Classe de Terminale S

Démonstrations à connaître **Spécialité : géométrie**

Restitution organisée des connaissances

Pour chaque question nous rappelons la démonstration et nous essayons de proposer une mise en situation… Lorsqu'il n'y a pas de démonstration demandée vous pouvez inventer une question…

1. Spécialité : géométrie
   - 1-a : Toute similitude de rapport k (>0) est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie
   - 1-b : Les isométries du plan sont les transformations $z' = e^{i\theta}z + b$ ou $z' = e^{i\theta}\overline{z} + b$
   - 1-c : Caractérisation complexe d'une similitude
   - 1-d : Propriétés des similitudes
   - 1-e : Une similitude ayant deux points fixes distincts est soit l'identité, soit une symétrie axiale
   - 1-f : Forme réduite d'une similitude directe
   - 1-g : Propriété : « étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que A ≠ B et A' ≠ B', il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' ».

On suppose que le lecteur a quelques idées de base sur les similitudes, les isométries et les transformations de base… Sinon il lui faut se reporter à un cours de TS.

On peut consulter notamment http://xmaths.free.fr/

1. Spécialité : géométrie

1-a : Toute similitude de rapport k (>0) est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie

Soit s une similitude de rapport k positif et h une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$. La composée $h \circ s$ est alors une similitude de rapport $k.\frac{1}{k} = 1$, c'est donc une isométrie f.

On a donc $h \circ s = f \Leftrightarrow h^{-1} \circ h \circ s = h^{-1} \circ f \Leftrightarrow s = h^{-1} \circ f$ où l'homothétie h^{-1} a pour rapport k.

Exercice (remplacement 2004, Amérique du Sud)

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre comme unité.

Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $B_{n+1} = S(B_n)$.

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.

3. On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.

a. Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

b. Exprimer l_n en fonction de n et l_0.

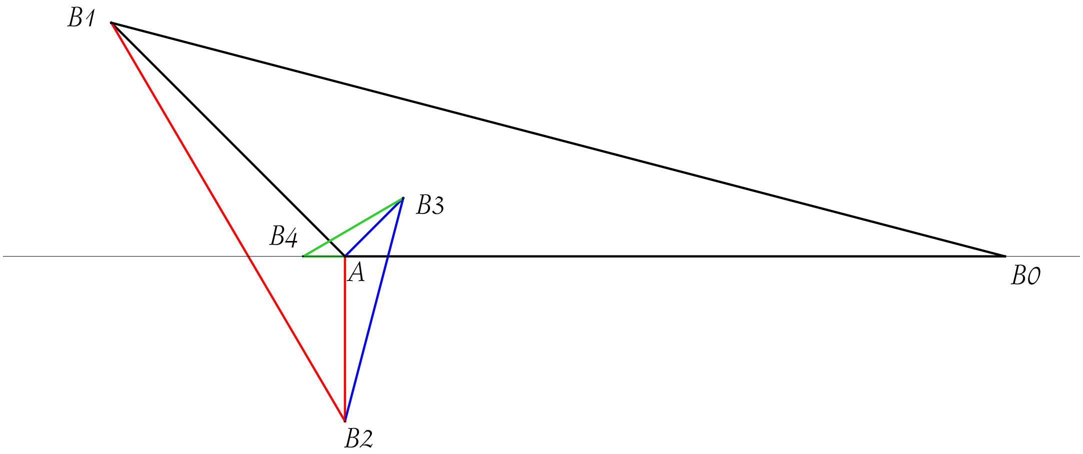
c. On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + ... + l_n$. Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. a. Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.

b. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0). Pour quelles valeurs de n, B_n appartient-il à Δ ?

Correction

1. Rien n'interdit de prendre A_0 à l'origine et B_0 en $z = 8$. On a alors $S : z \to z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z$, d'où en notant z_n l'affixe de B_n : $z_{n+1} = \frac{1}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z_n$, soit $z_n = \frac{1}{2^n}e^{i\frac{3n\pi}{4}}z_0 = \frac{8}{2^n}e^{i\frac{3n\pi}{4}}$.



Enfin, bref, à chaque fois on tourne de $\frac{3\pi}{4}$ et on divise la distance par 2.

2. Par S on a $\begin{cases} A_0 \to A_0 \\ B_n \to B_{n+1} \\ B_{n+1} \to B_{n+2} \end{cases}$ donc les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.

