en faisant figurer le calcul de $\frac{1}{u_n-1}$ pour les 40 premiers termes de la suite (u_n).

b. Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures.

3. Démontrer la formule conjecturée.

Production demandée

- Visualisation à l'écran du tableau de valeurs et du nuage de points.
- Démonstration.

5. 44. Suite définie par une sommation – 06/2009

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

1. À l'aide d'un outil adapté, calculer les 500 premiers termes de la suite (v_n). Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de cette suite ?

Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture.

2. Rechercher, dans les deux cas suivants, à l'aide de l'outil choisi, un entier n_0 tel que, pour tout entier $n > n_0$, on ait :

a. $v_{n+1} - v_n \leq 10^{-3}$; b. $v_{n+1} - v_n \leq 10^{-5}$.

Comment interpréter ces résultats au regard de la conjecture émise à la question 1 ?

Appeler l'examinateur pour une validation des résultats et de l'interprétation.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $w_n = v_n + \frac{1}{n}$. À l'aide de l'outil choisi, calculer les 500 premiers termes de la suite (w_n) puis représenter graphiquement les suites (v_n) et (w_n). Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces deux suites ?

Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture et pour proposer une démarche pour la question 4.

4. a. Démontrer la conjecture émise à la question 3.

b. Conclure sur la convergence de la suite (v_n).

Production demandée

- Obtention des 500 premières valeurs des suites (v_n) et (w_n), ainsi que la représentation graphique de ces valeurs.
- Obtention des valeurs de n_0 à la question 2.
- Réponses argumentées pour la question 4.

5. 45. Suites, approximation d'un réel – 06/2009

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n > 0$: $b_n = \frac{25}{a_n^2}$ et $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$.

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, de a_n et de b_n, pour n entier variant de 0 à 20.
2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites (a_n) et (b_n), la monotonie et une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les tableaux et les conjectures.

3. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier $n > 0$, par $c_n = a_n^3$. Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes c_n, pour n variant de 0 à 20. Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite (a_n).
4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite (b_n).

Appeler l'examinateur.

Partie B

5. On admet que, pour tout entier $n > 0$, $b_n^3 \leq 25 \leq a_n^3$. Après avoir vérifié que, pour tout entier $n > 0$, on a $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3}$, démontrer les résultats conjecturés à la question 2. sur la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter le schéma de la démonstration.

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

Appeler l'examinateur pour lui donner la réponse attendue.

7. On désigne par l et l' les limites respectives des suites (a_n) et (b_n). En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions 3. et 4. sur les valeurs exactes des réels l et l'.

Production demandée

- Obtention à l'écran des termes a_n, b_n et c_n, pour n entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites (a_n) et (b_n).
- Démarches et réponses argumentées aux questions 5. et 7.

5. 46. Suites associées – 06/2008

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 20, b_0 = 60$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?

Appeler l'examinateur pour vérifier les calculs et les conjectures.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par : $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = b_n - a_n$.

a. Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

c. Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examinateur.

Appeler l'examinateur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

4. a. Démontrer la conjecture de la question 3. b.

b. Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

c. Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n).

Production demandée

– Construction de la feuille de calcul complète ;

– Formulation orale des conjectures ;

– Réponses argumentées à la question 4.

5. 47. Etude de flux de populations – 06/2008

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.

Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

– La population totale des trois zones reste constante.

– Chaque année la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la populationde la zone B et 1% de la population de la zone C.

– Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la population de la zone C.

– Chaque année la zone C perd 2% de sa population.

Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.

On désigne par a_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année 2008 + n. On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n, b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

1. On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.

a. Représenter graphiquement, à l'aide du tableur, ou d'une calculatrice, les suites (a_n), (b_n) et (c_n).

b. Conjecturer le sens de variation et la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Appeler l'examinateur pour vérification des résultats obtenus et des conjectures.

2. Pour chaque année 2008 + n, soit d_n la différence de population entre les zones A et B.

Conjecturer la nature de la suite (d_n).

Appeler l'examinateur pour une vérification et lui indiquer les méthodes envisagées pour les démonstrations qui suivent.

3. On se propose de calculer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

a. Déterminer l'expression de c_n et de d_n en fonction de n.

b. En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.

c. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Production demandée

– Une feuille de calcul donnant les valeurs de n et des termes des différentes suites.

– Un graphique représentant les suites (a_n), (b_n) et (c_n).

– Les réponses argumentées aux questions de la Partie 3.

5. 48. Comportement d'une suite récurrente – 06/2008

Soit u_1 un nombre réel fixé. On considère la suite récurrente u de premier terme u_1 et telle que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1}=\frac{u_n}{n}+1$.

1. En utilisant une calculatrice ou un tableur, calculer les premiers termes de cette suite et en réaliser une représentation graphique.

Le choix du nombre de termes et de la valeur de u_1 est laissé au candidat, qui en testera plusieurs, dont $u_1=-100$.

Appeler l'examinateur pour vérifier les calculs faits.

2. En fonction des différentes valeurs de u_1 :

a. émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite u ;

b. émettre une conjecture sur la limite de la suite u.

Appeler l'examinateur pour valider les deux conjectures et indiquer la méthode prévue pour les démonstrations de la question 3.

3. Dans cette question on suppose que $u_1=-100$.

a. Démontrer qu'à partir d'un certain rang n_0, à préciser, la suite u est décroissante.

b. Démontrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.

Production demandée

– Ecrans montrant les calculs ayant permis d'émettre les deux conjectures.

– Démarches et réponses argumentées pour la question 3.

5. 49. Suite définie par une moyenne arithmétique – 06/2008

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par : $u_n=\frac{6}{n}\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)=\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2$.

Partie expérimentale

1. A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n).

2. Emettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50, on ait : $u_n=f(n)$.

Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et proposer une méthode pour la préciser.

3. Mettre en place la stratégie validée par l'examinateur et déterminer précisément la fonction f.

Appeler l'examinateur, lui indiquer la fonction f trouvée et lui proposer une méthode pour résoudre la question 4.

Démonstrations

4. a. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $u_n=f(n)$ où f est la fonction validée par l'examinateur.

b. En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

Production demandée

– Des explications orales et à l'écran pour les questions 1. à 3. ;

– Les réponses argumentées à la question 4.

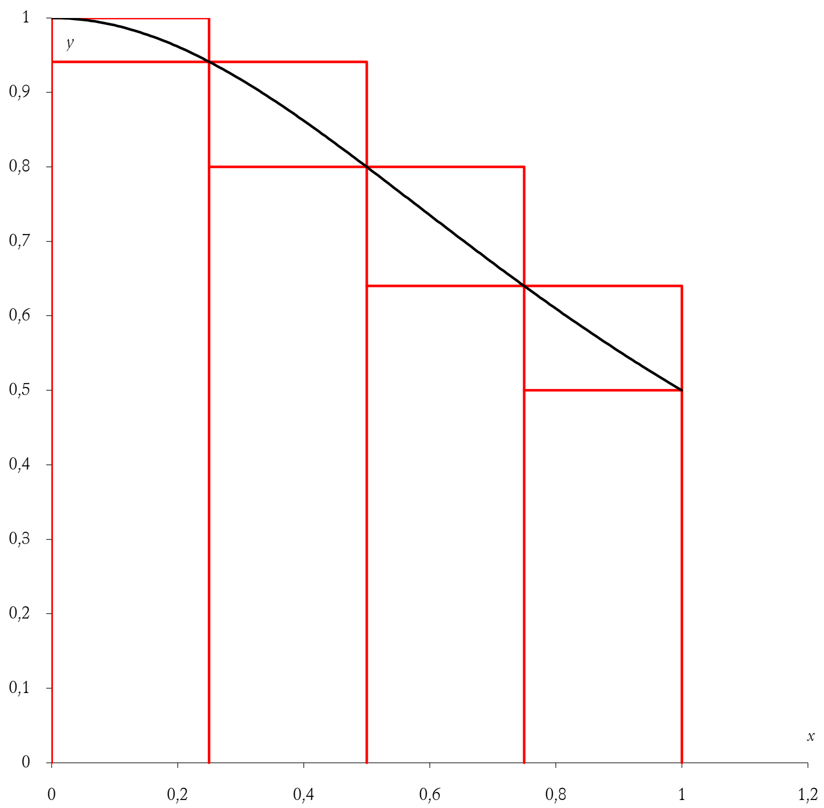
5. 50. Calcul approché d'une intégrale – 06/2008

On considère l'intégrale $I=\int_0^1 f(x)dx$, où la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.

Le but de l'exercice consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Pour cela on convient d'appliquer une méthode dite des « rectangles » et de partager l'intervalle [0 ; 1] en n intervalles de même amplitude, n étant un entier naturel non nul.

1. Dans cette question on donne à n la valeur 4. Quel encadrement de l'intégrale I le dessin ci-dessous suggère t-il ? Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?



Faire calculer cet encadrement par la calculatrice ou le tableur.

Appeler l'examinateur pour une vérification de l'encadrement trouvé.

2. On souhaite pouvoir généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, l'encadrement obtenu dans le cas où $n = 4$.

a. Modifier l'organisation du calcul pour obtenir l'encadrement de I et son amplitude dans le cas où $n = 10$ puis où $n = 20$.

Appeler l'examinateur pour une vérification de l'automatisation effectuée.

b. Conjecturer une valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}.

Appeler l'examinateur pour lui indiquer la conjecture émise et lui indiquer les méthodes envisagées pour la question suivante.

3. Proposer des éléments permettant de justifier que, pour la valeur trouvée en 2. b., l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure ou égale à 10^{-2}.

Production demandée

– Encadrements de I obtenus sur calculatrice ou tableur pour les valeurs de n demandées.

– Stratégie de démonstration du résultat conjecturé à la question 2. b.

5. 51. Expression du terme de rang n d'une suite récurrente – 01/2007

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la particularité trouvée

2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connaît la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n, la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1}. Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.

a. A l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la formule trouvée

b. Démontrer cette formule.

Production demandée

– Le nuage de points attendu dans la question 1 et la particularité trouvée à ce nuage.

– La stratégie de démonstration retenue à la question 2 ainsi que les étapes de cette démonstration.

5. 52. Comportement d'une suite définie par une relation de récurrence – 01/2007

Une suite v est définie par son premier terme v_0 et par la relation de récurrence : pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 6$.

1. A l'aide de la calculatrice ou du tableur, émettre une conjecture sur la limite l de la suite v, selon les valeurs de v_0.

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture

2. La suite w est définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - l$.

a. Observer à la calculatrice ou au tableur les premiers rangs de la suite w. Quelle semble être la nature de la suite w ¿ est-elle arithmétique ¿ géométrique ¿ ni arithmétique, ni géométrique ¿

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture

b. Démontrer la propriété conjecturée sur la nature de la suite w.

c. Exprimer pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n.

d. Déterminer la limite de la suite v.

e. Ce résultat est-il cohérent avec l'expérimentation ¿

Production demandée

− Réponses écrites pour les questions 2. b., 2. c., 2. d., 2. e.

5. 53. Equation différentielle et méthode d'Euler – 01/2007

Soit l'équation différentielle : $y' = -2y$. On admet que la fonction f solution de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f telle que $f(x) = \exp(-2x)$.

On cherche à comparer $f(1)$ aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.

On se place sur l'intervalle [0, 1] en prenant un pas h égal à $\frac{1}{n}$, où n est un entier supérieur à 2.

On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés M_k, d'abscisse x_k et d'ordonnée y_k telles que :

$$x_0 = 0,\ y_0 = 1, \text{ et pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \le k \le n-1,\ x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n} \text{ et } y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)y_k .$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n, y_k est une valeur approchée de $f(x_k)$.

1. Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée).

Appeler l'examinateur pour faire vérifier l'expression obtenue pour yk

2. A l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	k	x_k	y_k
10	0	0	1
Pas égal à 0,1	1	0,1	0,8
	2	0,2	
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

3. En déduire une valeur approchée de $f(1)$.

Appeler l'examinateur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec $n = 10$
Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque $n = 20$ ou $n = 30$.

4. Réitérer la méthode dans les cas $n = 20$ puis $n = 30$ et donner les valeurs approchées de $f(1)$ ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	10	20	30	Valeur approchée de e^{-2}
Valeur approchée de y_n				

5.A l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite des points M_k obtenue à la question 4., dans le cas où n est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

Appeler l'examinateur et lui présenter la représentation graphique réalisée.

