FICHE n°9 : SUR LE CALCUL INTEGRAL

Tableau de base

f	Une primitive F	Intervalle I où sont définies f et F
C avec $C \in \mathbb{R}$	$Cx + C'$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	"
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	"
x^n avec $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	"
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$

Tableau de formules

f	Une primitive F	Intervalle I où sont définies f et F
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u \neq 0$
$u'u^n$ avec $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0$
$u'e^u$	e^u	$\mathbb{R}$
$u'\sin u$	$-\cos u$	"
$u'\cos u$	$\sin u$	"
$\frac{u'}{\sqrt{u}} = u'.u^{-1/2}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$

Existence

F est une primitive de f sur I si et seult si :

f continue sur I et $F'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(x)dx$ existe si f est définie continue sur $[a, b]$

Signe f et g continues sur I, $a \in I$, $b \in I$ $a<b$

Si $f(x) \geq 0$ sur [a ;b] alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si $f(x) \geq g(x)$ sur [a ;b] alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Propriétés : f et g continues sur I, $a \in I$, $b \in I$

$\int_a^a f = 0$ $\int_b^a f = -\int_a^b f$ $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f+g$ $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$

Si f est paire : $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$

Si f est impaire : $\int_{-a}^a f = 0$

Application au calcul d'aires

f et g continues sur I, $a \in I$, $b \in I$ $a<b$

Exprimer l'aire (en u.a) des domaines :

1) $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ A= $\int_a^b f(x)dx$

2) $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$ A= $\int_a^b f(x) - g(x)dx$

3) $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$ A= $\int_a^b -f(x)dx$

Valeur moyenne de f sur [a ;b]

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Inégalité de la moyenne :

Si f continue et $m \leq f(x) \leq M$ sur [a ;b]

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Formule de l'intégration par parties (IPP)

u et v deux fcts dérivables sur I, $a \in I$, $b \in I$ avec u' et v' continues sur I alors :

$\int u'v = uv - \int uv'$ ou

$\int uv' = uv - \int u'v$