3. a. $l_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2}B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}l_n$ puisque les triangles sont semblables et que le rapport de similitude est 1/2.

b. $l_n = l_0\frac{1}{2^n} = \frac{8}{2^n}$.

c. $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_n = 8\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} \to 16$.

4. a. $3x - 4y = 2$ a comme solution évidente $x = 2$, $y = 1$: $3.2 - 4.1 = 2$. Soustrayons :

$$\begin{cases} 3x-4y=2 \\ 3.2-4.1=2 \end{cases} \Rightarrow 3(x-2)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3(x-2)=4(y-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4k \\ y-1=3k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$$

d'où les solutions $\begin{cases} x=2+4k \\ y=1+3k \end{cases}$, k entier relatif.

b. On voit sur la figure que B_2 est sur Δ ; en faisant $\frac{3\pi}{4}$ à chaque fois il faudra 4 coups pour revenir sur Δ, les valeurs de n correspondantes sont donc $n = 2 + 4k$.

Sinon on peut repartir sur $z_n = \frac{1}{2^n} e^{i\frac{3n\pi}{4}} z_0 = \frac{8}{2^n} e^{i\frac{3n\pi}{4}}$ qui est imaginaire pur lorsque $\frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 3n = 2 + 4k \Leftrightarrow 3n - 4k = 2$, soit les solutions précédentes.

1-b : Les isométries du plan sont les transformations $z' = e^{i\theta} z + b$ *ou* $z' = e^{i\theta} \overline{z} + b$

Il est immédiat de montrer que ces deux types de transformations sont des isométries ; par exemple pour $z' = e^{i\theta} \overline{z} + b$:

$M(z_1) \to M'(z_1')$ et $N(z_2) \to N'(z_2')$, soit $M'N' = |z_2' - z_1'| = |e^{i\theta}| |\overline{z_2} - \overline{z_1}| = 1 |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = MN$.

Il est plus délicat de montrer que toute isométrie est de cette forme : soit f une isométrie du plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) ; on note (O', I', J') le repère image par f : ce repère est également orthonormal d'après les propriétés des isométries (conservation des longueurs et des angles, les isométries *positives* conservant le sens des angles, les iso. *négatives* les renversant).

Prenons $M(x ; y)$, on a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$, $M'(x' ; y')$ son image par f : $\overrightarrow{O'M'} = x'\overrightarrow{O'I'} + y'\overrightarrow{O'J'}$.

Calculons les produits scalaires :

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OI} = x\overrightarrow{OI}^2 + y\overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OI} = x$, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OJ} = x\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} + y\overrightarrow{OJ}^2 = y$, de même $\overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'I'} = x'$, $\overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'J'} = y'$.

Mais comme les distances et les angles sont conservés, on a

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OI} = OM.OI.\cos\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}\right) = O'M'.O'I'.\cos\left(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'I'}\right) = \overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'I'}$$

ainsi que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'J'}$ d'où $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ et $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$.

Passons maintenant en complexes : prenons dans le repère (O, I, J) les affixes : $O(0) \to O'(b)$, $\overrightarrow{O'I'}(u)$, $\overrightarrow{O'J'}(v)$ et $M(z = x + iy)$.

* $\overrightarrow{O'I'}$ est normé donc $|u| = 1 \Leftrightarrow u = e^{i\theta}$, θ réel quelconque.

* $\overrightarrow{O'J'}$ est normé et orthogonal à $\overrightarrow{O'I'}$ donc $v = iu = ie^{i\theta}$ ou $v = -iu = -ie^{i\theta}$.

* $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'} \Leftrightarrow z' - b = xu + yv$ d'où les deux possibilités :

$$\begin{cases} z' - b = xe^{i\theta} + iye^{i\theta} = e^{i\theta} z \\ z' - b = xe^{i\theta} - iye^{i\theta} = e^{i\theta} \overline{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = e^{i\theta} z + b \\ z' = e^{i\theta} \overline{z} + b \end{cases}.$$

1-c : Caractérisation complexe d'une similitude

Les deux résultats précédents donnent immédiatement que si s est une similitude de rapport $k > 0$, elle est de la forme $z \xrightarrow{f} z' = e^{i\theta} z + b \xrightarrow{h} kz' + \beta = ke^{i\theta} z + kb + \beta = ke^{i\theta} z + c$

ou de la forme $z \xrightarrow{f} z' = e^{i\theta} \overline{z} + b \xrightarrow{h} kz' + \beta = ke^{i\theta} \overline{z} + kb + \beta = ke^{i\theta} \overline{z} + c$.