Production demandée

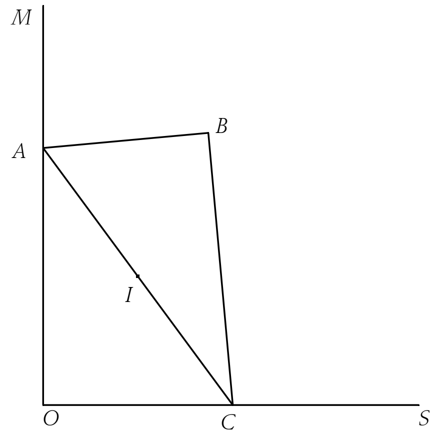
– Calcul de y_k en fonction de k.

– Réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur.

– Détermination de valeurs approchées de $f(1)$ (tableau rempli).

– Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.

5. 54. 2007 - Sujet 012 : Etude de lieux géométriques



Le triangle ABC représente une équerre telle que $AB = 3$, $AC = 6$ et l'angle en B est droit.

Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

On s'intéresse aux lieux des points I et B.

1. Observer les propriétés géométriques de la figure. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler l'examinateur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté

2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

$\boxed{\text{Appeler l'examinateur pour valider la conjecture}}$

3. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point B quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

$\boxed{\text{Appeler l'examinateur pour valider la conjecture}}$

4. a. Donner les mesures des angles de l'équerre, puis celle de AOB (A distinct de O).

b. En déduire que le lieu de B est inclus dans une courbe simple dont on précisera la nature.

c. Démontrer que : $OB = 6\sin\left(OAB\right)$.

d. En déduire le lieu de B.

Production demandée

− Réponse écrite pour la question 4.

5. 55. Suite définie par récurrence – 01/2007

On définit la suite u pour tout entier n, $n > 1$ par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$.

1. a. A l'aide d'un tableur, afficher les 30 premiers termes de cette suite puis afficher une représentation graphique de ces valeurs.

b. Quelle est l'allure du nuage de points obtenu ? Quelle conjecture peut-on faire ?

$\boxed{\text{Appeler l'examinateur pour vérification}}$

2. a. A l'aide du tableur, afficher les 5 premiers termes et une représentation graphique de $v_n = 3u_n$.

b. Proposer une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

$\boxed{\text{Appeler l'examinateur pour vérification}}$

c. Démontrer par récurrence que l'expression de u_n trouvée en 2. b. est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Production attendue

– Réponse écrite aux questions 1. b., 2. b. et 2. c.

– Affichage à l'écran des valeurs et représentations graphiques correspondantes avec contrôle par l'examinateur.

5. 56. Demi-vie – 01/2007

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse (de courte durée). La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale, puis elle diminue en fonction du temps. On fait l'hypothèse (H) suivante :

La diminution de la concentration entre deux instants t_0 et t_1 est proportionnelle à la fois à la durée $t_1 - t_0$ et à la concentration à l'instant t_0.

On note C_0 la concentration initiale et C_n la concentration au bout de n minutes. (On prendra pour unité de temps la minute et $C_0 = 1$ pour unité de concentration initiale à la fin de l'injection).

1. On admet que l'hypothèse (H) conduit à la relation : $C_{n+1} - C_n = -kC_n$ où k est une constante positive.

a. Expliciter, pour $n > 0$, C_{n+1} en fonction de C_n.

b. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

c. Exprimer C_n en fonction de n.

$\boxed{\text{Appeler l'examinateur pour contrôler le résultat obtenu}}$

2. On choisit $k = 0, 035$.

a. A l'aide d'un tableur calculer la valeur de C_n pour n allant de 1 à 300. Présenter les résultats dans un tableau comme ci-dessous :

	A	B	C
1	n	C_n	
2	0	1	
3	1	0,965	
4	2		

b. Tracer le nuage de points (n ; C_n) représentant l'évolution de la concentration sur 5 heures.

Appeler l'examinateur pour présenter le graphique

3. Etude de la demi-vie, c'est-à-dire la période au bout de laquelle la concentration du médicament dans le sang diminue de moitié.

a. Observations :

• Au bout de combien de minutes la concentration initiale aura-t-elle été divisée par deux ? Donner le résultat sous la forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.

• Quelle est la concentration au bout de 30 minutes ? Donner la valeur approchée à 10^{-2} près.

• Au bout de combien de minutes, cette dernière concentration aura-t-elle été divisée par deux ? Donner le résultat sous la forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.

• Que peut-on conjecturer ? Tester cette conjecture sur d'autres durées.

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture

b. Justification :

• Vérifier que pour tout entier naturel n, on a $C_{n+20} \leq 0{,}5C_n < C_{n+19}$.

• Valider la conjecture émise à la question 3. a.

Production demandée

– Réponses écrites pour les questions 1 et 3. b.

5. 57. Somme de termes d'une suite – 01/2007

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n entier naturel par $u_n = n^3$ et la somme de ses premiers termes $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Donner la somme V_n des n + 1 premiers termes de la suite arithmétique des entiers naturels, soit $V_n = 0+1+2+\ldots+n$.

2. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de S_n pour n allant de 1 à 30.

Appeler le professeur, lui montrer les calculs des termes S_1, S_2, …, S_{30} et lui indiquer la formule donnant V_n

3. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de V_n^2 dans les mêmes cas particuliers. Que constate-t-on ?

Appeler le professeur, lui montrer les calculs, lui indiquer la formule conjecturée et la méthode retenue pour la démonstration

4. A partir du constat ci-dessus, conjecturer une formule donnant la valeur de S_n en fonction de n, puis la démontrer. (On suggère une démonstration par récurrence.)

Production demandée

– Formule donnée sans démonstration exprimant V_n en fonction de n.

– Tableau des valeurs exactes des suites S_n et V_n^2 pour n de 1 à 30 (par exemple en imprimant la feuille de calcul).

– Formule, donnant S_n en fonction de n, conjecturée à partir du tableau précédent.

– Démonstration de la formule donnant S_n en fonction de n.

1. 6. Arithmétique (spécialistes)

6. 58. Cryptage et décryptage d'un message (spécialistes) - 06-2009

Préliminaire : on se réfère dans ce sujet à un langage de programmation capable de traiter des nombres entiers et des caractères, ce qui est le cas de la plupart des langages y compris ceux que fournissent certaines calculatrices programmables.

En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère un code numérique qui est un entier compris entre 0 et 255. Ainsi, le code de @ vaut 64, celui de A est 65, etc.

Questions de syntaxe : dans la plupart des langages de programmation il existe une fonction appelée **chr**() ou **char**() ou **car**() (par exemple avec Excel) et qui renvoie un caractère à partir de son code ASCII. On entre donc par exemple chr(65) pour obtenir la lettre A. La fonction réciproque est souvent nommée asc() ou ord(), de sorte qu'on tape ord("A") ou asc('A') (selon le langage) pour obtenir le nombre 65.

Pour simplifier ce qui suit, nous conviendrons de nous limiter à un sous-alphabet formé des lettres majuscules de A à Z et du caractère @ pour marquer les espaces. Dans ces conditions, la formule ord(c) – 64 renvoie un nombre compris entre 0 et 26 si la variable c contient une lettre de notre mini-alphabet.

1. Codage.

a. En utilisant le codage décrit ci-dessus, coder le message suivant : BONJOUR@A@TOUS

On définira un tableau pour ranger les lettres et un autre pour le codage du message.

Appeler l'examinateur pour lui montrer l'écran du logiciel après remplissage.

b. On va crypter (chiffrer) le message au moyen de la fonction C qui, à tout n entier appartenant à [0 ; 26] associe le reste $C(n)$ de la division de $13n$ par 27.

Adapter la procédure réalisée en 1. a. pour obtenir les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n, puis en déduire la lettre correspondante.

Appeler l'examinateur pour validation des résultats.

2. Décodage.

Notons D la fonction qui, à tout entier k appartenant à [0 ; 27], associe le reste de la division de $25k$ par 27.

À partir des nombres cryptés trouvés précédemment, retrouver le message originel en utilisant la fonction D.

Appeler l'examinateur pour vérification du résultat.

3. Amélioration.

Le codage proposé ci-dessus est rudimentaire, notamment parce que le caractère d'espacement @ est invariant. On modifie donc la fonction C ainsi : $C(n)$ = reste de la division de $13n + 8$ par 27. Comment faut-il modifier la fonction D ?

Appeler l'examinateur pour lui proposer une réponse éventuelle à cette question.

4. Justification du codage.

Pour le codage ASCII, deux lettres de l'alphabet sont codées par deux nombres distincts. Il faut donc s'assurer que le cryptage choisi au 1. b. code deux nombres n et p distincts, compris entre 0 et 26, par deux nombres distincts.

a. Montrer que, si $C(n) = C(p)$ alors 27 divise $13(n-p)$.

b. En déduire que $n = p$ puis que le codage est valide.

Production demandée

- Écrire le message codé et le message décodé.

– Justifications demandées aux questions 4. a. et 4. b.

6. 59. Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels (spécialistes) - 06-2009

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer U_1, U_2, …, U_{30}.

2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2, par 3, par 7 et par 13.

a. Quelles conjectures peut-on faire ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

b. À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2\times 7\times 13$?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.

5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2\times 7\times 13$?

Production demandée

- Les différentes conjectures.

- La démonstration de la question 4.

6. 60. Une propriété des diviseurs de certains entiers (spécialistes) - 06-2009

On dit qu'un entier naturel non nul N est en division harmonique si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

* 6 admet 4 diviseurs qui sont 1, 2, 3 et 6 ;

* la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$: le quotient $\frac{4}{2}=2$ est un entier, 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $a_n = 2^n q_n$.

a. Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.

b. Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de a_n et la somme des inverses des diviseurs de a_n. Que peut-on conjecturer ?

Appeler l'examinateur pour vérification.

Partie B

3. Soit p un nombre premier. Montrer que p n'est pas en division harmonique.

4. On suppose que q_n est premier.

a. Donner la liste des diviseurs de a_n en fonction de q_n.

b. Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de a_n vaut 2 ?

c. Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

- Questions 3 et 4.

6. 61. Restes modulo p – 06/2008

Le but de cet exercice est d'étudier les restes modulo p (p entier strictement supérieur à 1) des suites (u_n) définies par : $u_n = an + b$, a et b étant deux entiers naturels donnés.

1. Construire une feuille de calcul donnant les restes modulo 20 des 20 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = 12n + 5$.

Appeler l'examinateur.

2. Adapter la feuille de calcul de façon à obtenir les restes modulo p des 20 premiers termes de la suite définie par $u_n = an + b$, $n \in \mathbb{N}$, de telle manière qu'on puisse modifier les valeurs de a, b et p.

Notez sur votre feuille les restes obtenus dans les cas particuliers suivants :

a. $p = 20$ et $u_n = 5n - 3$;

b. $p = 7$ et $u_n = 5n - 3$.

Quelle conjecture peut-on formuler quant aux suites formées par ces restes euclidiens ?

Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture émise.

3. Démonstration de la conjecture :

a. Montrer que, parmi les nombres $u_0, u_1, \ldots, u_p$, il existe deux nombres ayant le même reste dans la division euclidienne par p, pour p entier naturel non nul.

b. Soient n_0 et $n_0 + T$ les rangs de ces deux nombres ($T \neq 0$). Montrer que aT est un multiple de p.

c. En déduire que pour tout entier naturel k, u_{T+k} et u_k ont le même reste dans la division euclidienne par p.

d Démontrer alors la conjecture.

Production demandée

– Feuille de calcul correspondant aux diverses suites.

– Les démonstrations de la question 3.

6. 62. Etude du reste d'une division euclidienne – 06/2008

Pour tout entier naturel non nul n on considère les deux nombres entiers $N = 3n^2 - n + 1$ et $D = 2n - 1$.

Le but de l'exercice consiste à déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division enclidienne de N par D.

Expérimentation

1. Déterminer, à l'aide d'un logiciel, les valeurs du reste de la division euclidienne de N par D, pour toutes les valeurs de n comprises entre 1 et 50.

2. Représenter graphiquement ce reste en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la représentation obtenue.

3. Conjecturer, suivant les valeurs de n, l'expression du reste de la division enclidienne de N par D.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture trouvée.

Justifications

4. La conjecture formulée est-elle vraie ? Justifier.

Production demandée

– Obtention à l'écran de la représentation demandée dans la question 2. de la partie I.

– La conjecture faite dans la question 3. de la partie I.

– La stratégie prévue pour valider ou invalider la conjecture faite.

