FICHE N °14 : SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

L'équation *y' = ay*

* On vérifie que la fonction $y = e^{ax}$ est solution de l'équation en remplaçant : $ae^{ax} = a \times (e^{ax})$

* On prend une solution quelconque sous la forme $y = h(x)e^{ax}$ et on démontre que h(x) est une ……Constante……

* On conclut que la solution générale de l'équation y' = ay est :

$$\boxed{y = ke^{ax} \text{, avec } k \in \mathbb{R}}$$

L'équation y' = ay + b

* On vérifie que cette équation admet une seule solution qui soit une constante : $\alpha = -b/a$

* On prend une solution quelconque sous la forme $y = g(x) - \frac{b}{a}$ et on démontre que g(x) doit vérifier l'équation différentielle y' = ay.

* On en déduit que la solution générale de l'équation y' = ay + b est :

$$\boxed{y = ke^{ax} - \frac{b}{a} \text{ avec } k \in \mathbb{R}}$$

Propriété pour les deux types d'équations :

Si x_0 et y_0 sont deux réels quelconques, il existe, parmi les solutions de l'équation, une solution **unique** f qui vérifie la condition $y_0 = f(x_0)$.

On démontre cette propriété en remplaçant x et y par x_0 et y_0 dans la solution générale et en montrant que l'on trouve une valeur et une seule de la constante k.

1ère méthode dans les exercices sur les équations avec second membre.

(1) y' + ay = h(x)

* L'énoncé donne ou bien fait trouver une fonction p(x) qui vérifie l'équation (1)

* On considère l'équation sans second membre : (2) y' + ay = 0

On vous demandera de démontrer que si f(x) = g(x) + p(x), dire que f vérifie l'équation (1) est équivalent à dire que g vérifie l'équation (2).

* Comme on sait résoudre l'équation (2) on trouve toutes les valeurs de g(x).

* On en déduit que toutes les solutions de l'équation (1) sont : $f(x) = ke^{-ax} + p$ où on remplace g(x) par les solutions de (2) et p(x) par la fonction de la première question.

2ème méthode dans les exercices sur les équations avec second membre.

(1) y' + ay = h(x)

*On résoud l'équation y' + ay=0.

* On suppose qu'une solution de (1) est $f(x)=u(x)e^{-ax}$

* On.a alors en remplaçant dans (1) : $u'e^{-ax} - \cancel{aue^{-ax}} + \cancel{aue^{-ax}} = h$

* On doit donc chercher une primitive de $u' = h(x).e^{ax}$

* On conclut que les solutions de (1) ont la forme $f(x) = e^{-ax}.\left(\int h(x)e^{ax} + C\right)$

* Grâce aux conditions initiales on trouve la solutiond e (1) : $f(x_0) = y_0$