En fait $ke^{i\theta}$ est un complexe a quelconque de même que c, ce qui donne $z' = az + c$ ou $z' = a\overline{z} + c$.

<u>Exercice (National 2004, remplacement)</u>

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.

Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.

3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et $+1$. Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = +\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

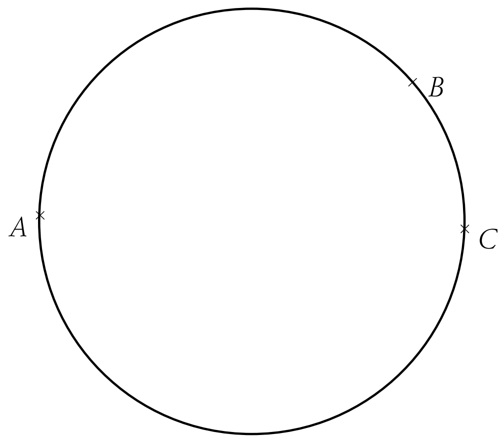
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.

3. Montrer que l'image E' de E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.

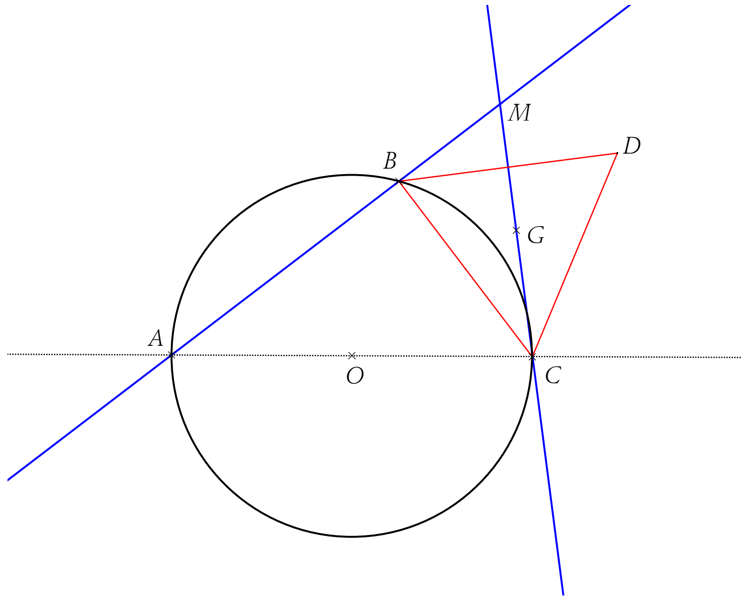
4. On note Σ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C. Montrer que le point E appartient à Σ.

Soit O' l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de Σ.

A rendre avec la copie



Correction

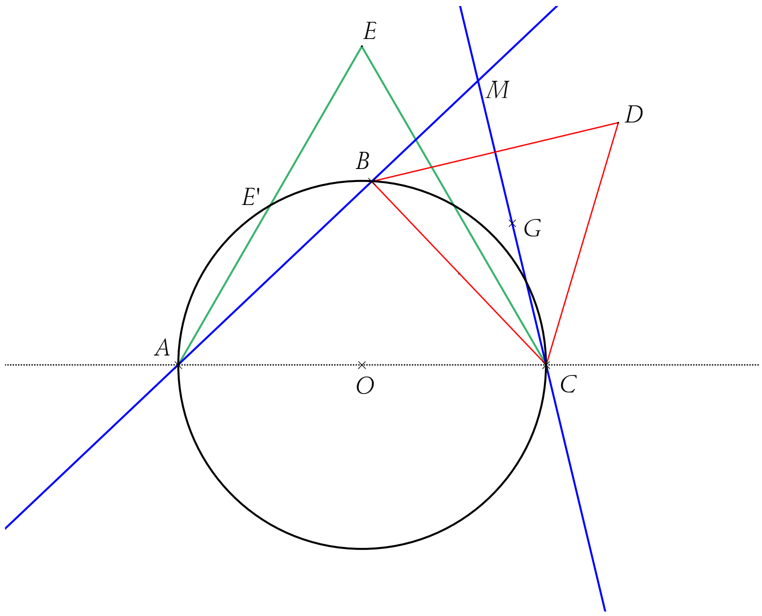


2. $[BC]$ est une corde du cercle Γ donc $OB = OC$; par ailleurs dans un triangle équilatéral le centre de gravité et le troisième sommet sont sur la médiatrice, ici sur celle de $[BC]$. (GC) est la médiatrice de $[BD]$; par ailleurs on a $\widehat{ABC}=90°$, $\widehat{BCG}=30°$, $\widehat{GBD}=30°$ d'où $\widehat{DBM}=180-90-30-30=30°$, moralité M est le symétrique de G par rapport à $[BD]$ et $GM = CG$.