6. 63. Solutions d'une relation de congruence – 06/2008

Le but du problème est de déterminer tous les entiers naturels n vérifiant la propriété P :

« $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$ ».

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice déterminer tous les entiers naturels n inférieurs ou égaux à $121 = 11^2$ vérifiant la propriété P.

Appeler l'examinateur, lui donner le résultat trouvé et expliquer la méthode utilisée.

2. On se propose, dans cette partie 2., de démontrer que tout entier naturel n vérifiant la propriété P est inférieur ou égal à 121.

a. Pour tout n entier naturel, calculer $a = n^2 + 11 - (n+11)(n-11)$.

Appeler l'examinateur, lui donner la valeur trouvée pour a et lui indiquer la méthode prévue pour résoudre la question 2. b.

b. Démontrer que tout n vérifiant la propriété P est inférieur ou égal à 121.

3. Conclure en donnant l'ensemble des entiers naturels vérifiant la propriété P.

Production demandée

– Explications orales pour les questions 1. et 2. a. et 3. ;

– Réponse argumentée à la question 2. b.

6. 64. Cryptographie – 01/2007

Le but de cet exercice est le cryptage et décryptage d'un message utilisant le « chiffrement à clef secrète ». On utilisera le codage informatique des lettres avec le code ASCII. Le message choisi est une citation de Mignon McLaughlin (journaliste et écrivain américaine, 1913-1983).

I- Expérimentation

Préliminaire : En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère (lettre de l'alphabet, chiffre, signe de ponctuation, ...) un code numérique que l'on appelle son code ASCII.

Par exemple, le code de A est 65, celui de B est 66, celui de a est 97, celui de l'espace est 32... Le code utilisé est un entier n tel que $0 \leq n \leq 255$.

Syntaxe : Dans la plupart des tableurs, la fonction «code» renvoie le code ASCII. La fonction réciproque est notée « CAR ». On entre « = CODE("A") » pour obtenir le nombre 65 et on entre « =CAR(65) » pour obtenir la lettre A.

1. Cryptage

a. En utilisant le code ASCII, coder le message suivant :

Dans l'arithmétique de l'amour, un plus un égal...

Dans la zone de saisie du message, on ne mettra qu'une seule lettre par cellule et on n'oubliera pas de taper un espace pour séparer les mots. La zone de saisie du message est la ligne 1 à partir de la cellule B1. Le message codé avec le code ASCII apparaitra sur la ligne 2 à partir de la cellule B2.

Appeler l'examinateur

b. Le code ASCII ne constituant pas un codage bien secret, la ligne 3 consiste à crypter le code ASCII en utilisant le cryptage suivant :

On note C la fonction de cryptage qui, à tout n entier appartenant à [0; 255] associe le reste de la division de $7n$ par 256. Soit $C(n)$ ce reste.

Compléter le tableau réalisé en 1. a., en y ajoutant à la ligne 3, les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n de la ligne 2.

Le tableau ci-dessous donne le début de la phrase et du codage à obtenir :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1	message	*D*	*a*	*n*	*s*		*l*		*a*	*r*	*i*	*t*	*h*	*m*	
2	codage ASCII	68	97	110	115	32	108	32	97	114	105	116	104	109	
3	message codé	220	167	2	37	224	244	224	167	30	223	44	216	251	

2 Décryptage à l'aide de la clef secrète

La fin de la citation de Mignon McLaughlin est cryptée par :

244 224 223 2 202 223 2 223 224 195 44 224 188 195 51 72 224 251 9 223 2 37 224 51 2 224 95 209 167 244 224 86 95 30 9

Pour décrypter la fin de cette citation, on note D la fonction de décryptage qui, à tout entier k appartenant à [0 ; 255], associe le reste de la division de $183k$ par 256.

Entrer en ligne les nombres cryptés ci-dessus, puis sur une nouvelle ligne, utiliser la fonction D pour lire la fin de la citation de Mignon McLaughlin.

Appeler l'examinateur

II- Justifications

1. Justification du codage : pour le codage ASCII, deux lettres de l'alphabet sont codées par deux nombres distincts.

Il faut s'assurer que le cryptage choisi au I- 1. b. code deux nombres n et p distincts, compris entre 0 et 255, par deux nombres distincts.

a. Montrer que, si $C(n) = C(p)$ alors $7(n-p) \equiv 0 \text{ modulo } 256$.

b. En déduire que $n = p$. Justifier alors que le codage est valide.

2. Explication du décodage

a. Vérifier que $183 \times 7 \equiv 1 \text{ modulo } 256$ et en déduire que $183 \times (7n) \equiv n \text{ modulo } 256$.

b. Expliquer pourquoi la fonction D, qui associe à k le reste de la division de $183k$ par 256, assure le décryptage attendu.

Production demandée

− 1. Partie I : Ecrire le message codé de la première partie de la citation et le message décodé de la fin de la citation.

− 2. Partie II : Rédaction des justifications demandées.

6. 65. Spécialité, PGCD – 01/2007

Pour tout entier naturel n, on définit deux entiers a et b en posant : $a = 4n + 1$ et $b = 5n + 3$.

On s'intéresse aux valeurs du PGCD de a et de b en fonction de n.

1. Conjecture avec un logiciel ou une calculatrice :

a. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, a et b pour n variant de 0 à 100.

b. Remplir la quatrième colonne avec les valeurs du PGCD de a et de b.

Appeler l'examinateur pour vérification

c. Quelles semblent être les valeurs possibles de PGCD(a, b) ?

d. En observant les résultats obtenus sur le tableur, comment pensez vous pouvoir caractériser les valeurs de n telles que PGCD(a, b) = 7 ?

Appeler l'examinateur pour vérification

2. Démonstrations :

a. Démontrer la conjecture faite au 1. c.

b. En raisonnant par disjonction des cas, déterminer les valeurs de n telles que PGCD(a, b) = 7.

Production attendue

– Réponses écrites aux questions 1. c. et d. et 2. a. et b.

– Obtention à l'écran des valeurs demandées avec éventuellement impression.

6. 66. Suite de Syracuse – 01/2007

A tout n entier naturel ($n > 1$), on applique l'algorithme suivant : si $n = 1$ le processus s'arrête, sinon :

– si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$,

– si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.

On note à nouveau n le résultat obtenu et on ré-applique l'algorithme à ce n. Lorsque, pour l'entier n, l'algorithme aboutit à 1, on appelle « suite de Syracuse associée à n » la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1.

On note $L(n)$ le nombre d'entiers de cette suite finie. $L(n)$ est la longueur de la suite de Syracuse associée à n.

Exemple : pour $n = 5$ on obtient successivement les nombres 5 − 16 − 8 − 4 − 2 − 1 et donc $L(5) = 6$.

1. a. A l'aide d'un tableur, appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.

b. Compléter alors la feuille de calcul en donnant les suites de Syracuse des 100 premiers entiers.

c. Préciser les valeurs de $L(26)$ et $L(27)$.

Appeler l'examinateur pour vérification du tableau construit

2. Etude de quelques résultats particuliers relatifs aux longueurs des suites $L(n)$ pour n entier naturel.

a. Quelle est la longueur des suites de Syracuse associées aux nombres de la forme 2^p pour p entier naturel non nul ?

b. Que remarque-t-on quant aux suites de Syracuse associées aux nombres de la forme $8k + 4$ et $8k + 5$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures émises

c. Démontrer la conjecture émise en 2. b.

3. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1 ou 2 alors l'algorithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à n.

La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul n le processus aboutit à 1.

La longueur de la suite quant à elle n'est pas, à l'heure actuelle prévisible, en toute généralité.

Production demandée

– Construction du tableau des suites de Syracuse pour les 10 premiers entiers.

– Le tableau pour les 100 entiers sera simplement visé par l'examinateur.

– Enoncé des conjectures du 2. – Preuve de 2. b. et de 3.

6. 67. Premier ou non premier – 01/2007

Le but de l'activité est de déterminer si les nombres de la forme a^4-1 et a^4+4 peuvent être premiers, a étant un entier **supérieur ou égal à 2**.

On s'intéresse aux nombres de la forme $A=a^4-1$ et $B=a^4+4$, a étant un entier supérieur ou égal à 2.

Partie A

1. À l'aide d'un tableur, calculer la valeur de A pour a compris entre 2 et 100.

2. Conjecturer suivant la valeur de a le reste de la division de A par 5.

Appeler le professeur.

Partie B

1. A l'aide d'un tableur, calculer la valeur de B pour a compris entre 2 et 100.

2. Conjecturer pour quelles valeurs de a, B est divisible par 5.

Appeler le professeur.

3. Quels sont les nombres de la liste obtenue dont on ne peut pas dire de façon évidente qu'ils ne sont pas premiers ? Que remarquez-vous ?

Appeler le professeur.

Partie C : preuves

1. Prouver la conjecture faite en A. 2.

2. A peut-il être un nombre premier ?

3. Prouver la conjecture faite au B. 2.

4. Prouver que si a est un multiple impair de 5, alors $B-\ldots$ est un multiple de 1000.

En déduire la preuve du B. 3.

5. Prouver que B n'est jamais premier, en remarquant que $a^4+4=a^4+4a^2+4-\ldots$

Appeler le professeur pour une éventuelle question subsidiaire.

Production demandée :

- construction des listes sur tableur et conjectures. - preuves écrites pour les questions de la partie C.

1. 7. Problèmes de Géométrie

7. 68. Angle maximum

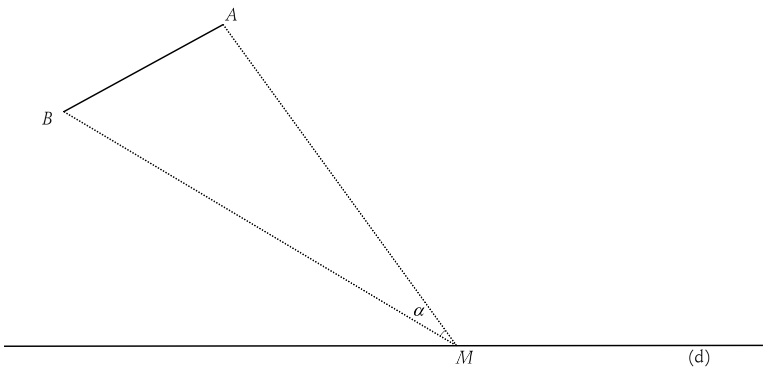
En se promenant sur une route rectiligne on observe un segment AB sous un angle α .

Cet angle varie suivant la position du point M.

1. En utilisant l'outil « lieu de points », tracer la courbe représentant α en fonction de la position du point M. Quel(s) enseignement(s) tire-t-on de cette courbe ?

2. Tracer le cercle circonscrit (C) au triangle AMB. Lorsque α est maximum que peut-on dire de (C) ?

3. On choisit un repère orthonormé où l'axe horizontal est la droite (d), B est sur l'axe vertical par exemple à l'affixe i et A à l'affixe $a+ib$. Un point quelconque du plan aura pour affixe $z=x+iy$.



On limite α à $[0\,;\pi]$.

a. On note $\arctan u$ (lire *arc tangente*) l'angle dont la tangente est u (ce qui est indiqué sous la forme $\tan^{-1}$ sur votre calculatrice). Montrer que $\alpha=\arctan\left(\frac{y-b}{x-a}\right)-\arctan\left(\frac{y-1}{x}\right)$

.

b. En utilisant une formule de trigonométrie, démontrer que $\tan\alpha=f(x)=\frac{(1-b)x-a}{x^2-ax+b}$.

c. Etudier les variations de f, dresser son tableau de variation et donner les coordonnées de son maximum sur $[0\,;+\infty[$.

4. Montrer en utilisant la dérivée des fonctions composées que $(\arctan u)'=\frac{u'}{1+u^2}$. En déduire la dérivée de $g(x)=\arctan\left[f(x)\right]$.

5. a. On choisit une position particulière du segment [AB] : $A(2+3i)$. Faire la figure dans ce cas.

b. Dresser le tableau de variation de g.

c. Justifier le résultat obtenu à la question 2.

6. Voici le raisonnement tenu par le mathématicien américain d'origine hongroise Georges Pólya en 1958 :

« Choisissons un point M quelconque sur la droite (d). Ce point, choisi au hasard n'est vraisemblablement pas dans la position correspondant au maximum. Comment pouvons-nous décider s'il s'y trouve ou non ?

On peut faire une remarque assez facile : si un point n'est pas dans la position correspondant au maximum il doit exister un autre point, de l'autre côté de la position correspondant au maximum, où l'angle en question a la même valeur. Existe-t-il un autre point M' sur la droite (d) d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle égal à celui sous lequel il est vu de M ? Nous pouvons répondre imédiatement à cette question : M et M' (s'il existe) doivent se trouver sur un même cercle passant par A et B d'après une propriété bien connue des angles inscrits dans un cercle.

L'idée de la solution commence à apparaître. Traçons plusieurs cercles passant par les points donnés A et B. Si l'un de ces cercles coupe la ligne (d) en deux points M et M' le segment $[AB]$ est vu de ces deux points sous le même angle mais cet angle n'est pas le plus grand possible : un cercle qui coupe (d) entre M et M' donne un angle plus grand. Des cercles qui coupent (d) ne peuvent donc faire l'affaire : le sommet de l'angle maximum est le point où un cercle passant par A et B touche la droite (d). »

Illustrer par une figure dynamique le raisonnement précédent.

7. 69. Trapèzes 1

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire : Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m,p) tel que : $m^2-p^2=8$? En existe-t-il plusieurs ?

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[\text{AB}]$ et $[\text{CD}]$ tels que :

* $\text{ABC}=45°$.
* les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD > 2.

Soit M le point du segment $[\text{AD}]$ tel que $\text{AM}=2$.

Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

7. 70. Trapèzes 2 (c)

Cet exercice n'est pas particulièrement destiné à être résolu… Si vous y arrivez tant mieux, mais ce qui compte c'est de montrer ce que vous pouvez faire : **toute trace écrite** sera prise en compte du moment qu'elle est cohérente. En tous cas n'y passez pas plus de 20-25 minutes.

On considère un trapèze $ABCD$ tel que les angles ABC et DCB aient la même mesure α.

Déterminer les valeurs de α pour que le trapèze $ABCD$ ait une aire maximale sachant que les côtés AB, BC et CD mesurent un mètre.

7. 71. Le jardin

Mon jardin est un rectangle ABCD. J'y ai planté un arbre avec un tronc très fin.

Mon arbre est situé exactement à 4 mètres de A, à 5,1 mètres de B et à 7,5 mètres de C.

A quelle distance de D se trouve-t-il ?

7. 72. Dans un triangle

Soit un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. M est un point du segment $[BC]$, P et Q désignent les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AC) et (AB).

1. Montrer que si le point M est sur le diamètre issu de A du cercle circonscrit au triangle ABC, alors la droite (PQ) est parallèle à (BC).

2. a. Montrer que les points A, Q, M et P sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que $PQ=AM\times\sin BAC$.

c. En déduire toutes les positions du point M pour lesquelles la somme des diagonales du quadrilatère $AQMP$ est minimale.

3. Déterminer toutes les positions du point M pour lesquelles l'aire du quadrilatère $AQMP$ est maximale.

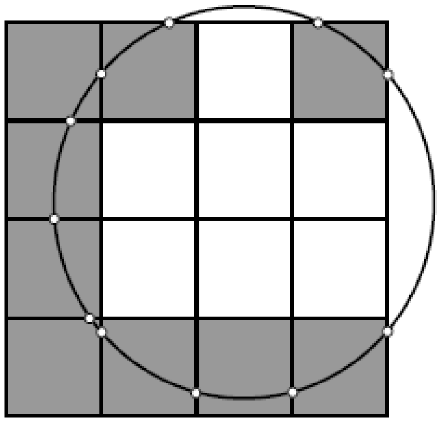
7. 73. Cercle sur quadrillage

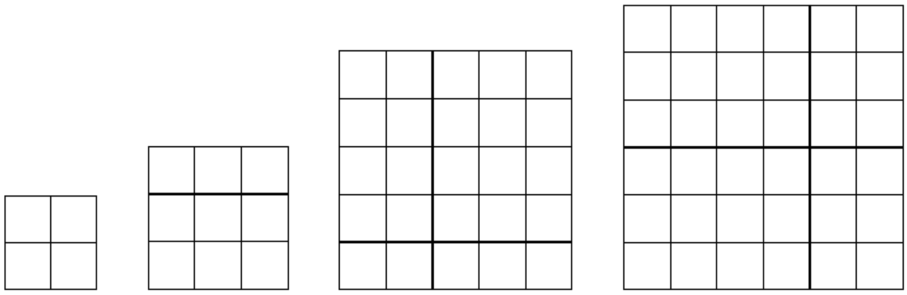
Dans un plan on dispose de damiers carrés de n cases de côté ($n \geq 2$), toutes les cases étant des carrés dont le côté est pris comme unité de longueur.

Sur chaque damier, l'objectif est de tracer un cercle qui traverse le plus grand nombre possible de cases. On considère qu'un cercle traverse une case s'il passe à l'intérieur de celle-ci.

1. Sur le damier 4×4 représenté ci-dessous, on a tracé un cercle qui traverse neuf cases. Peut-on en tracer un qui traverse davantage de cases ? Si oui, dessiner un tel cercle. Quel peut-être le nombre maximal de cases traversées ? Justifier la réponse.

2. Sur chacun des damiers représentés ci-dessous, tracer un cercle traversant un nombre maximal de cases. Indiquer pour chaque damier le nombre de cases traversées.





3. Formuler une conjecture sur le nombre maximal de cases traversées par un cercle sur un damier $n\times n$ où $n \geq 2$. Démontrer cette conjecture.

7. 74. Les lapins

Pour chaque question on fera une figure distincte.

Soit (C_1) et (C_2) deux cercles sécants de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 > R_2$) et de centres respectifs A_1 et A_2. On appelle I et J leurs points d'intersection.

Deux lapins L_1 et L_2 parcourent respectivement (C_1) et (C_2) dans le même sens (prendre le sens de rotation des aiguilles d'une montre) avec la même vitesse angulaire. Ils partent en même temps du point I.

1. Dessiner la position des deux lapins correspondant à un angle de 45 °.

2. Dessiner la position de L_2 lorsque L_1 se trouve en J, et en utilisant une autre couleur, la position de L_1 lorsque L_2 se trouve en J. Dans les deux situations que peut-on dire des triangles L_1JL_2 ?

3. Montrer que L_1, L_2 et J sont toujours alignés.

4. Existe-t-il une position de L_2 où J est le milieu de [L_1, L_2] ?

Dans l'affirmative donner la construction permettant de déterminer les points L_1 et L_2.

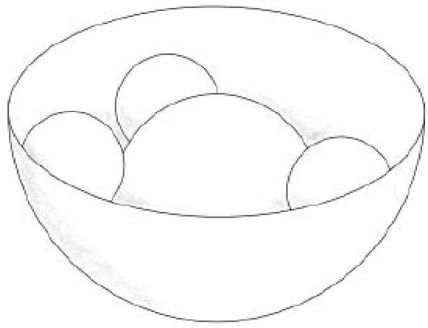
5. Montrer qu'il y a un point fixe du plan qui est, à tout instant, équidistant de L_1 et de L_2.

7. 75. Bol et Billes

Jean place une grosse bille de rayon R dans un bol hémisphérique de rayon $2R$. Il pose ensuite des petites billes de même rayon autour de la grosse bille de sorte que ces billes touchent à la fois le bol, la grosse bille et affleurent la surface circulaire du bol. On a représenté ci-dessous le bol avec la grosse bille et trois petites billes.

a. Exprimer en fonction de R le rayon des petites billes.

b. Combien Jean peut-il placer au maximum de petites billes dans le bol ?



7. 76. A la règle et au compas

1. Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que les droites (AB) et (CD) soient strictement parallèles et tels que $AB \neq CD$. Montrer que l'on peut construire le milieu O du segment [AB] uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction.

2. Soit A et B deux points distincts du plan, O le milieu du segment $[AB]$ et E un point quelconque du plan. Montrer que l'on peut construire une parallèle à la droite (AB) passant par E uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction.

3. Soit O un point du plan et r un réel strictement positif ; Γ le cercle de centre O et de rayon r ; $[AB]$ un diamètre du cercle Γ. Montrer que l'on peut construire le symétrique B_1 de B par rapport à A uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction.

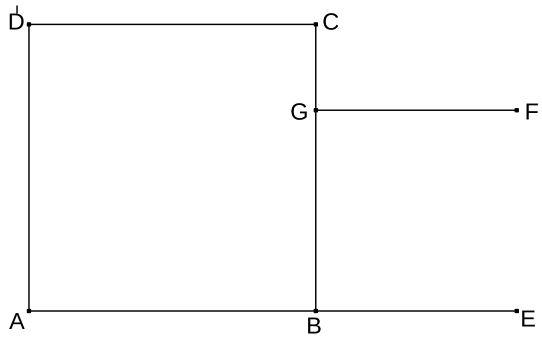
7. 77. Aires

ABCD est un quadrilatère convexe quelconque.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

Où doit-on placer un point O tel que les quadrilatères OIAL, OJBI, OKCJ et OLDK aient la même aire ?

7. 78. Deux carrés en un



ABCD et BEFG sont deux carrés dont les côtés ont pour longueurs respectives a et b, de telle sorte que $a > b$.

1. Soit I le point d'intersection des droites (EG) et (DF). Démontrer que I est le milieu du segment $[\text{FD}]$.

2. Soit Γ le cercle de centre I passant par le point B. On note H le deuxième point d'intersection de Γ avec la droite (AB). Justifier que $[\text{FD}]$ est un diamètre de Γ, puis démontrer que la droite (IH) est la médiatrice de $[\text{FD}]$.

3. Soit J le point d'intersection des droites (BG) et (HF).

On « découpe » la figure initiale selon les triangles EFH, FGJ, ADH et le quadrilatère CDHJ.

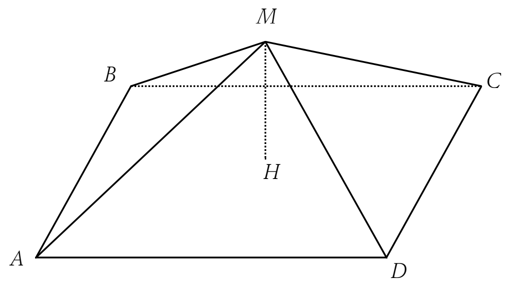
Montrer qu'en assemblant ces 4 polygones sans les superposer, on peut reconstituer un carré. Faire un dessin avec a = 4 cm et b = 3 cm.

4. Exprimer la longueur c = DH en fonction de a et b.

7. 79. Sur le toit

Un radio amateur place un mât d'antenne sur le toit rectangulaire de son garage à l'endroit où il fournit la meilleure réception (on suppose que ce mât est orthogonal au plan du toit).

Il fixe alors ce mât par des câbles rectilignes en fil de fer qui vont de la cime jusqu'aux coins du toit selon le schéma ci-dessous.



Sur ces quatre câbles, deux câbles non consécutifs mesurent 7 mètres et 4 mètres, un troisième mesure 1 mètre. Quelle est la longueur du dernier câble ?

7. 80. Hexagone

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

Les points P, Q, R, S, T et U sont les centres de gravité respectifs des triangles GAC', GBC', GBA', GCA', GCB' et GAB'.

1. Justifier l'égalité : PQ + QR + RS + ST + TU + UP = PS + QT + RU.

2. Calculer l'aire de l'hexagone PQRSTU en fonction de celle du triangle ABC.

7. 81. Pentagone

ABC est un triangle isocèle (AB = AC) dont l'angle $\hat{A}$ est obtus $\frac{\pi}{2} < \hat{A} < \pi$. On prendra AB = 8 cm.

1. Compléter le triangle ABC par deux points D et E de telle sorte que AB=BD=DE=EC, que la figure ABDEC admette pour axe de symétrie la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ et que les points D et A ne soient pas du même côté de la droite (BC).

2. En déduire la construction d'un pentagone AMNPQ dont les 5 côtés ont la même longueur et tel que le point M appartienne au segment [AB], les points N et P appartiennent au segment [BC] et le point Q appartienne au segment [CA]. On expliquera et justifiera le construction.