3. On regarde les images par $s:\begin{cases} C \to C \\ B \to M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{CM}{CB}=2\dfrac{CG}{CB}=2\dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \theta=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CM}\right)=-\dfrac{\pi}{6}(2\pi) \end{cases}$

Partie B

1.



2. $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}$: $a=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et angle $\frac{\pi}{6}$. On cherche le centre : $z=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z\left(1-\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow z=1$, c'est donc C. La réciproque d'une similitude a même centre, un rapport inverse et un angle opposé : c'est bien le cas ici.

3. E est sur l'axe imaginaire, son affixe est $i\sqrt{3}$ (hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2). Son image a pour affixe $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}i\sqrt{3}+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{3i\sqrt{3}-3+1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui a évidemment pour module 1 et est donc sur Γ.

4. Comme $E'=\sigma(E)$, on a $E=s(E')$ puisque s est la réciproque de σ ; comme E' est sur Γ, E est sur Σ.

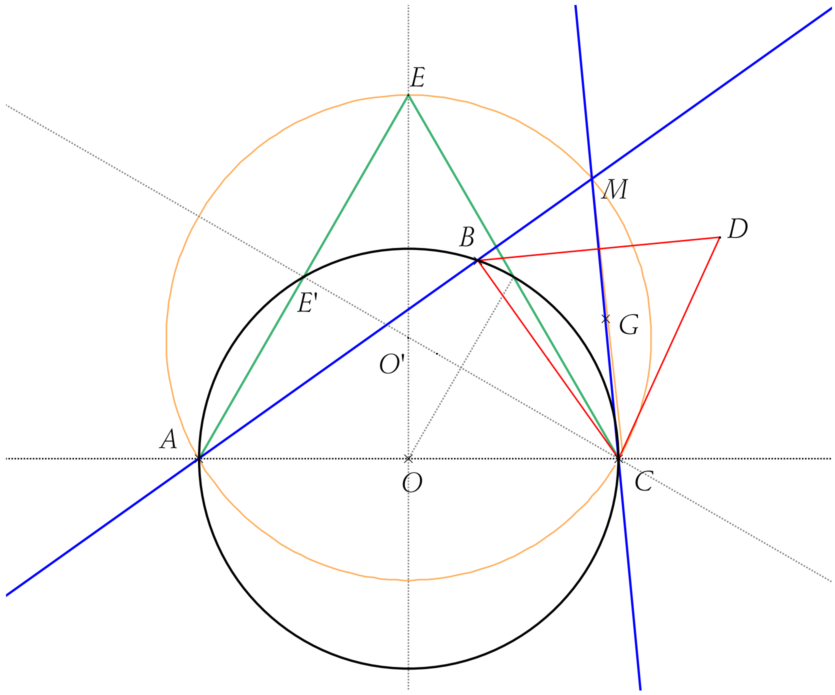
Lorsque B parcourt Γ, M parcourt le cercle de centre s(O)=O' et de rayon $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

On obtient l'affixe de O' « facilement » en écrivant que

$$z_{O'}-z_C=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_0-z_C)\Leftrightarrow z_{O'}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)+1=-1+\frac{i}{\sqrt{3}}+1=\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Celle du centre de gravité de ACE est $\frac{1}{3}(z_A+z_C+z_E)=\frac{1-1+i\sqrt{3}}{3}=\frac{i}{\sqrt{3}}$.

E est un point de Σ et O' son centre, la construction est faite.