3. On suppose que le pentagone ABDEC de la question 1. est régulier. Quelle est la valeur nécessaire de l'angle $\hat{A}$? On note β cette valeur et on pose $\alpha = \frac{\beta}{3}$.

a. Montrer que α est égal à l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABC, et qu'il vérifie $\cos\alpha = \frac{1}{2} + \cos(2\alpha)$

b. On suppose que $A = \beta$. Démontrer que le pentagone ABDEC est régulier

7. 82. Les boules dans la boite

A - On dispose de deux boules de rayon r que l'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale carrée et de hauteur $2r$. On admettra que dans ces conditions les deux boules sont en contact et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

1. Déterminer en fonction de r les dimensions de la boîte.

2. Dans le cas où $r = 2$, réaliser une construction du côté de la boîte.

B - On dispose de trois boules de rayon r qu'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale triangulaire équilatérale et de hauteur $2r$. On admettra que dans ces conditions les trois boules sont en contact deux à deux et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

1. Déterminer la longueur du côté de cette boîte.

2. Dans le cas où $r = 2$, exprimer la longueur du côté sous une forme exacte non trigonométrique ne contenant que des racines carrées puis sous une forme approchée à 10^{-2} près.

3. Á partir d'un triangle équilatéral dont le côté a pour valeur approchée en centimètres celle trouvée dans la question précédente, réaliser une construction vue de dessus de la boîte et des trois boules qu'elle contient.

7. 83. Rectangle et triangle équilatéral

L'unité de longueur est le décimètre. On construit un rectangle ABCD et un triangle équilatéral DEF tels que : * A et E sont fixes avec AE=1,

* D est un point mobile du segment [AE],

* le périmètre du rectangle ABCD est 2.

Les points B, C et F sont situés dans le même demi-plan, délimité par la droite (AE). On introduit :

(C) le cercle circonscrit au rectangle ABCD, de centre noté O,

(C') le cercle circonscrit au triangle DEF, de centre noté O'.

Les cercles (C) et (C') se coupent en D et en un autre point D', (supposé distinct de D dans la suite).

On pose $x = \text{DE}$.

1. Construire la figure avec $x = 0{,}6$.

2. Pour quelle(s) position(s) du point D le rectangle ABCD et le triangle DEF ont-ils la même aire ?

3. Pour quelle valeur de x le quadrilatère ODO'D' est- il un losange ?

4. Montrer que, pour la valeur de x trouvée à la question 3, le losange ODO'D' est un carré.

7. 84. Théorème de Ptolémée

Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du 2ème siècle après J.-C. ; il utilisait une relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

D'une manière générale, si M, N, P, Q sont quatre points tels que $M \neq N$ *et* $P \neq Q$, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ *désigne une mesure en radians de l'angle de vecteurs* $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$.

Dans le plan orienté on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.

On place sur $[AC]$ le point E tel que $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right)$ (modulo 2π).

Première partie : uniquement avec un LGD

1. Faire la figure, mesurer les angles des triangles ABD et BEC. Calculer le quotient $\dfrac{EC \times BD}{BC \times AD}$.

2. Mesurer les angles des triangles ABE et BDC. Calculer le quotient $\dfrac{EA \times BD}{AB \times DC}$.

3. Quelle relation pouvez-vous écrire entre les longueurs AC, BD, AB, DC, BC et AD ?

Deuxième partie

1. Prouvez les résultats du 1. et du 2.

2. Déduisez de la relation obtenue au 3. que $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

7. 85. Les polygones de sustentation

Mayssa décide de nous faire une démonstration de Tecktonik (avec les bras serrés contre le corps). Elle s'aperçoit que si elle se tient les pieds joints et serrés, elle tient debout.

Si les pointes des pieds sont un peu écartées, elle tient debout, mais elle constate que son équilibre n'est pas parfait. Par contre, si elle met ses talons et les pointes de ses pieds opposés, elle a des difficultés à tenir debout.

Entre les deux positions extrêmes, essayons d'aider Mayssa afin qu'elle prenne une position qui lui procure une stabilité maximale.

Supposons que chacun de ses pieds mesure 30 cm et que ses talons soient séparés de 10 cm, schématisons alors chacune des situations précédentes sur la figure ci-dessous.

L'objectif est de rechercher la position des pieds afin que l'aire du quadrilatère $T_1T_2P_2P_1$ soit maximale.

Pour quelle raison ? Si vous regardez une table, ses quatre pieds déterminent une surface géométrique que l'on appelle **polygone de sustentation**. Si vous levez deux pieds de cette table, la surface géométrique va diminuer jusqu'à ce que le projeté du centre de gravité de la table sur le sol sorte de cette surface. La table basculera à ce moment-là.

1. Construire une figure dynamique permettant de représenter les différentes positions schématisées des pieds.

On notera θ une mesure (en degrés ou en radians) de l'angle que fait un pied $[T_2P_2]$ avec la droite (T_1T_2).

2. Déterminer la valeur de θ, notée θ_m, telle que les points P_1 et P_2 soient confondus. Vous donnerez d'abord la mesure exacte, puis une approximation au dixième près.

Pour la suite de l'exercice on supposera que θ appartient à $[0\,;\,\theta_m]$.

3. En faisant varier le réel θ, conjecturer la valeur de θ afin que l'aire de $T_1T_2P_2P_1$ soit maximale. Quelle est alors la valeur de cette aire ?

4. Justification mathématique de la conjecture

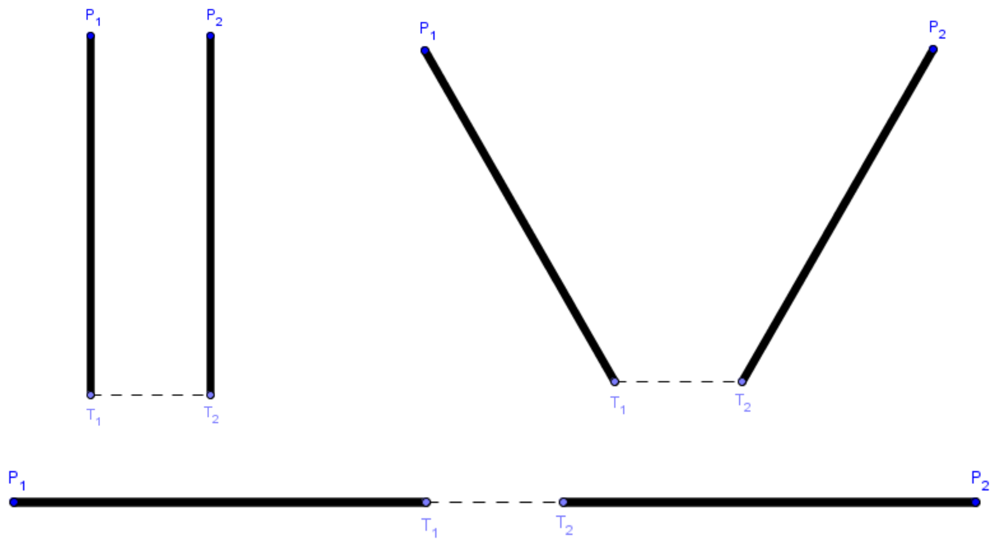
a. Soit A l'aire du trapèze $T_1T_2P_2P_1$. Montrer que $A = 300(1+3\cos\theta)\sin\theta$.

b. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\theta_m]$ par $f(\theta) = (1+3\cos\theta)\sin\theta$.

Montrer que la fonction f admet un maximum pour $\theta = \theta_0$ tel que $\cos\theta_0 = \dfrac{-1+\sqrt{73}}{12}$.

c. En déduire une valeur approchée de θ pour que l'aire de $T_1T_2P_2P_1$ soit maximale.

5. Pouvez vous imaginer une position des pieds de Mayssa non envisagée dans la situation précédente (les talons sont toujours écartés de 10 cm) ? Si vous trouvez une telle position, l'aire du polygone de sustentation est-elle alors plus grande que celle trouvée en 3. ?

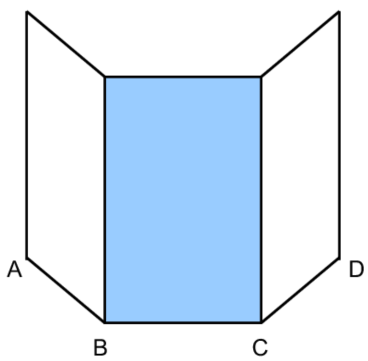


7. 86. Le paravent chinois (IG 02/2008)

Un paravent chinois se compose de 3 panneaux rectangulaires de mêmes dimensions. Les petits côtés, qui sont en contact avec le sol, mesurent 1 mètre.

Ce paravent découpe sur le sol un trapèze *ABCD*. On supposera que les angles *ABC* et *BCD* ont la même mesure et que les droites (*AD*) et (*BC*) sont parallèles. Ce polygone s'appelle le polygone de sustentation.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de l'angle *ABC* qui assure au polygone de « sustentation » une aire maximale.



1. Construire un trapèze *ABCD* tel que *AB*=*BC*=*CD* et (*AD*)//(*BC*). On s'assurera que la valeur de l'angle $a = ABC$ soit variable.

2. Conjecturer la valeur du réel *a* pour laquelle l'aire *s* du trapèze est maximum.

3. On note *H* le projeté orthogonal du point *B* sur la droite (*AD*) et on note *t* l'angle ABH, *t* étant compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. Visualiser, à l'aide du logiciel, l'ensemble des points *M* de coordonnées (*t*, *s*).

4. Validation de la conjecture.

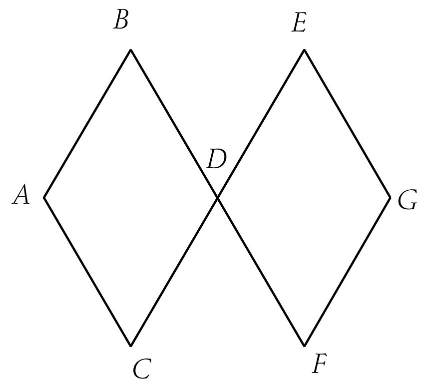
a. Démontrer que la fonction *f* définie par : $f(t) = [1+\sin(t)]\cos(t)$ représente l'aire du trapèze *ABCD* en fonction de *t*.

b. Vérifier à l'aide du logiciel que le point M est sur la courbe représentative de la fonction f.

c. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et conclure.

7. 87. Jouons avec le dessous-de-plat (IG 02/2008)

Un dessous-de-plat (style années 50) est constitué de six barres métalliques rigides, de différentes longueurs, assemblées et articulées entre elles pour former deux losanges de côté 1 (voir la figure ci-dessus).



Pour simplifier l'étude, on suppose que les barres sont de largeur nulle. Les barres sont alors représentées par les segments [AB], [AC], [BF], [CE], [EG] et [FG].

Le point A est supposé fixe. On déplace le point G le long d'une demi-droite d'extrémité A ; on constate que si le dessous de plat passe de la position de repli complet à l'extension complète, le point G décrit un segment de droite.

1. Préciser la longueur du segment décrit par le point G.

2. Construire une figure représentant ce dessous-de-plat en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.

3. Comment se déplacent les points B et C lorsque l'on déforme le dessous-de-plat (passage de la position de repli à l'extension complète) ?

En utilisant le logiciel, faire apparaitre l'ensemble de points décrit par le point E lors de la déformation du dessous-de-plat.

4. On définit désormais le repère orthonormal direct $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$ où le vecteur $\vec{u}$ est unitaire et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$. On note t l'abscisse du point G (t étant un réel positif).

a. Dans quel intervalle évolue le réel t lorsque l'on passe de l'extension complète à la position de repli ?

b. Déterminer les coordonnées du point E en fonction de t.

c. En utilisant le logiciel, tracer la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 3] par : $f(x)=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$.

d. Vérifier à l'aide du logiciel que le point E appartient à la courbe (C).

e. Retrouver le résultat précédent par un calcul.

7. 88. Cercle et carrés

(d'après Bac S France juin 2005, M. Obadia & C. Tremblay)

Dans le plan orienté, on considère deux points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[OA]$ et M un point variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des point O et A.

On considère de même les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$.

On note enfin G le milieu du segment $[PL]$.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de déterminer le lieu des points N.

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler le professeur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la position du point G lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé de O et A ?

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire :

a. sur la distance KN ?

b. sur la nature du triangle GNK ?

Appeler le professeur pour valider les conjectures.

4. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point N lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé de O et A. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

5. Afficher un repère orthonormal direct. Déplacer les points O et A de sorte que O soit l'origine de ce repère et A le point de coordonnées $(1;0)$. Agrandir la figure de manière à la rendre lisible.

Quelles sont alors les coordonnées du point G ? Que vaut la distance KN ?

Production écrite

Objectif : démontrer partiellement ou totalement les conjectures émises.

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on a $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2. Établir les relations suivantes : $l = im$ et $p = -im + 1 + i$.
On admettra que l'on a également $n=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$.