1-d : Propriétés des similitudes

* Les similitudes de la forme $z'=az+b$ sont associées aux isométries positives, elles conservent le sens des angles : prenons trois points M, N, P et leurs images M', N', P' ;

on a alors $\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right) = \arg\dfrac{p'-m'}{n'-m'} = \arg\dfrac{(ap+b)-(am+b)}{(an+b)-(am+b)} = \arg\dfrac{p-m}{n-m} = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

* Les similitudes de la forme $z' = a\bar{z}+b$ sont associées aux isométries négatives, elles renversent le sens des angles : prenons trois points M, N, P et leurs images M', N', P' ;

$\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right) = \arg\dfrac{p'-m'}{n'-m'} = \arg\dfrac{(a\bar{p}+b)-(a\bar{m}+b)}{(a\bar{n}+b)-(a\bar{m}+b)} = \arg\dfrac{\overline{p-m}}{\overline{n-m}} = \arg\overline{\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right)} = -\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

* Conservation du barycentre : soit G le barycentre de $\{(M, \alpha)\,;(N, \beta)\}$, M' et N' les images de M et N, alors $m' = am+b$, $n' = an+b$, $g = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n) \to g' = a\left[\dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n)\right]+b = \dfrac{a}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n)+b$; montrons que G' est le barycentre de $\{(M', \alpha)\,;(N', \beta)\}$:

$$g' = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha m'+\beta n') = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha a m+\alpha b+\beta a n+\beta b) = \frac{a}{\alpha+\beta}(\alpha m+\beta n)+\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha b+\beta b) = ag+b\,.$$

En fait cette propriété est suffisante puisque l'associativité du barycentre fait que ceci sera valable pour un nombre quelconque de points.
Par ailleurs ceci permet de montrer d'autres propriétés simples comme la conservation du parallélisme.

1-e : Une similitude ayant deux points fixes distincts est soit l'identité, soit une symétrie axiale

Si notre similitude s'écrit $z' = az+b$, elle a soit un seul point fixe $z = \dfrac{b}{1-a}$, soit une infinité lorsque $a = 1$ et $b = 0$; c'est donc l'identité si elle en a plus que un.
Si elle s'écrit $z' = a\bar{z}+b$ et qu'elle a comme points fixes u et v, on a :

$$\begin{cases} u = a\bar{u}+b \\ v = a\bar{v}+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = a\bar{u}+b \\ u-v = a(\bar{u}-\bar{v}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = u-\bar{u}\dfrac{u-v}{\bar{u}-\bar{v}} = \dfrac{v\bar{u}-u\bar{v}}{\bar{u}-\bar{v}} \\ a = \dfrac{u-v}{\bar{u}-\bar{v}} \end{cases} \Rightarrow z'-u = \frac{u-v}{\bar{u}-\bar{v}}(\bar{z}-\bar{u})\,.$$

Cette dernière écriture est celle d'une réflexion d'axe (uv), ce que le lecteur vérifiera aisément…

<u>Exercice (Polynésie, 2004, remplacement)</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. On prendra sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}-1+i(1+\sqrt{2})\,.$$

a. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$.

b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.

c. Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.

2. a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Montrer que la composée $g = f\circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1+i)\bar{z}-1+3i$.

3. a. Soit M_0 le point d'affixe $2-4i$. Déterminer l'affixe du point $M_0'' = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $5x+3y=-2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M, dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\,;6]$, tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Correction

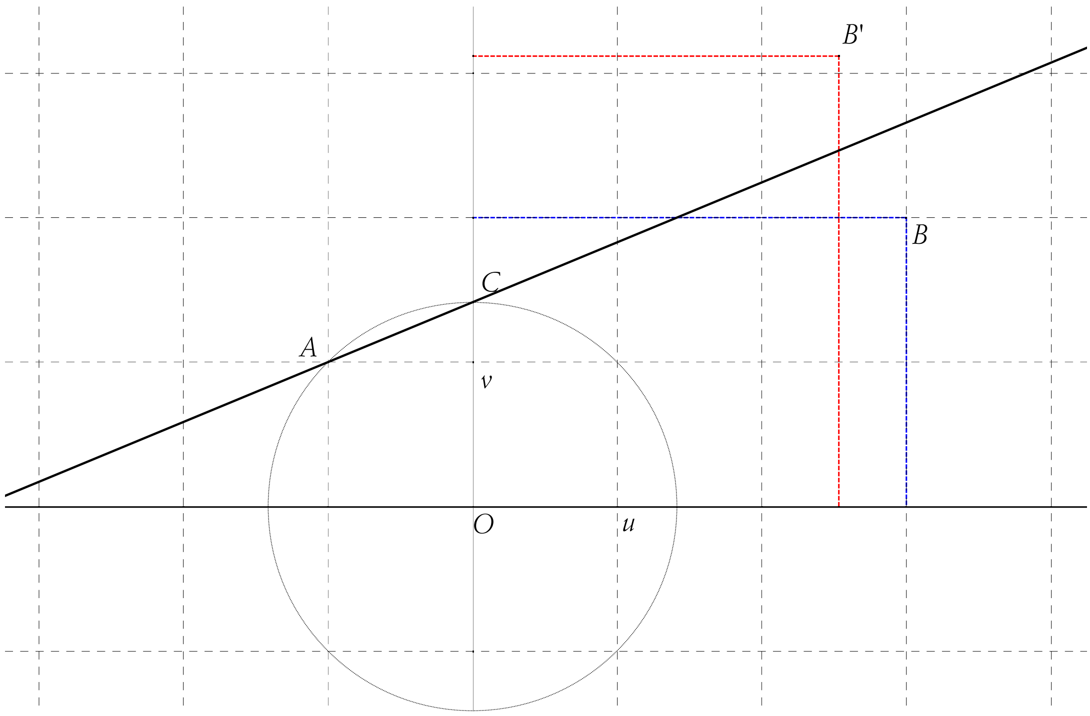
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. a. $z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z}-1+i(1+\sqrt{2})$: $a'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)-1+i(1+\sqrt{2})=-i\sqrt{2}-1+i+i\sqrt{2}=-1+i$,