3. a. Démontrer que le milieu G du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

b. Démontrer que le point G appartient au cercle $\mathcal{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

4. a. Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b. Quelle est la nature du triangle GNK ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

1. 8. Problèmes d'Analyse

8. 89. Triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre O.

On considère un point M du segment [AB]. On pose x = AM. Si les droites (MO) et (AC) sont sécantes, on appelle N leur point d'intersection.

1. Quel est l'ensemble I des réels x pour lesquels N appartient au segment [AC] ?

2. Pour tout x élément de I, on note $S(x)$ l'aire du triangle AMN. Quelles sont les valeurs minimale et maximale de $S(x)$?

8. 90. Trajets

Quatre maisons sont situées aux quatre coins d'un carré de côté 1. On souhaite construire un réseau routier qui permette de relier les maisons mais on veut que ce réseau soit le plus court possible.

1. Dans un premier temps on envisage de créer un rond-point à l'intérieur du carré comme dessiné sur la figure 1. Quel est alors le réseau le plus court ?

2. Un des habitants s'est rendu compte qu'avec deux ronds-points placés comme sur la figure 2, on pouvait réduire la longueur du réseau.Vérifier qu'il a raison.

3. Trouver la valeur de x qui permet d'obtenir le réseau le plus court dans la configuration de la figure 3.

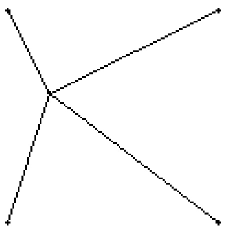


figure 1

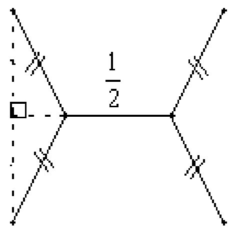


figure 2

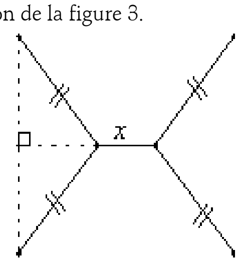


figure 3

8. 91. Distance d'un point à une courbe

Si Γ est un ensemble non vide de points du plan (resp. de l'espace) et si A est un point du plan (resp. de l'espace), on appelle distance de A à Γ, le plus grand des minorants de l'ensemble {AM ; M $\in \Gamma$ }, ce nombre est noté d(A ; Γ).

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-2x$ et on note (P) sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. Soit A un point du plan et M un point de (P). On note x son abscisse.

On considère le cercle (C) de centre A qui passe par M.

a. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de construction géométrique.

b. Déterminer les éventuelles positions de M pour lesquelles la distance AM est minimale.

c. Recommencer pour différentes positions du point A.

2. Conjectures

a. Y a-t-il des positions de A où il n'y a aucune position de M pour laquelle AM est minimale ? Si oui lesquels ?

b. Y a-t-il des cas où il y a plusieurs positions de M pour lesquelles AM est minimale ? Si oui lesquels ?

c. Comment sont positionnés le cercle (C) et la courbe (P) lorsque AM est minimale ?

d. Quelle condition vérifie le vecteur $\overrightarrow{AM}$ lorsque AM est minimale ? Est-ce que la distance AM est minimale lorsque le vecteur $\overrightarrow{AM}$ vérifie cette condition ?

Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses .

3. Détermination de quelques distances

Utiliser le logiciel pour déterminer une valeur approchée de la distance de A à (P) dans chacun des cas suivants :

a. A(2 ; 0) b. A(0 ; 2) c. A(5 ; 1) d. A(– 5 ; – 2)

Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses .

4. Démonstration : Démontrer la condition que doit vérifier le vecteur $\overrightarrow{AM}$ lorsque AM est la distance minimale trouvée.

Production : Rédiger les réponses aux 1. et 2. et la démonstration du 3.

8. 92. Deux courbes qui se frôlent (IG 02/2008)

Objectif : Il s'agit de déterminer, dans certains cas particuliers, les conditions pour qu'une parabole et un cercle soient tangents l'un à l'autre (c'est-à-dire qu'ils ont un point commun en lequel leurs tangentes respectives sont identiques).

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit r un nombre réel strictement positif. On considère la parabole P d'équation $y=x^2-3$ et le cercle C de centre O et de rayon r.

1. Un peu d'exploration

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique construire la parabole P et le cercle C.

b. Conjecturer le nombre de points communs à la parabole P et au cercle C en fonction du nombre réel r.

c. Donner une valeur approchée du (ou des) rayon(s) r tel(s) que la parabole P et le cercle C soient tangents (c'est-à-dire, se coupent en un point où leurs tangentes sont les mêmes) et donner dans ce cas une valeur approchée des coordonnées des points de tangence observés.

On suppose dans la suite de cette étude que $0<r<3$.

2. Un peu de calcul

a. Écrire un système (S) d'équations vérifié par les coordonnées x et y des points communs à la parabole P et au cercle C lorsqu'ils existent.

b. En déduire qu'alors x est solution d'une équation (E) « bicarrée », soit de la forme $ax^4+bx^2+c=0$, et pour laquelle on explicitera les valeurs de a, b et c.

3. Un peu de justification

a. Discuter du nombre de points d'intersection du cercle et de la parabole lorsque $0<r<3$ et faire le lien avec le nombre de solutions de l'équation (E).

b. Caractériser les cas de tangence et en déduire la valeur du rayon r, ainsi que les coordonnées des points communs à la parabole P et au cercle C, dans ce cas.

1. 9. Tableur

9. 93. Simulation de la radioactivité

Remarque technique : on utilise ici la fonction **=ALEA()** d'Excel. Cette fonction renvoie un nombre au hasard (aléatoire) compris entre 0 et 1 (1 non compris).

A chaque saisie d'une nouvelle cellule Excel recalcule toute la feuille, ce qui n'est pas très pratique parfois. Pour éviter cet inconvénient, faire « Outils », « Options », « Calcul » puis mettre « Recalcul » à « sur ordre » et décocher « recalcul avant enregistrement ».

Dorénavant vous devrez appuyer sur la touche « F9 » pour recalculer votre feuille.

0

Un « bon » moyen de simuler la rédioactivité est de lancer un dé à n faces de nombreuses fois, par exemple 5000 fois et de compter par exemple tous les 1. Le nombre de 1 correspond alors au nombre d'atomes se désintégrant sur une période de temps Δt .

On supprime alors les dés ayant marqué 1 et on relance les dés restants ; on compte les 1, on supprime les dés correspondants, etc.

1. Entre les formules suivantes, laquelle permet de simuler le lancer d'un dé à 10 faces ?

=ALEA(10) =10*ALEA() =10*ENT(ALEA()) =ENT(10*ALEA()) =1+ENT(10*ALEA())

On utilise donc une de ces formules que l'on recopie sur 5000 lignes dans la colonne A ;

- pour compter le nombre de 1 sur les 5 000 lignes on utilise la fonction =NB.SI(Cellule1 :Cellule2 ;1) ;
- pour compter le nombre de termes dans une colonne on utilise la fonction =NB(Cellule1 :Cellule2) ;
- pour mettre une condition sur une cellule on utilise la fonction =SI(condition ;si vrai ;si faux).

Par exemple si il y a 1 dans A3 on peut écrire dans B3 : =SI(A3=1 ;0;2) qui mettra 0 si A3 = 1, 2 sinon.

2. Quelle formule mettre dans la colonne B pour avoir 0 si on a 1 dans A et de nouveau un nombre aléatoire sinon ?

3. a. Recopier la colonne B sur une douzaine de colonnes, calculer la proportion de dés encore actifs à chaque colonne, tracer les résultats en fonction du numéro de colonne.

b. Recalculer plusieurs fois la feuille pour vérifier la stabilité de la simulation.

4. Ainsi que vous l'avez vu en Physique et en Maths, la désintégration radioactive suit une loi exponentielle : le nombre de noyaux subsistants est donné par la fonction $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, N_0 étant le nombre initial de noyaux : on peut prendre ici $N_0=1$.

a. Trouver la valeur de la constante λ pour $n=10$. Vérifier que la fonction N est bien ajustée à la courbe de la question 3.

b. Reprendre la question précédente avec $n=5, 8, 12, 20, 40$. Quelle est la relation entre λ et n ? Comment l'interprétez-vous physiquement ?

c. Déterminer alors la période (demi-vie) de l'élément considéré pour chaque valeur de n.

d. Le $_{14}C$ a une période de 5000 ans environ. A quelle valeur de n cela corrspond-il ?

9. 94. Approche probabiliste d'une intégrale (IG 02/2008)

Soit g la fonction numérique définie pour tout x appartenant à [0 ; 1] par $g(x)=x(1-x)e^{2x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. À l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice représenter la courbe (C).

b. Soit I, J et K les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1). Observer la position de la courbe (C) par rapport au carré $OIKJ$.

Dans la suite de l'exercice, on note D l'ensemble des points de coordonnées (x ; y) tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq g(x)$.

On admet que, lorsqu'on choisit un point au hasard à l'intérieur du carré $OIKJ$, la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble D est égale à l'aire de cet ensemble (c'est-à-dire de la partie du carré $OIKJ$ située sous la courbe (C)).

On choisit au hasard un point à l'intérieur du carré $OIKJ$. On cherche quelle est la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble D.

2. a. À l'aide d'un tableur, simuler le tirage d'un échantillon de 200 points à l'intérieur du carré $OIKJ$ et déterminer la fréquence des points appartenant à D dans cet échantillon.

On utilisera la fonction **=ALEA()** qui donne un nombre entre 0 et 1 (non compris).

b. Réaliser 9 autres simulations de tirages d'échantillons de 200 points choisis au hasard dans le carré $OIKJ$ et compléter le tableau de valeurs suivant où k est le rang de l'échantillon et f_k la fréquence des points appartenant à l'ensemble D dans l'échantillon de rang k.

rang k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquence f_k										

Donner des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près.

c. À l'aide d'autres simulations, émettre une conjecture sur la probabilité que le point choisi appartienne à l'ensemble D.

3. Dans cette question on envisage quelques formes de vérifications de la conjecture précédente.

a. Montrer que la probabilité que le point choisi aléatoirement dans le carré $OIKJ$ appartienne à l'ensemble D est $p=\int_0^1 g(x)dx$.

b. Calculer p à l'aide de deux intégrations par parties successives.

4. Dans l'exemple ci-dessus on peut calculer l'intégrale, mais ce n'est pas toujours le cas évidemment. On regarde ici une méthode numérique.

a. On découpe l'intervalle [0 ; 1] en n parties identique de largeur $\frac{1}{n}$: [0 ; 1] est alors la réunion d'intervalles de la forme $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$ avec k variant de 0 à $n-1$.

En faisant un petit schéma vérifier que l'aire sous la courbe (C) dans l'intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$ est comprise entre $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. Le sens de variation de g a-t-il une influence sur ce résultat ?

b. Donner un moyen simple de calcul approché de $p=\int_0^1 g(x)dx$.

c. Retrouver les résultats précédents.

9. 95. Investigations autour d'une équation différentielle (IG 02/2008)

On considère l'équation différentielle $(E): y'=-2xy$.

Dans une première partie, la méthode d'Euler nous donnera une approximation sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f solution qui vaut 1 en 0. Dans une deuxième partie nous vérifierons qu'une fonction donnée est solution et nous comparerons à l'approximation trouvée en première partie.

1. On se donne un pas h strictement positif et deux suites (x_n) et (y_n) définissant une suite de points (M_n) de coordonnées (x_n, y_n) où :

* $x_0=0, x_{n+1}=x_n+h$
* $y'_n=-2x_n y_n$,
* $y_0=1$ et $y_{n+1}=y_n+hy'_n$.

Les termes y_n sont des approximations de $f(x_n)$ par la méthode d'Euler.

a. À l'aide d'un tableur, faire apparaître les valeurs approchées à 10^{-2} près de x_n et de y_n pour un pas h valant 0,1.

n	x_n	y_n	y'_n
0	0	1	0
1			
2			
3			
4			

b. À l'aide du grapheur, représenter la suite des points (M_n).

2. a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-x^2}$ est une solution de l'équation différentielle $(E): y'=-2xy$.

b. En posant pour tout réel x, $h(x)=e^{x^2}g(x)$, montrer que h est une fonction constante et que g est la seule solution de l'équation telle que $g(1)=0$.

Tracer à l'aide du grapheur la courbe de f et comparer avec l'approximation obtenue dans la question 1.

9. 96. Méthode d'Euler et son domaine de validité sur un exemple

Objectifs du problème

A partir d'un modèle discret (*une suite*) défini à l'aide de la méthode d'Euler, aboutir à un modèle continu (*une fonction*). Puis, une fois la fonction parfaitement déterminée, chercher pour quelles valeurs du pas de la méthode d'Euler, les deux modèles donnent des résultats similaires.

Préambule

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Afin d'obtenir une approximation de la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, inconnue mais dont on admet l'existence et l'unicité, passant par l'origine O du repère, on utilise la méthode d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés M_n, d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0=0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1}=x_n+0{,}2\ ; \\ y_0=0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ y_{n+1}=-0{,}2y_n^2+y_n+0{,}8. \end{cases}$$

Partie A – Etude d'une suite

1. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculer les coordonnées des points M_n pour n entier naturel vérifiant $0\le n\le 7$ et représenter le nuage de points M_n ainsi obtenu.

2. Par lecture graphique, quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

3. Démonstration des conjectures précédentes.

Pour tout réel x, on pose $p(x)=-0{,}2x^2+x+0{,}8$.

a. Démontrer que si $x\in[0\,;2]$ alors $p(x)\in[0\,;2]$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0\le y_n\le 2$.

c. Etudier le sens de variation de la suite (y_n).

d. Démontrer que la suite (y_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B – Recherche d'une équation différentielle dont f doit être une solution

1. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression du coefficient directeur a_n de la droite (M_nM_{n+1}) en fonction de y_n.

2. L'existence de la fonction f étant admise, on note M et P les points de (C) d'abscisses respectives x et $x+h$ avec $x\in[0\,;+\infty[$ et h un réel non nul tel que $x+h\in[0\,;+\infty[$.

Quel est le coefficient directeur de la droite (MP) ?

3. On admet qu'il est égal à $4-\left[f(x)\right]^2+\varepsilon(h)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Par passage à la limite, justifier que la fonction f doit être nécessairement solution d'une équation différentielle (E) à préciser.

En déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.

Partie C – Etude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=2\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$.

1. Prouver que la fonction g est égale à la fonction f de la question B-2.
2. En utilisant une calculatrice ou un tableur, construire la courbe (C) et sa tangente (T) au point O.
Quelles conjectures peut-on émettre :
- sur le sens de variation de la fonction g ;
- sur l'existence d'une asymptote Δ à (C) ;
- sur l'abscisse τ du point d'intersection I de (T) avec Δ .
3. Démontrer toutes les conjectures formulées en C-2.

Partie D – Etude de l'influence du choix du pas h suivant sa position par rapport à τ

1. Ecrire les équations donnant les abscisses x_n et les ordonnées y_n des points M_n pour un pas h (et non plus 0,2 comme au préambule).

2. a. Tracer la courbe (C) et tracer les nuages de points M_n que l'on obtient pour les valeurs suivantes de h *(on précisera pour chaque valeur de h, la valeur maximale de n que l'on peut prendre pour que le point M_n apparaisse sur le graphique)* :

$$* \ h=0{,}1\tau \ ; \qquad * \ h=0{,}6\tau \ ; \qquad * \ h=\tau \ ; \ * \ h=1{,}2\tau .$$

b. Commentez de manière précise les résultats obtenus.
c. Que se passe-t-il pour $h=\tau$ ¿ Démontrer ce résultat.
d. Y-a-t-il des valeurs de h qui vous paraissent inacceptables (*justifier votre réponse*) ¿
3. Question « ouverte »
a. A l'aide du tableur conjecturer la valeur de h (à 10^{-2} près) à ne pas dépasser pour que la suite (y_n) soit croissante et possède tous ses termes dans l'intervalle $[0\,;2]$.
b. Prouver cette dernière conjecture.

<u>9. 97. Fonction exponentielle par la méthode d'Euler</u>

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable dont la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même. Il s'agit ici d'utiliser un tableur pour tracer la courbe représentative d'une telle fonction f vérifiant donc

$$f'=kf$$

(où k est un réel non nul donné) et la condition initiale $f(0)=1$. On dit que f est solution de l'équation différentielle $y'=ky$ (y représente ici une fonction). Lorsque k = 1, nous reconnaissons la fonction " exp ", abordée en cours.

Méthode d'Euler **:** f étant dérivable en tout réel a, on dispose de l'approximation affine de f au voisinage de a qui consiste à confondre, au voisinage de a, la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse a.
Ainsi, pour tout réel h voisin de 0 : $f(a+h)\simeq f(a)+h\cdot f'(a)$.

Comme $f'=kf$, cette approximation peut s'écrire : pour $h\simeq 0$, $f(a+h)\simeq(1+kh)f(a)$.

Prenons par exemple $h=0{,}01$. Partant de $f(0)=1$, cette approximation est itérée pour obtenir de proche en proche les valeurs approchées de $f(0{,}01)$: $f(0{,}01)\simeq(1+0{,}01k)f(0)$; $f(0{,}02)$: $f(0{,}02)\simeq(1+0{,}01k)f(0{,}01)$ et obtenir l'allure de la courbe de la fonction f.

Objectifs du TP :
• Obtenir des valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs de x appartenant à un intervalle I donné.
• Obtenir une courbe représentative "approchée" de la fonction f. On connait un point de la courbe C_f : le point $M_0(0\,;1)$.

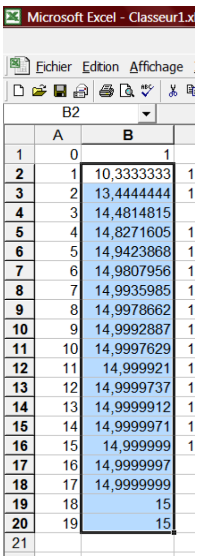
Soit $h>0$ fixé. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0=0 \\ x_{n+1}=x_n+h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0=1 \\ y_{n+1}=(1+kh)y_n \end{cases}.$$

Si $h\simeq 0$, nous savons que pour tout entier n, y_n est une valeur approchée de $f(x_n)$.

On utilise le tableur pour obtenir les valeurs de x_n et y_n et construire la suite des points $M_n(x_n\,;y_n)$ qui donneront une bonne approximation de la courbe C_f sur un intervalle donné, par exemple $I=[-3\,;3]$.

1. $k=1$ et $h=0{,}1$.
* Ouvrir une feuille de calcul.
* Dans la cellule A1, écrire " k = ", puis dans la cellule B1 la valeur de k.
* Dans la cellule A2, écrire : " pas : h = " , puis dans la cellule B2 la valeur de h .
* Dans les cellules A4, B4 et C4, écrire respectivement : " n", " x(n) " et " y(n) ".



	A	B
1	0	1
2	1	10,3333333
3	2	13,4444444
4	3	14,4814815
5	4	14,8271605
6	5	14,9423868
7	6	14,9807956
8	7	14,9935985
9	8	14,9978662
10	9	14,9992887
11	10	14,9997629
12	11	14,999921
13	12	14,9999737
14	13	14,9999912
15	14	14,9999971
16	15	14,999999
17	16	14,9999997
18	17	14,9999999
19	18	15
20	19	15
21		

* Entrer les valeurs convenables dans les cellules A5 , B5 et C5.
* Entrer les formules correctes dans A6 , B6 et C6.
* Recopier ces formules jusqu'à la ligne 35.

A ce stade de la procédure, on obtiendra une courbe approchée de C_f pour $x \in [0;3]$. Pour prolonger les données saisies à l'intervalle $[-3;3]$:

* Sauter une ligne.
* Dans les cellules B37 et C37 , écrire respectivement : " 0 " et " 1 ".
* Dans les cellules B38 et C38 , entrer les formules permettant de diminuer x de 0,1 et d'obtenir la valeur de y correspondante.
* Recopier ces formules jusqu'à obtenir le nombre -3 dans une cellule B.....
* Sélectionner les cellules B5 et C67, choisir dans l'assistant graphique, « nuage de points », « nuage de points reliés par une courbe ».

2. Imprimer la courbe obtenue en lui donnant un titre.
3. Reprendre la question 1 avec différentes valeurs de k ($k=-1$; $k=2$; ...).
4. Reprendre les questions 1 et 2 avec un pas $h=0{,}01$.

<u>9. 98. Suite récurrente : une mise en route</u>

L'objectif de cet exercice est double :

- En mathématiques : prendre conscience de l'effet de la valeur du premier terme d'une suite définie par récurrence.
- En TICE : continuer à apprendre à utiliser un tableur.

Première partie : les observations

On s 'intéresse à la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 10 \end{cases}$.

1. Calculer, à l'aide d'un tableur, les vingt premiers termes de cette suite.
2.°Conjecturer alors le sens de variation et la limite de cette suite.
3. Nous allons maintenant modifier la valeur du premier terme u_0, par exemple, u_0= 30, en conservant la formule de récurrence.

<u>Procédure</u>

- Afin de ne pas perdre les informations, vous pourrez insérer une colonne pour les valeurs de n (cela servira pour le graphique plus tard).
- Taper la valeur 30 dans la cellule C1,
- Sélectionner la plage de formules B2:B20,
- recopier les formules vers la droite, avec la poignée de recopie située dans le coin en bas à droite de la partie sélectionnée

Vos conjectures concernant le comportement de la nouvelle suite, sont-elles les mêmes ?

4. En procédant de la même manière, faire plusieurs essais successifs (6 ou 7 en plus des deux déjà effectués) en changeant seulement la valeur du premier terme u_0, tout en conservant la même formule de récurrence.
5. Faire un graphique représentant (nuage de points) ces suites.

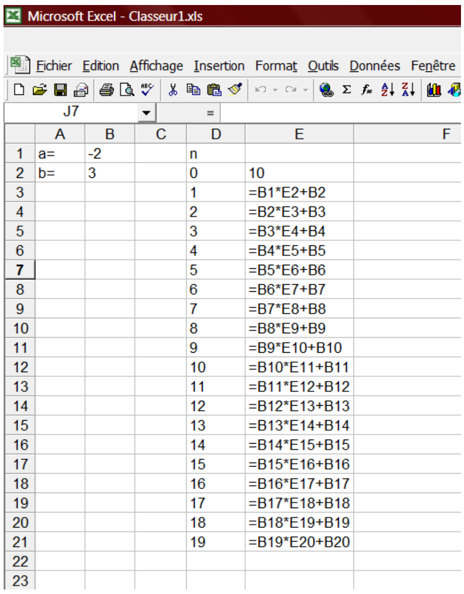
<u>Procédure</u>

- Sélectionner la plage de cellules contenant toutes les valeurs, et utilisez l'assistant graphique.

6. Observez ce graphique.
7. Citer trois valeurs de u_0 telles que la suite u est strictement croissante, trois valeurs telles que la suite u est strictement décroissante et une valeur telle que la suite u est constante.

Que peut-on dire de la limite de la suite, dans chaque cas ?

8. Prenez le temps de prendre conscience du fait que la suite u semble toujours monotone, et que, de plus, cela ne dépend que de la valeur de u_0 (la formule de récurrence étant toujours la même).



	A	B	C	D	E	F
1	a=	-2		n		
2	b=	3		0	10	
3				1	=B1*E2+B2	
4				2	=B2*E3+B3	
5				3	=B3*E4+B4	
6				4	=B4*E5+B5	
7				5	=B5*E6+B6	
8				6	=B6*E7+B7	
9				7	=B7*E8+B8	
10				8	=B8*E9+B9	
11				9	=B9*E10+B10	
12				10	=B10*E11+B11	
13				11	=B11*E12+B12	
14				12	=B12*E13+B13	
15				13	=B13*E14+B14	
16				14	=B14*E15+B15	
17				15	=B15*E16+B16	
18				16	=B16*E17+B17	
19				17	=B17*E18+B18	
20				18	=B18*E19+B19	
21				19	=B19*E20+B20	
22						
23						

A quel intervalle semble devoir appartenir u_0 pour que la suite soit strictement croissante ? strictement décroissante ?

Deuxième partie

1. Nous allons modifier la feuille de calcul de façon à pouvoir calculer les valeurs des termes de la suite u définie par par son premier terme u_0, qu'on pourra modifier, et par la formule de récurrence $u_{n+1}=au_n+b$, a et b pouvant être modifiés.

- Ouvrir la feuille 2 de votre classeur. L'image ci-contre montre le début de la procédure.
- Vous avez compris que u_0 = 10.
- Vous reconnaissez dans la cellule E3 la formule qui permet de calculer u_1.

- Que se passe-t-il quand on recopie cette formule vers le bas ? - Obtient-on le résultat attendu ?