$c'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-i\sqrt{2})-1+i(1+\sqrt{2})=-i+1-1+i+i\sqrt{2}=i\sqrt{2}$.

b. On a $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right|=1$ donc f est une isométrie. Par ailleurs les deux points A et C sont invariants donc f est une réflexion d'axe (AC).

c.



2. a. $h: z\to z'/\, z'-a=\sqrt{2}(z-a) \Leftrightarrow z'=\sqrt{2}z+a(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}z+(-1+i)(1-\sqrt{2})$

b. $g=f\circ h=z\xrightarrow{h}z'\xrightarrow{f}z''=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z}'-1+i(1-\sqrt{2})=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{\sqrt{2}z+(-1+i)(1-\sqrt{2})}-1+i(1+\sqrt{2})$, soit

$z''=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\overline{z}+(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right)\right]-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)=(1+i)\overline{z}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right)-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$;

il reste à simplifier :

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-1-i)\left(1-\sqrt{2}\right)-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)=-i\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)=-1+i\left(-\sqrt{2}+2+1+\sqrt{2}\right),$$

soit finalement $z'' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.

3. a. $z_0 = 2-4i \rightarrow z_0'' = (1+i)(2+4i) - 1 + 3i = -3+9i$; $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a = 3+2i+1-i = 4+i$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ a pour affixe $z_0'' - a = -3+9i+1-i = -2+8i$; avec le produit scalaire on a : $4.(-2)+1.8 = -8+8 = 0$, les vecteurs sont orthogonaux.

b. $z = x+iy \rightarrow z'' = (1+i)(x-iy) - 1 + 3i = x+y-1+i(x-y+3) \Rightarrow z'' - a = x+y+i(x-y+2)$;

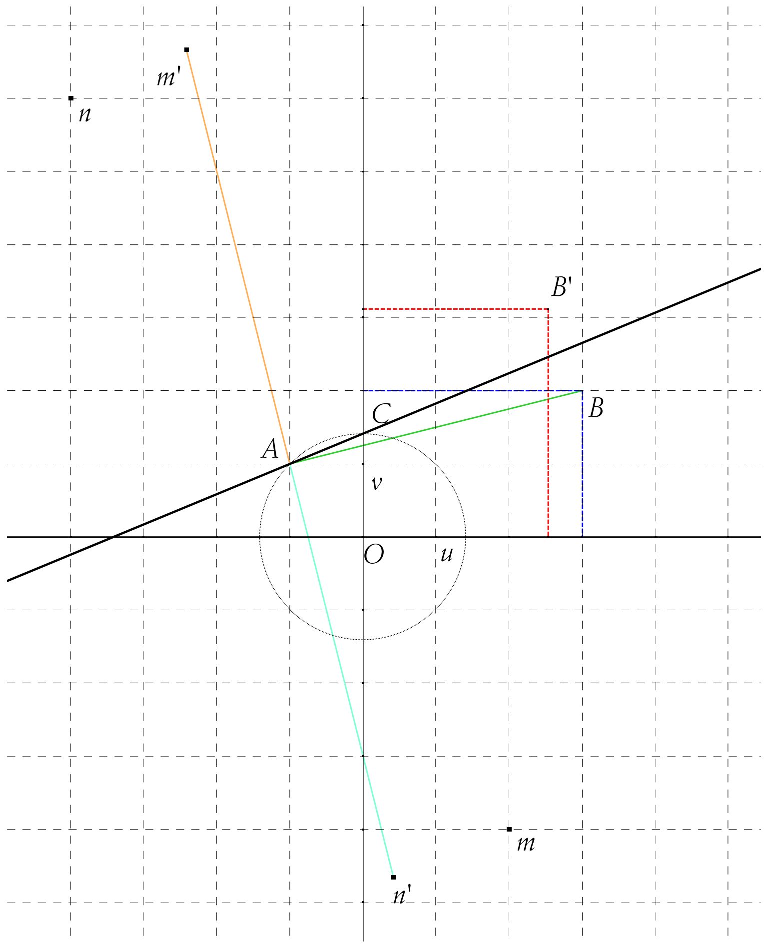
le produit scalaire donne $4(x+y)+1(x-y+2) = 5x+3y+2$ et est nul lorsque $5x+3y = -2$.

c. On a une solution évidente : $x = 2$, $y = -4$; soustrayons :

$$\begin{cases} 5x+3y=-2 \\ 5.2+3(-4)=-2 \end{cases} \Rightarrow 5(x-2)+3(y+4)=0 \Leftrightarrow 5(2-x)=3(y+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=3k \\ y+4=5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3k \\ y=-4+5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} .$$

d. $$\begin{cases} -6 \le x \le 6 \\ -6 \le y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \le 2-3k \le 6 \\ -6 \le -4+5k \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \le -3k \le 4 \\ -2 \le 5k \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \le k \le \dfrac{8}{3} \\ -\dfrac{2}{5} \le k \le \dfrac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1,0,1,2 \\ k=0,1,2 \end{cases} \Leftrightarrow k=0,1,2 .$$

Il y a trois points seulement : m (2 ; −4), A (−1 ; 1) et n (−4 ; 6).



1-f : Forme réduite d'une similitude directe

Une similitude directe s (avec a différent de 1, qui n'est donc pas une translation) a un point fixe : ω, seul point tel que $\omega = a\omega + b \Leftrightarrow \omega = \dfrac{b}{1-a}$.

On a alors $\begin{cases} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases} \Rightarrow z' - \omega = a(z - \omega) = ke^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \arg\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = \theta(2\pi) \\ \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = k \end{cases}$.

s est donc la composée d'une homothétie de rapport k et d'une rotation d'angle θ, les deux de centre $\Omega(\omega)$.

Remarquez que si vous tombez dans vos calculs sur un rapport négatif, il suffit de rajouter π à θ pour revenir à un rapport positif : $-ke^{i\theta} = e^{i\pi}ke^{i\theta} = ke^{i(\theta+\pi)}$.

1-g : Propriété : « étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que A ≠ B et A' ≠ B', il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' ».

Avec tous les résultats précédents c'est un jeu d'enfant :

on a les affixes a, a', b et b'. Si on a une similitude directe, celle-ci s'écrit $z' = \alpha z + \beta$; il suffit donc de trouver α et β en fonction de a, a', b et b'.

$$\begin{cases} A \to A' \\ B \to B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \alpha a + \beta \\ b' = \alpha b + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \alpha a + \beta \\ b' - a' = \alpha(b - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{b' - a'}{b - a} \\ \beta = a' - \alpha a \end{cases} ;$$

c'est tout.

<u>Exercice 1</u>

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

– A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;

– B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. a. **Démonstration de cours**. Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1.

b. Soit s cette similitude : préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Démontrer que le triangle A_0B_0 est isocèle en Ω.

c. Calculer la distance A_0B_4.

d. Démontrer que $\Omega A_0 = 4\Omega B_4$.

e. En déduire l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$.

<u>Exercice 1 bis</u>

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

– A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;

– B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A_0 en A_1.