- Observez les formules contenues dans les différentes cellules de la colonne E.

- Quelle formule aimerait-on voir dans la cellule E4 ?

- Et dans la cellule E5 ?

Procédure

Pour fixer l'adresse d'une cellule dans une formule afin de la rendre insensible aux glissements dus à la recopie, on utilise le $:

$B5 fixe la colonne B B$5 fixe la ligne 5 B5 fixe à la fois la ligne et la colonne.

2. Corrigez votre formule et faites le bon calcul, dans la colonne E.

3. Faire un graphique représentant cette suite, n en abscisse et u_n en ordonnée.

4. Modifier la valeur de a. Observez le graphique qui s'actualise.

5. Observez le comportement de la suite, selon les valeurs de a, en particulier la convergence. Faire des conjectures liant les valeurs de a et la convergence de la suite.

Troisième partie : les démonstrations des conjectures de la première partie

1. Quelle(s) méthode(s) proposez-vous pour démontrer que .la suite définie au début de la première partie est croissante.?

2. Faire la démonstration.

3. Démontrer que la suite u est majorée.

4. En déduire qu'elle converge.

5. Quelle égalité doit vérifier la limite l de cette suite ? En déduire l.

9. 99. Problème du chien.

1. Un chien poursuit son maître. La courbe du maître est $M(t)=(x(t),y(t))$. La position initiale du chien est $C_0(x_0, y_0)$. Le rapport des vitesses du maître et du chien est $R=\frac{vitesse\text{ chien}}{vitesse\text{ maître}}$.

Quand le maître fait un « pas » le chien en fait un dans la direction du maître. A chaque pas le chien ajuste sa direction pour toujours viser son maître.

Si on note $\delta x_M = x(t+h)-x(t)$ et $\delta y_M = y(t+h)-y(t)$, où h est le temps écoulé entre deux pas du maître, montrer que δx_C et δy_C sont donnés par : $\begin{cases} \delta x_c = (x_M - x_C)\dfrac{R\sqrt{\delta x_M{}^2+\delta y_M{}^2}}{\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}} \\ \delta y_c = (y_M - y_C)\dfrac{R\sqrt{\delta x_M{}^2+\delta y_M{}^2}}{\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}} \end{cases}$.

Tracer la courbe du chien dans les cas où la courbe du maître est la suivante :

* un cercle , * l'axe des x (une droite) * une hyperbole

Dans chaque cas, on fera varier le rapport des vitesses R : ($R < 1$, $R = 1$, $R > 1$, $R >> 1$).

2. On suppose que le chien est doué d'une vision hyperperformante et d'un corps suffisamment souple pour ajuster sa position à tout moment en direction de son maîmaître.

Déterminer les équations différentielles qu'il faut alors résoudre dans le cas où le maître décrit une droite.

Voir http://promenadesmaths.free.fr/fichiers_pdf/trajectoire_poursuite.pdf

1. 10. Autres sujets

10. 100. Les courbes de Pierre Bézier

Monsieur Bézier était un ingénieur de Renault qui se trouva confronté à un problème mathématique lié à l'apparition des machines à commande numérique dans l'industrie au cours des années 1970.

Pour envoyer des commandes standard, il fallait que les machines puissent reproduire les formes demandées exactement comme elles leur avaient été fournies. On peut bien sûr mesurer un certain nombre de points dans l'espace et donner les coordonnées puis joindre les points avec des segments mais ce n'est pas vraiment satisfaisant quand on veut quelque chose qui ne ressemble pas à un véhicule extra-terrestre : c'est ce qu'on fait d'ailleurs dans les jeux vidéo. L'idée est donc avec un certain nombre de points de contrôle M_i de construire une courbe ne dépendant que de ces points.

Nous nous plaçons ici dans le plan, la généralisation à l'espace étant immédiate.

On appelle ***courbe paramétrée*** l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On se donne deux points A, B ainsi que la droite (AB).

a. Donner les équations paramétriques de (AB).

b. Tracer cette droite, soit avec un tableur en la considérant comme une courbe paramétrique (c'est la même chose que dans l'espace), soit avec un logiciel de géométrie en la considérant comme un lieu de points.

Dorénavant vous travaillerez soit avec un tableur, soit avec un logiciel de géométrie

2. Construire l'ensemble des barycentres M_1 de {(A, u), (B, $1-u$)} où u varie de 0 à 1. Quel est cet ensemble de points ?

3. On se donne un troisième point C.

a. Construire l'ensemble des barycentres M_2 de {(B, u), (C, $1-u$)} où u varie de 0 à 1. Quel est cet ensemble de points ?

b. Construire l'ensemble des barycentres P_1 de {(M_1, u), (M_2, $1-u$)} où u varie de 0 à 1.

c. Montrer que P_1 est le barycentre de {(A, u^2), (B, $2u(1-u)$), (C, $(1-u)^2$}.

d. Vérifiez que la somme des coefficients vaut 1.

e. Quelle est la nature de l'ensemble Γ_2 des points P_1 ?

4. On se donne un quatrième point D.

a. Construire l'ensemble des points M_3, barycentres de {(C, u), (D, $1-u$)}.

b. Construire l'ensemble des points P_2, barycentres de {(M_2, u), (M_3, $1-u$)}.

c. Construire l'ensemble Γ_2 des points Q_1, barycentres de {(P_1, u), (P_2, $1-u$)}.

d. Exprimer Q_1 comme barycentre de A, B, C et D.

e. Que vaut la somme des coefficients ? Prouvez-le.

5. Que se passe-t-il sur Γ_2 lorsqu'on déplace un point ?

6. Que peut-on dire de (AB) et de (CD) par rapport à Γ_2 ?

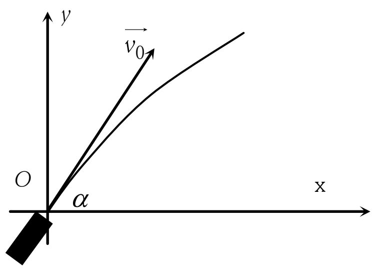
7. On veut faire passer une courbe exactement par les points A, B, C et D. Pensez-vous que ce soit faisable avec cette méthode ?

8. Comment généraliser à davantage de points ?

<u>10. 101. La méthode d'Euler : lancer d'un projectile</u>

Le modèle est celui du canon : un obus est tiré dans l'axe du canon, suivant un angle α avec l'horizontale. L'obus sort de la bouche du canon avec une vitesse initiale v_0 et suivant la tangente à la trajectoire.

A un moment donné, les forces agissant sur l'obus sont la résistance de l'air $\vec{R}$, proportionnelle au carré de la vitesse, dirigée à l'opposé de cette dernière (la vitesse est un vecteur représenté par la tangente à la trajectoire) et le poids $\vec{P}$ orienté vers le bas.

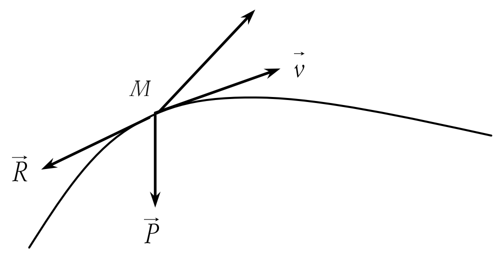


Nous regardons tout d'abord ce qui se passe lorsqu'on ne tient pas compte des frottements.

On a dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ les coordonnées $(x(t)\,;y(t))$ du centre de gravité M de l'obus, la vitesse $\vec{v}(x'(t);y'(t))$ et l'accélération $\vec{a}(x''(t);y''(t))$. Les conditions initiales sont

$M_0=O=(x(0)\,;y(0))=\vec{0}$ et

$\overrightarrow{v_0}=(x'(0)\,;y'(0))=(v_0\cos\alpha\,;v_0\sin\alpha)$.



Les équations du mouvement sont en suivant les lois de Newton :

$m\vec{a}=\vec{R}+\vec{P}\Leftrightarrow m\vec{a}=m\vec{g}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{g}\Leftrightarrow\begin{cases}x''(t)=0\\y''(t)=-g\end{cases}$ (**1**).

Toutes les représentations se feront avec un angle α de 60° et une vitesse v_0 de 100 m.s^{-1}. Ces valeurs seront stockées dans les cellules B1 et B2 du tableur de manière à pouvoir être modifiées.

1. On pose $X(t)=x'(t)$ et $Y(t)=y'(t)$.

a. Vérifier que l'approximation affine du système (**1**) est $\begin{cases}X(t+h)=X(t)\\Y(t+h)=Y(t)-gh\end{cases}$ (**2**).

b. Quelles conditions initiales donneriez-vous ?

c. Représentez les solutions $X(t)$ et $Y(t)$ à l'aide du tableur (500 valeurs). Quelle est l'interprétation physique de ces solutions ?

d. Calculez pour toutes les valeurs précédemment obtenues la quantité $\varphi(t)=\sqrt{X^2(t)+Y^2(t)}$. Interprétez les résultats physiquement.

2. a. Donnez la solution exacte du système $\begin{cases}X'(t)=0\\Y'(t)=-g\end{cases}$ avec les conditions initiales $\begin{cases}X(0)=v_0\cos\alpha\\Y(0)=v_0\sin\alpha\end{cases}$. Que vaut la quantité φ ?

b. Evaluez l'écart entre les solutions exactes et celles obtenues par la méthode d'Euler. Que pensez-vous du résultat ?

3. On cherche la trajectoire de l'obus.

a. Montrez que le problème revient à résoudre $\begin{cases}x'(t)=X(t)\\y'(t)=Y(t)\end{cases}$ (**3**) où X et Y sont les solutions trouvées précédemment.

b. Vérifiez que l'approximation affine du système est $\begin{cases}x(t+h)=x(t)+hX(t)\\y(t+h)=y(t)+hY(t)\end{cases}$. Quelles sont les conditions initiales ?

c. Représentez les solutions $x(t)$ et $y(t)$ à l'aide du tableur (500 valeurs). Quel est le type de courbe obtenue ?

d. On veut atteindre avec l'obus une cible située à 1 km de distance. Quelle doit-être l'inclinaison du canon ?

4. Vérification des solutions et de la trajectoire.

a. Montrez que les solutions exactes du système sont $\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha \end{cases}$.

b. Tracez ces solutions sur la même représentation qu'au 3.

c. Calculez l'écart entre les solutions exactes et celles du 3. Conclusion.

d. Vérifiez que la courbe décrite par l'obus a pour équation $y = -\dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$.

e. Quelle doit-être l'inclinaison du canon pour atteindre avec l'obus une cible située à 1 km de distance ?

10. 102. Inversion

On considère l'hyperbole équilatère H d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, la rotation r de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et la transformation du plan complexe privé de l'origine : $f : z \mapsto z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$. Les justifications de votre travail peuvent être apportées par tous les moyens à votre disposition…

1. Hyperboles

a. Tracer H dans la fenêtre $[-5\,;+5]\times[-5\,;+5]$.

b. Tracer la courbe H'=f(H). Montrer que si $M'(x', y')$ est un point de H' alors $x'^2 - y'^2 = \alpha$ où α est une constante à déterminer.

c. On pose pour tout t réel tel que cos t ne soit pas nul, $\begin{cases} x' = \dfrac{k}{\cos t} \\ y' = k\tan t \end{cases}$. Quelle est la valeur de la constante k ?

2. Lemniscate

Soit la courbe Γ , ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = \tan t \end{cases}$, $t \in]-\pi\,;\pi[- \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

a. Par quelle transformation simple passe-t-on de H' à Γ ?

b. Soit N d'affixe $z = x + iy$ d'image par f : N' d'affixe $z' = x' + iy'$. Vérifier que $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$.

c. Tracer l'image par f de Γ . On note L cette courbe qui est donc l'image de H par une succession de transformations.

d. Soit T une tangente à H en un point quelconque. L'image de T par les transformations précédentes devient-elle une tangente à L ?

e. Soit ABC un triangle constitué de trois points non alignés de Γ , $A'B'C'$ son triangle image sur L. Comparer les angles de ces deux triangles. Constatation ?

f. De même comparer les longueurs des côtés des deux triangles. Constatation ?

3. Aires

a. On veut calculer l'aire comprise entre H, l'axe (OX) les droites x=1 et x=5. A l'aide de ce que vous avez fait en 1. que suggérez-vous sans calculer d'intégrale.

b. Même question pour la longueur de la portion de H comprise entre x=1 et x=5.

c. Pouvez-vous donner une valeur approchée de la longueur totale de L ?