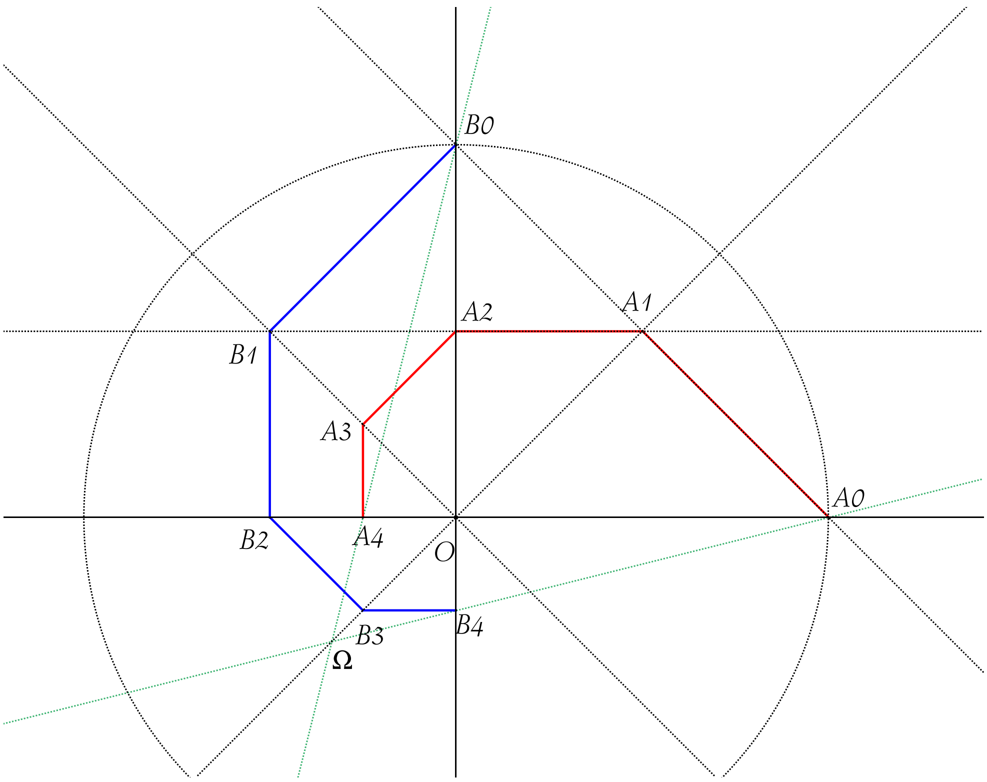
a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s, puis montrer que la similitude s transforme B_0 en B_1.

b. Démontrer que pour tout entier n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$ (tout élément de réponse, par exemple l'exposé d'une méthode ou la détermination d'une valeur approchée, sera pris en compte).

Correction



2. a. Evident : angle $= \dfrac{\pi}{4}$, rapport $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Comme $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA_0}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, la symétrie par rapport à $\left(OB_0\right) = \left(O, \vec{j}\right)$ donne $\left(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OA_3}\right) = \left(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OB_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; comme $OB_1 = OA_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}OA_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}OB_0$, le rapport est encore $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b. Comme on répète la même séquence d'opérations à chaque fois, la transformation qui envoie A_0 sur A_1 enverra A_n sur A_{n+1}, et pareil pour B_n et B_{n+1}. Si on ne se suffit pas de cet argument, on peut reprendre tout, mais c'est une perte de temps…

3. a. Si on prend le repère $\left(O\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{OA_0},\frac{1}{4}\overrightarrow{OB_0}\right)$, le point A_0 a pour affixe 4, A_1 a pour affixe $4\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$, etc.

d'où A_n : $4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}}$; les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si

$$\left(\overrightarrow{OA_n},\overrightarrow{OA_p}\right)=0[\pi]\Leftrightarrow \arg\frac{z_p}{z_n}=0[\pi]\Leftrightarrow n\frac{\pi}{4}-p\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow n-p=4k,\ k\in\mathbb{Z},$$

soit lorsque les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. Le plus simple (lorsqu'on n'a pas d'indication, sinon reprendre la méthode proposée dans l'exercice précédent) semble encore de déterminer les coordonnées de Ω en cherchant l'équation de (A_0B_4) puis en coupant par $(y = x)$; Ω est sur cette droite pour des raisons de symétrie évidentes.

$A_0(4\,;0)$, B_4 a pour ordonnée l'abscisse de A_4, soit $4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 e^{i4\frac{\pi}{4}}=-1$; la droite a pour équation $\begin{vmatrix}x-4 & -4\\ y-0 & -1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -x+4+4y=0$ d'où Ω a pour coordonnées $\left(-\frac{4}{3}\,;-\frac{4}{3}\right)$; on calcule la distance $\Omega A_0=\sqrt{\left(4+\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{17}}{3}$, l'aire du triangle est donc

$$2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}A_0B_0\times\Omega A_0\right)=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{17}=\frac{8}{3}\sqrt{34}.$$